陈省身文集

华东师范大学出版社



陳省身文集

华东师范大学出版社







◇5 岁时与父亲合影（1916 年）

◇与大学同学张志刚合影（1929 年）

◇与家人合影。左起：弟陈家麟、母韩梅、姐陈瑶华、妹陈玉华、陈省身、父陈宝桢（1930 年摄于天津）







◇南开大学理学士陈省身（1930年摄于天津）

◇清华大学数学教授孙镛(字光远)（1930年代初期）

◇南开大学数学教授姜立夫（1930年代）







◇清华大学算学会会员合影。前排：左二唐培经，左三赵访熊，左四郑之蕃，左五杨武之，左六周鸿经，左七华罗庚。中排：左一陈省身，左二施祥林，左四段学复。后排：左一王琇（1934年）

◇摄于1934年

◇1934年摄于汉堡







◇E.嘉当（1936年前后）　◇汉堡大学数学教授W.布拉施克（1936年前后）

◇师友送陈省身离开汉堡赴法国巴黎。右起：布拉施克、陈省身、吴大任、张禾瑞、陈鹀（1936年9月摄于汉堡车站）

FACULTÉ DES SCIENCES

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

UNIVERSITÉ DE PARIS

Paris, le 15 juin 1937

Cher Monsieur

◇E.嘉当 1937 年致陈省身函手迹







◇左起郭志远、金再鑫、陈鹗、陈省身、吴大任

◇A.韦伊　　　　◇H.外尔





◇O.维布伦

◇与夫人合影（1946年摄于中央研究院,上海）





◇家人合影（1950年代初于芝加哥）

◇偕夫人与华罗庚夫妇在北京合影（1972年）





◇第一次访问新中国,与科学院的领导及学者会面。前排左起：周培源、陈璞、吴有训、竺可桢、陈省身、郭沫若、郑士宁、于立群、章文晋、郭梦笔。中排左起：岳岱衡、张维、钱伟长、段学复、江泽涵、王竹溪、李光泽。后排：左一朱水行，左三张素诚，左四吴文俊，左五田方增，左六黄秀高（1972年9月16日）

◇接受福特总统颁发的美国1975年度国家科学奖章。右一美国国家科学基金会主任H.G.史蒂夫，右二福特，右四郑士宁，右五陈省身（1976年）

牛刀小試呈初篇(一)
垂老方知學問難
四十一年讀舊作
荷花時節傳新知
同文同志尋真理
一心一德探精微
莫道時人天地小
喜看後學繼前賢

(一)初作二篇發表於東北數學雜誌一九三三、三四年

一九七四年八月再訪東北大學承佐佐木重夫教授熱情招待并會見在渠領導下之青年數學家多人縱談學問快樂无已念與東大因緣綴成蕪句非詩也

陳省身識
一九七四年八月廿一日

乙卯仲夏重塗於加州



◇1974 年在日本东北大学（仙台）讲学期间诗作（1975 年手迹）

◇1979 年摄于伯克利

老馬識途

陳省身題





◇为老朋友A.韦伊的著作《数论》题词（按中国人的生肖，韦伊属马）

◇1982年伯克利数学研究所成立招待会上（前左起C.穆尔、E.托马斯、I.辛格、斯潘涅、海曼、陈省身）



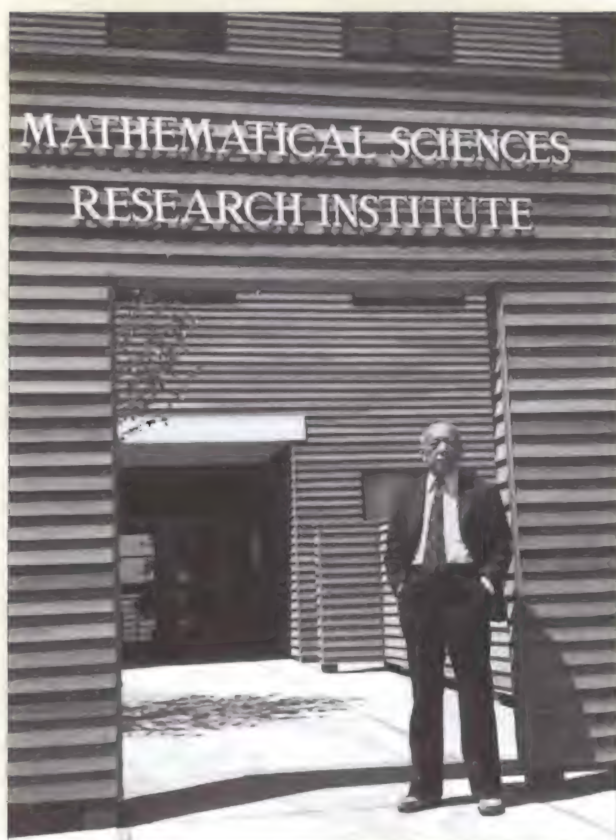
◇1984年8月邓小平接见陈省身
（左起：丁石孙、何东昌、郑士宁、邓小平、陈省身、胡国定）





◇接受以色列总统贺索颁发的沃尔夫奖（1984年5月）

◇1985年与夫人合影





◇1985 年摄于伯克利数学科学研究所

◇1985 年 5 月荣获纽约州立大学石溪分校荣誉博士称号，与杨振宁合影





廿一世紀

数学大國

「数学教学」

三十周年之庆

陳省身



◇在南开数学研究所成立的揭幕仪式上(1985年10月17日)

◇在中国数学会50周年年会上。前排左起：吴文俊、苏步青、周培源、周光召、陈省身、谢希德、柯召、吴大任（1985年12月6日于上海复旦大学）

◇1986年为华东师大《数学教学》杂志题词



◇1986年11月，邓小平接见陈省身夫妇





◇与参加南开数学研究所“几何拓扑年”的部分国内专家合影。前排左起：虞言林、孟道骥、戴新生、沈一兵、陈省身、严志达。后排左起：干丹岩、何伯和、陈维桓、侯自新、彭家贵、姜伯驹、李邦河（1986年11月10日）

◇左起：陈省身、廖山涛、程民德、谷超豪（1986年国际数学家大会期间摄于伯克利数学科学研究所前）







◇杨振宁访问南开数学研究所。左起：杨振宁、陈省身、母国光、胡国定（1986年6月）

◇左起：陈省身夫妇、黑尔加松夫妇、帕利斯（1987年）

◇摄于1987年4月19日





◇与吴大猷合影（1987年4月）

◇庆祝陈省身教授执教50周年暨“陈省身数学奖”首次颁奖仪式后合影。
左起：王元、杨乐、胡国定、钟宁、张恭庆、陈省身、郑士宁、刘永龄、吴文俊、吴美娟、程民德、冯康、任南衡（1987年5月于天津南开大学）



◇“二十一世纪中国数学展望学术讨论会”留影。会议由陈省身倡议召开
(1988年8月23日摄于南开数学研究所)





◇全家福（1990 年）

◇1990 年于南开数学研究所





◇在家中工作（1990 年代）

◇1990 年代在伯克利与学生乌米尼合影





◇1990 年 5 月接受法国科学院的奖章

◇1991 年摄于法国科学院





◇1992年4月摄于台湾清华大学（新竹）。左起：李远哲、李政道、陈省身、杨振宁、刘兆玄。

◇左起：郑绍远、陈省身、丘成桐（1992年）



◇1992年江泽民接见陈省身





◇与南开数学研究所研究生在一起（1999 年 7 月）

◇2000 年在南开数学研究所讲学厅





◇与第七届陈省身奖获得者王诗宬（左）、龙以明（右）合影（2000 年 3 月）

◇2001 年与刘徽应用数学中心学术委员会全体委员合影（前排：林家翘和陈省身；后排左起：龙以明、沈世镒、陈永川、葛墨林、周恒、熊洪允、张春庭、周性伟、刘家坤、吕宏海）





◇南开数学研究所的三任所长（左起胡国定、陈省身、周性伟）(2001 年 6 月)

◇2001 年 6 月与本书编者、编辑合影（前左：张奠宙；后右：王善平；后左：倪明）

编 者 的 话

杜甫咏泰山诗云:“会当凌绝顶,一览众山小。”能够站在数学科学的顶峰观察世事学问,自有超然的境界。陈省身先生是世所公认的数学大师,将他的随笔、演讲及诗文等等文字编成文集,当是惠及后人的盛事。这样,我们怀着景仰的心情开始筹划。

我们初次见到陈先生,是1974年在上海国际饭店听他的演讲。张奠宙在1985年曾写过一本《二十世纪数学史话》,辗转传到陈先生手里,于是有了机会拜访结识。1991年,张奠宙趁到伯克利的美国数学研究所访问,又和陈先生有几次长谈,后来写过一些访谈的文字。在这基础上,一本题为《陈省身》的传记性小书于1998年出版。有了这些积累,觉得对陈先生的经历和思想有了一点认识,就大胆地向陈先生提出了编写《陈省身文集》的设想。华东师范大学出版社的领导觉得能出版大师的文集是一种荣幸,也极力争取。精诚所至,陈先生也就答应了。

此前,陈先生的文选已经出过几种。北京的科学出版社有《陈省身文选》(1989),台北的联经出版公司也有一种《陈省身文选》。那么,我们编辑的这一本该有怎样的特点呢?

首先是完全。陈先生数学论文以外的文字,早在1920年代就有发表,散见于各种报纸杂志,尘封已久。1950年代以后,许多文字又刊载在台湾的媒体上。鉴于王善平研究现代数学史多年,又供职于华东师范大学图书馆,假便利条件尽力搜罗整理,目前可称完备。陈先生在1990年代的文字和讲演众多,与1989年出版的《陈省身文选》相比,内容已经大幅增加了,我们都一一收录。最后收入的一篇文字,写于2001年年底。

其次是准确。我们收录的文字,都尽量先找到原文,在收入时一一进行核对,并写了各篇的题记、注明出处。绝大部分的英文原稿,都重新作了翻译。前人编选、翻译中的误植,都尽量予以补正。例如,陈先生的出生日期,我们一律定为1911年10月28日(早先一说为26日)。

再次,我们将所有文字按内容作了编辑。分为“学算回首”、“师友之

忆”、“综论数坛”、“数学评介”、“诗文拾遗”、“历史回声”等共6个部分。其中“历史回声”是别人所写的与陈先生有关的文字。希望这些文章能对陈先生的生平和著述有进一步的了解。

最后，我们编制了“陈省身年谱”，许多资料是陈先生自己提供的。外文人名的中译是一个头疼的问题，现在大体采用《中国大百科全书》的译法。一些早年的文章和信件，为保持原貌，译名一仍其旧。所有译名由王善平作了人名索引，中英对照，以便于读者查找。

倪明本是数学系的同事，后来到出版社工作，对陈先生的仰慕也是由来已久。此次担任责任编辑，既觉荣幸，更感任重。精心加苦心编辑，当在情理之中。

感谢胡国定、周性伟、陈信漪各位先生的鼎力帮助，提供了许多资料和信息，校正文字，使我们少走许多弯路。张友余为“年谱”写过部分初稿，澄清了一些事实。以前有关陈先生文选的编选者，为我们的工作做了前期准备，也一并在此表示感谢。

现在，《陈省身文集》即将付印。尽管我们作了努力，但是一定还会有错误和不足，敬请方家给予指正。

张奠宙　王善平

2002.3.1.于华东师范大学

目录

一、学算回首

二、师友之忆

三、综论数坛

四、数学评介

五、诗文拾遗

六、历史回声

附录

XSHS

一、学算回首

人生就是不断地选择。选择数学，考取南开，进入清华。负笈汉堡，访学巴黎。西南联大，普林斯顿。最后从芝加哥、伯克利返回南开。这部分的文字叙述了陈省身的数学历程。

1. 嘉兴,我的故乡

原载《传记文学》第52卷第3期,台北,1988年。

嘉兴府原有嘉兴、秀水两县,我家是秀水县人。我是第二个孩子,上有一姐。我于阴历辛亥年九月初七出生,时革命正到嘉兴。那时的习惯:城里有乱时,则往乡下逃难。所以我出生九天便逃难。后来祖母常说:这是"劳碌命"。现在76岁了,还在劳碌。

我的父亲陈宝桢,字廉青,生于1889年。他于甲辰年(1904)中秀才,那时才15岁。他后来在浙江法政专门学校毕业,在司法界做事。晚年在台湾,与我弟家麟同住。我尚有一妹,信基督教甚笃。1964年父亲"重游泮水",集友人贺诗若干成帙印行,录他以下数诗作为纪念:

六十年前此甲辰　　蓝衫著体倍生春
一时佳话传鸳水　　二八韶华席上珍

幡然改计学申韩　　法理阂深未易殚
赢得一官权驻足　　争如展季亦心安

在昔穰侯见事迟　　我今身世几同之
优游岁月待终老　　赖有儿曹鹤立时

我也乘机写了以下二绝:

泮水芹香六十年　　风光虽改意情牵
孤灯残月成追忆　　经史诗词展旧编

一生事业在畴人　　庚会髫龄训育真
万里远游亏奉养　　幸常返国笑言亲

我祖母只有我父亲一个儿子,我是长孙,所以我幼时常同她在一起。有时随她烧香、拜佛、念经。我会背弥陀经,金刚经则太长了。

我的母亲的娘家是经商的,由外祖父一人起家的,在嘉兴有好几个铺子。我的一个舅父韩赞侯曾任嘉兴商会的常务委员多年。

嘉兴是有名的鱼米之乡,物产丰饶,历代人才辈出。春秋时越王勾践败吴于槜

李，就是嘉兴。

嘉兴最有名的胜景自然是南湖的烟雨楼。楼在湖中岛上，现为公园。湖中出菱，无角，鲜美无比。湖上有画舫，夏间富人包作竟日之游，船菜精美。幼时曾随父亲或舅父乘舫多次。中国共产党第一次代表大会，因为躲避官方，是在烟雨楼画舫上开的。

我因家庭爱护，不放心我进学校，所以入学甚迟。1920 年考入秀州中学预科一年级，即高小一年级。秀中是教会学校，管理严格。我的姑丈姚亮臣先生在秀中教国文，我的表哥一鹏高我两班，在秀中甚得他们的照顾。

我生在嘉兴下塘。房子后面靠河，有点风景，故至今仍在。

1922 年我父亲在天津任事，把全家接到天津，那时我在秀州高小三年级，能做相当复杂的算术题，也看过“封神榜”和“说唐全传”，幼年得长辈爱护，是一生很幸福的一段。许多小事，记忆犹新，现在不多写了。

2. 我最美好的年华是在天津度过的

原载《天津日报》1982年11月21日。

我到天津是1922年，到今年整60年。60年旧地重游，不禁有隔世之感。

我是从浙江嘉兴来的，那时我才11岁。到天津已是秋天，中学都开学了，所以在家呆了一阵子。1923年年初，进扶轮中学（现在的铁路一中）插班第二学期。扶轮中学是当时交通部所办的唯一的一所中学，入学的大都是路员子弟。我不是路员子弟，由于扶中离我家近，可以走读，所以就入了扶中。学校是很好的，因为是交通部办的，经费比较宽余，聘请教员待遇也好。所以我得到他们的好处。我们的校长顾赞庭，他自己也搞点数学，他很看重数学，亲自教几何，而且教得很凶。我数学学得比较好，当时我是他一个很得意的学生。他很看得起我。此外，"扶轮"还有几个很好的数学老师。郑次纯老师，是北师大毕业，他教的是英文课本，习题多极了。他说全做，我就全做。有时一个钟头能做二三十道题。但也有个别不会做的。别的同学做得少一些。还有个教数学的彭罕三老师。他现在还在。前几年我们"扶轮"同学在北京聚会，彭老师还参加了。他已经八十好几了。

我念数学不觉得困难，感到特别容易。初小我只念了一天。下课时，老师拿个戒尺打学生手心，挨个打，最少打一下，最多打四下。我是头一天去，很规矩，没挨打。不过看了这一打，第二天就不去了。有一年父亲回家来，教我一点1、2、3、4……我就会看了，也会做习题。可以说我没上过初小，一进就是高小。我并不是故意跳班，换个地方自然就高一点，而且一考也行。"扶轮"是旧制中学，念四年，数学只念三角、几何，解析几何没念过。可是考大学就考解析几何。那年夏天是很糟的，祖母去世，家里办丧事，有和尚念经，人家吊孝，乱得一塌糊涂，我就在那儿预备考试，借来南开中学的课本，自己看看就考，考得挺不错。

我不是一个规规矩矩、老老实实念书的，我要有兴趣，我就可以做做。分数好坏不大在乎。反正我的数学分数总很好，其他功课平平常常，但总能及格，比及格还好点。花点劲也可以很好，但我懒得花劲。

我书看得很多，喜欢去图书馆看杂书，什么书拿来就看。我喜欢看历史、文学、掌故，乱七八糟的书都看。时常跑到书库一呆就几个钟头，这本看看，那本看看。数学书也看，但并不光看数学书。有些数学书，有些数学杂志，有些数学家，我都知

道。我有个看书的习惯,是自己主动地去看书,不是老师指定要看什么参考书,而看什么书。这很有好处。你已经有了个初步了解,以后待你真正需要看内容时,就比较熟了。

我是班上年纪最小的。我不会运动,有运动我就去看看。我喜欢打桥牌,而且打得不错。扶轮中学的运动,有几项还是可以的。有的项目有时候在天津得一个锦标什么的,就高兴得不得了,学校要庆祝的,甚至停一天课。"扶轮"的篮球是很好的。它有一个强的篮球队,到全国各处打比赛。其中有的人后来进了南开,球打得也很好。

当时对于社会上的事,我不大关心,就知道念书。我对天津其实知道的不多。住这么多年,许多地方也去过。但平常就是念书,到学校来回来回,同学家里去去。那时候我家住在河北三马路宙纬路。最热闹的街是大胡同,在金钢桥这边。大胡同稍过一点是官银号。官银号在天津的东北角。那里有绕着城的电车:白牌电车。普通人的主要交通工具,除了人力车,就是电车——有轨电车。黄牌和蓝牌电车是到租界的。

1926年,我15岁,考入南开大学。南开就在八里台。当时的八里台全是荒的。学校最老的房子是秀山堂;另外,美国人捐了一部分款,中国人也捐了一部分款,盖了思源堂。后来都被日本人炸掉了。那时南开理学院有四个系:生物、物理、化学、数学。头一年进去不选系,就念数学、物理、化学、国文、英文五门课。我大概不会进生物系。我化学搞不好,实验不会做。所以也不会念化学系。我选了力学,数学的力学。这样不但不会进化学系,连进物理系的可能也不多了,就进了数学系。头一年姜立夫老师请假到厦门大学去了,二年级时他才回来,教我们的课。姜老夫子是一位很好的老师,课讲得很好。他一个人讲授高等微积分、立体解析几何、微分几何、复变函数论、高等代数、投影几何等七八门课程。当时南开有理学院、文学院、商学院,总共三百多学生,不及现在南开一个系的学生。所以大家都认得。我们班就5个同学,我和吴大任是同班。头一年还不大熟,三年级就很熟了,差不多整天在一起。他比我大三岁。他数学也很好。

姜立夫老师当然也很喜欢我,叫我作他的助手。因为大学没毕业,不够资格作助教,只能作助手,帮他改卷子。助手一个月十块钱。第一个月领到十块钱,当然是很得意的了,比一个报贩的钱多一点。报贩一个月七八块钱,作助手可以拿十块钱。姜老师一礼拜三堂课,每堂课都有习题,一星期就要改三次卷子。开头是一二年级的,后来三年级的卷子也让我改。不只替他改,张希陆老师(就是张伯苓的公子)的课,卷子也让我改。反正每月总会赚十块钱。没有超过十块钱的。当时我在班上、可能在数学系,也是年纪最小的。可是他们有些不懂的题也来问我,大概他们知道我懂。告诉他们就是了。

一年级时国文老师写个国文题目,我的国文不好,可是我写起来很快,有时我

做好几篇。其实往往有个特别的想法，两篇并不一样。写得也不好。有的同学要，他就另外拿一篇去。有时他拿了去的那篇，他的分数比我还高，我自己那篇反而低。

总之，我在大学的生活是过得非常愉快的。

天津是我很喜爱的一个城市。她给我留下许多美好的回忆。一个人的一生中，中学大学是最美好的时期，年纪轻，思想正在改变。我最美好的年华是在天津度过的，而且过得很愉快。一切都很顺利。有一个完美的家庭，有许多老师和朋友。天津人都很诚恳。常在街上走走，问个路都热情告诉你，乐意帮助。

我对天津是有感情的。1972 年以来我来过中国 7 次，有 4 次回到天津。我看到天津有了不小的变化。当然最大的变化是外国租界不见了，“三不管”的腐败生活不见了，日本兵营不见了。当年我从河北宙纬路到南开上学，要经过海光寺，海光寺是日本的兵营。看到日本兵端着枪，耀武扬威的样子，很是讨厌。后来日军又炮轰南开园，火烧图书馆，把一个好端端的大学破坏殆尽。南开大学在日本兵毁坏的废墟上恢复，特别是最近 20 多年，有了很大发展。现在学校环境幽美，条件也好多了。她为中国培养了不少人才。我身在他国异乡，但我总时时怀念着启迪我智慧、教给我知识、哺育我成长的母校——南开。

天津是我喜欢的城市。我愿借此机会向天津人民致意！

3. 联大六年（1937 ~ 1943）

本文选自《陈省身文选》（张洪光编），科学出版社，1989 年。

我是由清华研究院资送出国的，为期两年，去德国汉堡大学。1934 年 9 月抵汉堡，11 月开学，1936 年 2 月完成博士学位。后得中华文化基金会资助，于 1936 ~ 1937 年在巴黎工作。得母校清华邀请，任数学系教授。

1937 年 7 月 10 日离开巴黎时中日战争已爆发。我照原定计划由法乘船去纽约，横贯美洲至加拿大温哥华城，乘“加拿大皇后”号船去上海。当时日本侵略已达上海，改在香港下船。在香港住了一个多月，得学校指示，参加长沙临时大学，授“高等几何”、“微积分”两课。

战事恶转，长沙不能守，学校奉命迁昆明。

我由香港乘船至海防（船名“广东”，仅八百吨，途中颠簸甚烈）换火车去昆明，同行者有北大蒋梦麟校长、江泽涵先生一家等，于 1938 年 1 月抵昆明。

联大数学系主任先后由江泽涵、杨武之先生担任。三校联合，教员不缺，所以我有机会开高深的课，如“李群”、“圆球几何学”、“外微分方程”等。我也曾同华罗庚先生、王竹溪先生合开“李群”讨论班。李群的理论后来在数学和物理上都有重大的发展和应用，我们总算在早期便有相当认识。

数学系有很多好的学生，不一一列举了。教授中最突出的为华罗庚与许宝騄。前一段三校图书都装在箱内，后来则中外交通隔绝，设备可说是很差的。但是若干人就可以抓到材料，工作不辍。我每年写论文，在国内外杂志发表。我把法国大数学家 E. 嘉当的工作，搞得很熟。后来这些成为近代数学主流之一。

有一个时期（大约有一年多）我同华罗庚、王信忠两位住同一房间。每人一床，一小书桌，一椅，一书架，摆满一个房间。早晨醒来便开玩笑，但是工作的情绪很高。

1939 年 7 月我同士宁结婚。次年她去上海生产。不料珍珠港事变爆发，她无法回昆明。我们到战后 1946 年 4 月才重新见面。我初次见我的儿子伯龙，他已 6 岁了。

1940 年起我重新过独身生活。我们一群单身教授租了唐继尧花园的戏台。我

的房间是一个包厢。记得住在戏台上的是陈福田、陈岱孙、朱自清、李继侗四位教授。

我应普林斯顿高级研究所邀请,前往访问。1943 年 7 月离开昆明,乘美国军用机经印度、非洲、南美洲去美。在印度作了些演讲后,于 8 月初抵美国迈阿密。

4. 致梅贻琦校长的信

此信写于1943年8月25日，特向清华大学梅贻琦校长报告到达美国普林斯顿高级研究所的经过以及研究的情况。转录自《清华大学史料选编》第三卷(上)，清华大学出版社，1994年。原信存清华大学档案。

月涵[①] 校长先生道鉴：生于七月十五日离昆，迄今已月余，谨将途中及到美后经过，择要略陈左右。到加尔各答后即往见该校数学教授 Levi 先生(印度学制与英国相同，每系只一教授)，氏系德籍犹太人，与汉堡若干人士，均曾相识，故一切甚顺利。在加共住两星期，计在加大讲演四次，题目为 Theory of Geometric Objects and the Method of Equivalence. 内容大都为年来工作结果。另在加城数学会讲演一次。加大设备甚好，足敷工作之用，如研究已有经验，尽可利用，实际上与在英美相差不多。讲演毕后，Hyclerabad、Madras、Allahabad 等校均有邀请，惜因飞机优先权事美方已有复电，不便多留，遂予婉却。大约印人心理颇愿与中国有若干来往，但希望为中印的关系，而非中英的。故我国科学家如能在印作较长之停留，亦是增进中印关系之一道。抵印之后，得见领事保既星先生，渠谓本年三月份起，美方军用机准搭载一般乘客(应持官员护照，但由路上经验，外国人亦有只持普通护照者)，不收费用，适在重庆时一樵先生曾代向外交部请求飞机优先权，遂请保先生电美询问，十日后得回电谓该优先权业已核准。同时核准者七人，秉权兄亦在内，当于8月1日与秉权兄同时赴卡拉基。5日离卡拉基，11日抵美，印美间全程计分四段，每段换机，候机时间视运输情形与优先权高下而定，但至多不过候二三日。秉权与生每站均不超过一天。途中前二段并不挤，第一段乘客只有我们二人，全程六日中飞行时间60余小时，候机10余小时，7夜只有2夜得睡，甚觉疲乏。14日抵此间，有段学复君招呼，一切顺适。Institute 中人在此者均已见过，Director Dr. Aydelotts, Veblen, Einstein, von Neumann, Morse 等态度均极好，创办此所宗旨，原在作纯粹研究，故无任何礼节，极为自由。所中数学部分有教授6人，副教授1人，助教若干人，其余短期在此者，称为 Member。所方拨研究室一间，甚为礼遇。第一日见 Aydelotts，即问

---

① 月涵为梅贻琦校长的字。

及在普林斯顿之计划，生谓希望能在此停留二年，因若认真工作，一年时间实觉太短，但因是中国人，此次又系受学校休假待遇出国，对国内有若干责任，不便停留过长时间。渠谓所中经济十分困难，此次能予帮助，亦是帮助中国之意。第二年继续帮助，大约无问题，不过须待若干时后，方能作正式决定。Veblen 先生谓美国数学家大都作战时工作，在学校任教者至少须授课十余小时。生情形不同，宜仍继续纯粹研究工作。渠对中国科学年来成绩，极为赞美，但仍希望继续进步。与其他各人所谈均属科学范围。虽在战时，渠等工作甚忙，仍有应接不暇之感。故生之计划，拟在此留至 1945 年夏间，学校休假只一年，明年拟请假一年，未识先生尊意若何。孟治先生已会见，渠尚未接校方通知，但 Allowance 允先拨付。金龙荪先生已去过很多地方，刻在纽约。秉权在华盛顿，闻有去支加哥[Chicago—编注]之意。余俟续陈。即请

道安

正之、武之先生均此

生陈省身　谨上

八月廿五日

5. 中央研究院三年

本文回忆了作者在1946年4月至1948年12月筹建中央研究院数学研究所的经过及其在人才培养方面所做的工作，介绍了当年该所的成员及他们后来的工作简况。原载《中国科技史料》第9卷第4期，1988年。

一、三年的经过

我于1943年7月从昆明西南联大去普林斯顿高级研究所工作。1945年夏抗战胜利，即决定于次年返国。接家中消息母亲病重，乃提前于秋间启程，乘火车至旧金山换船。不料行至洛杉矶接电悉母亲已病故。养育之恩，未能补报万一，伤痛不已。战后运输拥挤，得船不易。在美国西部候船三个多月，直至1946年3月中才从旧金山乘巴特勒将军号船去上海。

4月初抵上海，正值中央研究院复员。中研院在抗战期间即决定成立数学研究所。先设筹备处于昆明西南联大，由姜立夫先生任主任。姜先生聘兼任研究员若干人，不支薪水，我是其中之一。复员后决定：数学所筹备处设在上海岳阳路(即前法租界祁齐路)前日本自然科学研究所。当时中研院院长为朱家骅先生，总干事为萨本栋先生，实际主持院务。姜先生奉派赴美晋修。我便受任代理主任，负责筹备建所。协助我的有管理员梁国和先生，原在昆明工作。梁先生总理一切行政、财务、文书等工作，三年内数学所未有其他行政人员。我没有行政经验，一切事我们两人分做了，也不觉有增加事务人员的需要。

我觉得第一要务是培养新人。我函各著名大学的数学系，请他们推荐三年内毕业的最优秀的学生。应征者踊跃，不久我便有十多个活跃的年青助理员。这些人后来在数学上都有贡献(详见第三节)。我教他们代数拓扑，有时每周上12小时的课。所以大多数的人后来都以拓扑为专业。

中研院有好几个所在上海，大部在岳阳路，包括物理、化学、植物、生理等，其中生理和数学是筹备处。生理所由林可胜先生任主任，冯德培先生代理，情形和数学所相似。德培与我在院务会议中为少壮者，意见每多符合。

中研院因上海分院院址狭窄，决将数学、物理、化学三所迁往南京。觅址在九

华山,位于鸡鸣寺路院址之东。物理所先盖成,一部分由数学所暂用。我们于1948年初迁往南京九华山。

大约数学所是在那时成立的。事先朱家骅先生请萨本栋先生、吴有训先生(时任中央大学校长)同我谈,基于姜先生的推荐,请我任所长。我还是对数学的兴趣浓厚,不愿长任行政,未肯考虑。所以所长是姜先生,由我代理。大概我的计划,是想等姜先生回国后,再出国一些时候。我厌铺张,数学所成立没有任何仪式。

1948年中研院的大事,当是第一届院士选举。共选出81人,遍及各学科。鸡鸣寺前,前辈风范,回首当年,不禁神往。院士中年龄最大者为张元济先生,最幼者是我。两人都是嘉兴人(张先生籍海盐,曾属嘉兴府),可称巧合。

所中渐有高级的研究人员。陈建功先生曾在上海工作一年。在南京参加的有李华宗先生、胡世桢先生、王宪钟先生。李先生不幸于1949年谢世。胡、王两先生后来都当选为中研院院士。

九华山地僻人遥,是一个理想的研究环境,我很少进城。数学所的房子于1948年底落成,但从未用过,至今仍在。

二、再去美国

1948年秋南京还举行了许多学术会议(包括中研院第一次院士会议),盛况空前,一片歌舞升平的气象。我因忙于工作,未能深切了解时局的变化。10月底有一天忽接普林斯顿高级研究所所长R.奥本海默(即主持制造第一颗原子弹的物理学家)的电报,电文说:“如果我们可以做什么事便利你来美,请告知。”我开始读英文报纸,才知南京局面不能久。朋友们意见分歧。何去何从,在我讲是很明显的。只是两年多的心血辛苦,弃于一旦,离开南京时的情绪是悲凉的。

我们一家于1948年12月31日乘泛美机由上海飞美。

三、研究人员

但是三年的工作并未浪费。当时的青年研究人员都能坚守数学岗位,有的并有杰出的成就,列举如次:

1. 路见可　是第一位助理员,武汉大学毕业,惜不久即返武汉,现任武汉大学教授。

2. 吴文俊　上海交大毕业,早日即显示独立工作的能力。留法习拓扑,对纤维丛的拓扑有重要贡献。曾于1956年获国家科学一等奖。曾任中国数学会理事长。现在中国科学院系统研究所工作。

3. 陈杰　四川大学毕业。曾任内蒙古大学副校长。

4. 陈德璜　四川大学毕业。现在乌鲁木齐。南京别后，未再见德璜。

5. 周毓麟　上海大同大学毕业，曾留苏莫斯科大学。从拓扑改攻偏微分方程，甚有成绩。在北京大学训练了一批后起的偏微工作者。

6. 叶彦谦　浙江大学毕业，现在南京大学。对于常微分方程有广泛而深入的研究。他的工作有国际地位。

7. 曹锡华　浙江大学毕业，现在华东师范大学。专攻代数。他把华东师大的数学系建立为国内的一个数学中心。

8. 马良　中央大学毕业，后在清华，已去世。记得马良书讲得好。

9. 贺锡璋　浙江大学毕业。锡璋有才，英年早逝为惜。

10. 张素诚　浙江大学毕业，后去英国牛津大学随名师 H. 怀特海工作。在同伦论方面有重要贡献。现在科学院数学所。

11. 孙以丰　浙江大学毕业。能精思，现在吉林大学。

12. 林铣　浙江大学毕业。晚年致力于微积分的基础。现在浙大。

13. 廖山涛　西南联大毕业。山涛对拓扑有深刻的了解。赴美获芝加哥大学博士，返回后任北京大学教授。于 1986 年获第三世界科学院数学奖。1987 年获国家科学一等奖。

14. 杨忠道　浙江大学毕业，美国图兰大学博士。对拓扑的几何应用及变换群论贡献丰富。现任美国宾州大学教授，曾任系主任。

15. 陈国才　西南联大毕业。他的拓扑工作富创造性。曾任伊利诺斯大学教授多年，不幸于两年前去世。

6. 致朱家骅的信

此信写于 1947 年 3 月 7 日。作者时任中央研究院数学研究所代理所长，曾邀请著名数学家 H. 外尔访问中国。外尔因故不能成行，有信回复陈省身，现附于此。这两信现存中国第二历史档案馆。此处根据李旭辉提供的复印件重排，编者加上标点。外尔的信由王善平译成中文。

骝先[①] 先生道鉴：

接奉三月五日　手示。敬悉数学所将于本年七月正式成立并承嘱于立夫先生未返国期间代理所长职务。才轻任重，不胜惭惧。省身上念　先生之知遇，下念本所发展之重要，兼以立夫先生明夏当可返国，代理期间不过一载。思维再四，不敢言辞。惟自入清华以来，前后已十有七载，半生学术生活始终与清华相联系。关系之深，实在情感。敢乞先与月涵先生商酌，得其同意，庶将来所务稍有头绪，仍可返校执教。既符我院与大学合作之宗旨，复偿省身报答清华培植之深情。于公于私，似可两全。谅荷　先生之同情。至于美国大学约聘执教，起于去年夏间。所允待遇足敷携全眷赴美。当以返国未久，期于我国科学前途有所献替，婉言辞谢。但接洽信件始终未断。旅美三载，知友遍该国学术界，情意实感难却。倘时机适当，仍愿赴彼作一二年之讲授，期得工作上切磋之益。因　手书及此，附陈素愿。幸　辱教之。专此敬请

崇安

后学　陈省身谨上

三月七日

① 朱家骅(1892～1963)，字骝先。浙江湖州人。当时任国民党政府的教育部部长兼中央研究院院长。

附：外尔 1947 年 2 月 15 日给陈省身的信

亲爱的陈：

您如此费心尽力安排我访问中国，所以我最终决定至少今年不接受邀请一定让您失望了，特别是我曾写信给您表示原则上——但有所保留——准备接受邀请。中央研究院院长 9 月来的电报不很明确，所以我等着一封更明确的信。这让您于 10 月 23 日写来一封极为亲切的信并让研究院的秘书花了两个多月安排我的旅行，真是遗憾。我是在快要年底的时候收到这些东西的。钱还没有汇来，我将根据您的指示处置它。当然我向一些人了解了中国的一般情况和正在发生的事件：我向段[学复]打听，与在普林斯顿和其他地方的中国数学家交谈，并询问了中华医学会的 Loucks 医生——他与北平协和医学院已有 20 多年关系，是中国真正的朋友，最近刚回来。

我认为不能否认的是，自从您开始安排我 1947～1948 年访问中国一事以来，中国的经济与政治形势恶化了。那时冲突的各方有和解的希望，但现在裂缝加大，并且经济危机和军费浩大的内战拖累了国家的重建。这样的事态发展当然让我踌躇。在正遭受苦难的朋友中间相对富足地生活着，这样的想法并不令人愉快。我认为今年来访的时机是不成熟的。

另外还有一些不能忽视的个人原因使我难以现在接受邀请。其中之一是，我的医生不赞成我进行这次旅行，他认为最好再过一段时间。但是多讲这些没什么意义。因为实际使我最终做出决定并且别无选择的，是由于我妻子将至少在今后的几个月内不能照顾我。

我们这几天被告知，她必须要动一个大手术。她明确地要我向您转达她的最良好的问候。请不要把这最后一件事告诉别人，但我想您应该知道我做决定的最终原因。姜[立夫]——他始终待我极其友好——也知道这件事。他认为这只是推迟我对中国的访问。但很清楚中国科学院没有任何义务以后重发邀请。

同时我想在这个国家里对中国的数学和数学家有所帮助。我将过问有关天文学家的事。如果华[罗庚]可以在[普林斯顿]研究所再呆一年我们会很高兴。西格尔很可能几星期后从格丁根回来。

我祈祷使我不能接受您们非常友好的邀请的那些情况都只是暂时的。愿中国很快就会找到办法摆脱目前的严重困难！我不放弃这样的希望，有一天我会在您的国家和您见面。

向您和您的家庭致以最美好的祝愿并致最诚挚的谢意

永远是您的

赫尔曼·外尔

（签名）

7. 学算四十年

原载《传记文学》第 5 卷第 5 期，台北，1964 年。

在国外一住十几年，每天与同行者切磋，乐而不疲，不觉象牙之塔的寂寥与讽刺。这次回国，得与戚友家人小聚，引起了半生的回忆，真如一梦。一生有幸，得与许多当代中外数学大师，有或深或浅的交谊。在数学渐受社会重视的今日，有些史实，或者是大家所乐闻的。

我是 1911 年 10 月 28 日生在浙江嘉兴。幼时因为祖母钟爱，一直不上学。家中有时请先生来教，但并不是长期的。我最初期的国文，是一位未出嫁的姑母教的。我父亲游宦在外。记得有一次他回家过年，教了我阿拉伯字母及四则算法。家里有一部“笔算数学”上中下三册，他走后我自己做里边的题目。题目很多，我想除了一些最难的，我大多会做。我以为这种题目别的小孩一定也都会的，根本没有告诉人。

等到 1919 年秋天，祖母觉得我实在不该不上学了，就把我送到县立小学，大约是插入小学四年级。三、四年级在同一教室，共有约 30 个学生。第一天家里送午饭在教室吃，同学都走光了，独自吃饭，觉得很凄凉。等到 4 点钟下班前，不知道为了什么，教员拿了戒尺，下来把每一学生打一下到四下不等，只有我未被打，大约我这一天实在老实，没有被打的理由。

这样一来，我不肯再去学校了。在家又玩了一年。次年(1920)去投考教会办的秀州中学高级小学一年级。那时我的国文程度是中等，但是做过笔算数学的习题的人，应付数学考试，自觉裕如，所以就考入了秀州。

1922 年秋天，我父亲在天津法院任事，决定把全家搬到天津。我们住在天津的河北区，附近有交通部办的“扶轮中学”。冬天就插班入扶轮中学一年级。现在在中央党部任职的詹纯鑑兄，和我在扶轮同班。我们在 1926 年中学毕业后，直到今年(1964)才再见。

我在扶轮的一级，是所谓“旧制”的四年毕业。毕业前一年，我父亲的朋友钱宝琮(琢如)先生来南开大学任教授。钱先生专治中国算学史，在这方面是很有创见的。他一人住在南开，有时来我家，就谈到我的升学问题，进南开就成为可能性之一。

扶轮的同学大部分为铁路员工子弟,大多是预备毕业后谋铁路工作的。因此升学的对象不外是南洋大学、唐山和北京交大。因为同学的影响,我的第一志愿是唐山大学。

但是当时有两件事情,影响我升学的选择。第一是当时华北的政治军事局面不安定,连北京到沈阳的铁路干线都时断时通,投考须遇交通困难。第二是我祖母在那年(1926)夏天去世,家中正办丧事。

结果我留在天津,投考了南开和北洋大学。因为只上过四年中学,北洋只准我考预科,南开却许我考本科,等于跳了两班。这自然对我后来之进南开,有很大的关系。

考南开怕是躁进,因为我的准备不足。数学的主要科目是解析几何,我根本没有学过。我在扶轮所读的物理化学也不够。家中正遭祖母丧事,乱得不堪,但是竟考取了。事后钱琢如先生告诉我说我的数学考试是第二名。每逢考试我的数学是王牌,它总是把我的平均分数拉上去。

南开理学院分数学、物理、化学、生物四系,分由姜立夫、饶树人、邱宗岳、李继侗四先生主持。那些系差不多都是"一人系",除他们四位外教授很少。父亲同我都不知道有些什么东西可读,也不知道毕业后有什么事好做。不过觉得物理似较切实,所以入学时倾向于进物理系。

因为实际上跳了两班,初进大学时是有些困难的。我选了一门定性分析,是邱宗岳先生教的,助教是赵克捷先生,外号赵老虎,以严厉著名。我第一次上化学实验,被指定一个柜子,内有些化学仪器。同时接到一个单子,上有这些仪器的英文名字。我们第一件事是对照所得仪器是否完全。我的实验经验,差不多是没有的,根本不知道单上名词与柜中仪器的对应关系。当天指定的工作是吹玻璃管,我自然弄不好。幸亏化学系有一位职员在试验室,在将结束实验前代我吹成了一些。我拿着玻璃管觉得还很热,就用冷水一冲,于是前功尽弃。

回来想了几天,觉得无论如何化学是读不下去了。结果退选化学,改选一门初等力学。当时南开第三年才分系,不过我因为不愿读化学,所以在理学院只剩数学系可进。

那年姜立夫先生请假去厦门大学,数学系只有钱先生一人。我的微积分、力学都是钱先生教的。另外选了国文、英文、物理三课。物理是饶树人先生教的。饶先生学贯中西,但是物理学牵涉太多,我读不好。惟每跟数学有关,我就没有困难。因此对于物理的基本概念,虽然没有读懂,及格是没有问题的。

一年级的生活,对我是很舒服的。微积分、力学两课,只要做些习题。国、英文则读不读对于成绩不发生太多影响。物理只有一堂实验,费些工夫,对于它的内容,无意求深切了解。我做实验,只作几个基本度量,余时只凑答数,所以结束得很快。但藉此倒可了解一些课程的内容。

在台北时有一位记者先生问我如何决定读数学的。我说中英文都不好，又不会做实验，就只好读数学了。这个答案实相当近真。现在想来，我的读书路线，实在是早就确定的。比之多才多艺的人，我的选择问题，较为简单，一生受此益处不浅。

那一年的时间，用于看小说杂书者不少；也时常替人作文。我的中英文虽然都不好，但还有不如我的人。我动笔很快，一写两三篇，把最好的一篇留给自己，其他的送人。但有时人家反比我得更好的分数。一年级时我的朋友大都是成绩不顶好的，我时常替他们做种种的作业，以消磨时间。

1927年我升入二年级，我的读书生活与态度有很大的改变。那年姜立夫先生回南开。姜先生在人格上道德上是近代的一个圣人（记得胡适之先生在独立评论的一篇文章上也曾如此说过）。他态度严正，循循善诱，使人感觉到读数学有无限的兴趣与前途。南开数学系在他主持下图书渐丰，我也渐渐自己能找书看。

另一个至少受同样影响的人，是同级友吴大任（大猷的堂弟）。大任是绝顶聪明的人。他在南开中学毕业，得四年奖学金免考升入大学。他什么功课都好。第一年由南开中学升大学的人，常互相聚在一起，我同他们较少接触机会。但从二年级起直到毕业，我同大任几乎形影不离。大猷比我们高一班，人比我们成熟，所以虽然同班上一些课，而也很相熟，但在一起的机会，没有这样多。

1927年左右的中国数学界是很贫弱的。那时北方北京大学有冯祖荀（汉叔）先生，南方则东南大学有留法前辈何鲁、段调元、熊庆来各位先生。中国人以数学为主科在国外得博士学位的只有胡明复、姜立夫二先生（均在哈佛）。明复先生对组织中国科学社及编印“科学”杂志功劳甚大。可惜他回国不久，就去世了，对于发展中国数学，不能有更大的贡献。他的论文和俞大维先生关于数理逻辑的论文，似是中国人在国外主要数学杂志上最早发表的文章。

南开的数学系那时以脚踏实地见长。姜先生教书是极认真的，每课必留习题，每题必经评阅。在我进南开前，他所训练的学生刘晋军、江泽涵那时都在哈佛读书，申又枨则留校任教员。可说新的一代渐渐崛起。

在那段时期，吴大任同我是数学系最好的学生。姜先生很高兴，开了许多在当时认为高深的课，如线性代数、复变函数论、微分几何、非欧几何等等。我的基本数学训练都是姜先生口授的。我性喜浏览，等到1930年毕业时还读过若干杂志上的论文。段茂澜先生教我德文和法文，都达到了能读数学书的程度。

这几年清华因改为大学而突飞猛进。1930年我在南开毕业那年，清华决定办研究院。我看清楚要深造必须出国留学，但家里不能供给我，所以必须要找公费。清华偶然招公费生，但并不每年举行，名额中也不一定有数学。清华研究院规定，毕业后成绩优秀者可派送留学。所以大任与我经多次商讨后都去投考清华。

我去清华的另一个目的，是想跟孙光远先生做点研究。孙先生南京高等师范

毕业，芝加哥大学博士，专攻“投影微分几何学”。他是当时中国数学家中唯一在国外杂志发表论文的；也是第一个中国数学家，在博士论文后继续写研究论文的。在他的指导下，我在1932年《清华理科报告》发表第一篇研究论文。以后又继续写了两篇这方面的论文，都发表在日本《东北数学杂志》。

大任同我都考取了清华研究院。但他因家庭关系，改就广州中山大学助教。清华数学系因为只有我一个研究生，决定延办研究院，改聘我为助教，所以我到1931年才做研究生。因为是第一年考取的，我的学号是零零二，有时成为朋友们的谈话资料，其实学号是照姓名英文拼法的字母排的，并无其他含义。

清华渐成国内最高学府之一，尤以理学院为然。数学系教授有熊庆来、孙光远、杨武之及我后来的岳父郑桐荪先生，教员有周鸿经、唐培经先生。学生很多优秀者，如庄圻泰、许宝騄、柯召、徐贤修诸位。

孙光远先生率直天真，相处甚欢。我用许多时间读投影微分几何的论文，可惜那只是数学的一旁支。投微的研究当时已到结束阶段，我渐觉它的肤浅。但是后来在这方面又写了几篇论文，都是难题目做不出时用来调剂心情的结果。那时国内的数学界渐渐注重研究，但实在还没有人了解研究的主流所在。

那时清华数学系最引人注意的人物，当数华罗庚。罗庚江苏金坛人，和培经同乡。

罗庚初中毕业后辍学在家，就自修数学，因为同乡关系，他同培经通信，质询数学问题。有一期学艺杂志上一位先生“证明”五次方程式可解，编者竟登载了。罗庚能把错误找出，因此数学系决聘他为图书管理员。他1931年来清华，办公桌放在系主任熊先生办公室外面，不久就成了系里的中心人物。罗庚是一个十分活跃的人，凡学术讨论，系内人事，他无不参与。他是确有数学天才的，每天工作十几小时，所以短期内便有文章在国外杂志发表。他的腿因幼时患伤寒症而跛，又因没有上过大学，和大家出身不同，以致有高度的不安全感。他在数论、代数、多元复变函数论，都有重要的贡献。关于他的故事很多。记得有一次他的一篇文章，经某德国杂志接受，他站在科学馆前，逢人握手，告此喜信。

1932年胡坤升(旭之)先生来任专任讲师。胡先生专长变分学，他在芝加哥大学的博士论文是一篇难得的好论文。旭之先生沉默寡言，学问渊博，而名誉不及他的成就。他不久改任中央大学教授，近闻已作古人，深念这个不求闻达的纯粹学者。

这个时期，有些国外学者来华访问，数学家有哈佛的G.伯克霍夫及W.布拉施克先生。布氏是德国汉堡大学教授，有名的几何学家。他做了一组演讲，题目是“微分几何的拓扑问题”。演讲的内容深入浅出，大开眼界，使我深切考虑到去汉堡读书。

在清华四年(1930至1934年)读书不太紧张，但亦未太荒废时间。自然多读了

些书，也学会了写投影微分几何的文章。那段时期确定了微分几何为自己研究的方向。微分几何的出发点是微积分在几何学上的应用，有三百多年的历史。自从爱因斯坦的广义相对论以后，大家想从几何里找物理的模型，不少几何学家在那里工作，可惜至今成就不大。

微分几何的正确方向是所谓"大型微分几何"，即研究微分流形上的几何性质。它与拓扑学有密切关系，其系统研究，那时刚才开始。这是在清华时始终憧憬着的方向，但未曾入门。那时候的心情，是远望着一座美丽的高山，还不知如何可以攀登。

1930 年以后，国内数学界有长足的进步。许多在国外留学而有成就的学生回国了。北大有江泽涵、申又枨先生，浙大有陈建功、苏步青先生，其他如中央、中山、武汉等数学系标准都提高了。尤其浙大在陈、苏二先生主持下，学生甚多，工作极勤。可惜他们采取的态度，可名为"学徒制"，学生继续做先生的问题，少有青出于蓝的机会。要使科学发展，必须要给工作者以自由，这是值得深长思的。

1934 年夏我毕业于清华研究院，得到两年公费的机会。清华公费普通是留美，但我得到准许，留德去汉堡大学。汉大是第一次大战后才成立的，但数学系已很有名。那年希特勒获得政权，驱逐犹太教授，德国的老大学如格丁根、柏林等都闹学潮。汉堡数学系幸而比较局面安静而工作活跃，不失为数学家理想的去处。

汉大数学教授除布拉施克外，尚有 E.阿廷、E.赫克两人，其中尤以阿廷氏最为突出。他是近代抽象代数开创者之一。但他的兴趣及于整个数学。他的演讲与论文，都是组织严密，曲折不穷。难懂的理论，经他整理，都变成自然。他 20 多岁即任正教授，为人随和，看起来像学生。

我 9 月到汉堡，学校 11 月才开学，10 月初布先生度假归来，给我他所新写的几篇论文。我不到开学，就找出他一篇论文里一个漏洞。他很高兴，叫我想法补正，我也居然做到了，结果写成在汉堡的第一篇论文。德国大学制度，博士学位的主要条件是论文，指导的教授差不多可以完全决定学位的授予。我总算初见就给布先生一个好的印象。

汉堡立刻成了中国学数学者的圣地。姜立夫先生那年恰好休假，来了汉堡。其他有曾炯之、程毓淮、周炜良等。曾、程二兄已在格丁根得了博士。炯之是女数学家 E.诺特的学生。他的论文是有名的"曾氏定理"，在代数几何中是一个有基本性的贡献。炯之为人直爽诚恳，没有人不喜欢他，不幸在抗战时死于四川西昌。诺特先生是抽象代数领导人之一，大家公认为女性中最伟大的数学家，放在男性数学家中也绝对是第一流的。

1935 年来汉堡的有吴大任。他考取第一届留英公费，从伦敦大学转来汉堡。张禾瑞、袁炳南、金再鑫等也陆续而来。大任的夫人陈鹀亦习数学。布先生时常旅行，数学上同我接触最多的是 E.凯勒博士。凯勒先生那时刚完成他的一篇论文，

后来称为"凯勒空间"的即此论文之发现。他是布先生的助教,他学问渊博,态度谦和,工作上正在突进的时期。他写了一本小书"微分方程组论",发挥法国大数学家E.嘉当的理论。书中的基本定理,后来称为嘉当-凯勒定理,凯勒先生领导一讨论班,共读他的书。但是这理论太复杂了,凯先生又不善于讲书,结果如一般讨论班的命运,参加者愈来愈少。我则"抗战到底",所以也许是最受益处的人。

从此讨论班我逐渐认识嘉当的伟大数学天才。嘉当先生的论文以难读出名。我渐渐习惯于他的想法,觉得实在是最自然的。我的博士论文是嘉当方法在微分几何上的应用,是一篇脚踏实地的工作,但无惊人之处。我的论文 1935 年秋天就完成了,因为等布先生返德,1936 年初才正式得学位。

周炜良先生因为后来的周太太是汉堡人,所以虽在莱比锡大学注册,几乎常常住在汉堡。他 1936 年夏天得博士。他的论文的内容,后来在代数几何中称为"周氏坐标",是一个重要的成绩。

从现在的标准讲,汉堡是一个规模不大的中心。但它有第一流的领导者,因之有优秀的学生。两年在汉堡的留学生活,就我讲是很愉快的。

1936 年夏我的公费期满,就接到清华与北大的聘约。我却决定去巴黎随嘉当先生工作一年。那年得到中华文化基金会的补助。这于我在数学研究发展上确是有决定性的一年。嘉当先生不但是一个伟大的数学家,他为人和蔼随便,也是最好的教员。他是巴黎大学的几何学教授,学生众多,在他办公时间,候见的要排队。幸亏过了两个月,他允许我到家里去看他。我每两星期去他家里一次,回来的第二天往往接到他的长信,继续表示前一天所讨论的问题的意见。在巴黎 10 个月,工作异常紧张,所得益处,不限于那时的文章所能表现者。

1937 年夏离法经美返国,去清华任教授。不幸未离巴黎,卢沟桥事变已爆发。行程虽未改变,心情不免沉重。归国后经香港、长沙,而至昆明,在西南联大 6 年,抗战生活,不在本文叙述范围之内。所可说者,我身边带了一批嘉当及其他数学家的论文复印本,所以虽在播迁,工作不全辍废。而学校在战时不正常,反给我更多的时间,可以从事工作,研究论文仍旧继续发表。我当时在国内跻列群贤中,被看作数得上的数学家,即在国际,亦渐为若干人所知。但对于工作成就,衷心深感不满,不愿从此默默下去。

我 1943 年由昆明去普林斯顿是一生的大决定。那时大战方酣,中美交通困难。一个可能的路线是从昆明飞印度,再坐船经好望角泛大西洋赴美。想到德国潜水艇的活跃,这条路线自然有相当危险。但我决心赴美,不顾一切困难。维布伦先生欣赏我的工作,给我弄到经济援助。结果我于 7 月中坐军用机,用了 7 天工夫,经印度、非洲、南美洲,至迈阿密。

到普林斯顿后立刻做了一个确是极重要的工作,就是所谓高斯-博内公式的新证明。两年工夫发表了几篇在微分几何学方面精心独诣的文章。所谓"陈氏特征

类”(Chern characteristic classes)等都是那时候做的。当代最伟大的几何学家 H.霍普夫先生评论我的一篇论文时说“微分几何进入一新时代了”。

战后于 1946 年春返国,奉命组织中央研究院的数学研究所。数学所名义上由姜立夫先生任所长。但姜先生只在南京几个月。从 1946 年到 1948 年,一切计划都是由我主持的。我的政策是“训练新人”。我收罗大批新毕业的大学生,每周上 12 小时的课,引他们入近代数学之堂奥。所中研究员有胡世桢、王宪钟、李华宗等先生,助理员甚多,后来有特殊成就的,有吴文俊、杨忠道、陈国才、廖山涛、张素诚等。我很高兴,现在的数学所,仍旧继续着这个提携新进的政策。

在结束本文之前,不觉有两点感想。第一,平生中外师友,有不少比我能力高的,结果成就或不如我。我得力于吾国两句平常成语自励,即“日新日日新”的精神和登峰造极的追求。问题选重要的做,虽大多无成,失败远多于成功,而所得已稍足自慰。杨武之先生赠诗谓“独步遥登百丈楼”。誉不敢承,然论为学态度,则知己深谛我心也。

第二,香港中文大学有一位英国先生跟我说,你们中国还没有自己训练成的第一流科学家。李济之先生也说过,科学在中国没有生根,我都有同感。其实中国训练成的第二、三流科学家有几人？日本汤川教授在做成介子(meson)的工作以前,没有离开过日本。相形之下,当知努力所在了。

8. 学算六十年

此文原在《南开周报》1986年10月13日、20日连载。1999年补写两节，即文中的(九)(十)。

我于1926年秋入天津南开大学。时光如驶，今年已60年。爰略记平生学历经历如次。

一、南开清华时期(1926～1934)

我于1911年10月28日生于浙江嘉兴。1922年秋家迁天津，遂于次年初插班入扶轮中学旧制一年级。扶轮是铁道部办的，经费充裕，有优良的教员。校长顾赞庭先生亲自教几何课。其他数学老师，有郑次纯、彭罕三先生等。

在扶轮毕业的前一年，钱宝琮先生来南开任教授。钱先生是有名的中国数学史家，嘉兴人，是父亲的同学。他看见我读的数学课本有霍尔和奈特的高等代数，便说"这先生是考究的"。钱先生说起，可以同等学力资格，直接投考南开大学一年级。

等到1926年从扶轮毕业，军阀内战，出入天津的火车不通，我便投考了北洋大学预科及南开本科。后者跳了两年，备考并不简单。现在只记得数学要考解析几何，在扶轮没有学过(扶轮旧制的数学只到三角)。借了一本杨和摩根的书，自己看了三星期。事后钱先生跟我说，考得不坏。

进南开自然读理科。将来做什么，那时是不想的。那时南开的理科都是一人系；每系只有一个教授。数学系教授是姜立夫先生。因为姜先生去了厦门大学，钱先生是来代课的。姜先生1927年回南开，我读了许多他的课，如复变函数、高等代数(即线性代数)、微分几何、非欧几何等等。姜先生讲解清楚，教书认真，三年中得益匪浅。但我入数学系更主要的原因，是不会动手做试验，实际上在理科无他系可入了。1928年伯苓校长的长公子希陆先生来校任第二个数学教授。南开在当时的数学藏书，在全国是首屈一指的。我喜欢浏览，许多名著都曾开卷。1930年毕业时我能读德法文书籍，对于美国的文献比较熟习。对数学有些看法。现在回想，一切都很肤浅幼稚的。

南开数学系同班5人：刘君素(女)、刘学信、胡镕、吴大任及我。和学信同屋多年，无话不谈。大任读书成绩优异，我们常在一起。

我认清，要进步必须要出国。那时出国的机会是极少。刚巧那年清华开始办研究院，三年毕业后授硕士学位，成绩优异者可派送出国两年。大任同我都投考了，也都录取了。但大任决定去广州中山大学任助教。待1930年秋季我去清华报到时，才知道数学系决定把研究院迟办一年，聘我为助教。

清华经费充裕，一片兴旺气象。数学系主任是熊庆来先生，教授有孙光远先生，杨武之先生，及我后来的岳父郑桐荪先生。我决定同孙先生习投影微分几何。1930～1934年间，写了三篇论文，一载《清华理科报告》，其他二文载日本《东北大学数学杂志》，其中有一篇是我的硕士论文。

清华那几年的数学人才是很盛的。华罗庚于1932年来任助理。本科生有许宝騄、柯召、徐贤修、段学复等。

我于1934年夏完成硕士学位。学校决定资助我出国两年。我得学校同意，去德国汉堡大学。

二、德法两国留学时期(1934～1937)

我去汉堡是要跟W.布拉施克教授工作。布教授于1932年来北平演讲，讲的是网络几何(Geometry of webs)，我听得懂。我也看过一些他的其他的工作，都有新见。他是当时德国最领头的几何学家。19世纪德国的数学领导全欧(也就是领导全世界，因为其他洲实不足道)。20世纪初年此势未衰。尤其格丁根有希尔伯特，为数学圣地。但1933年德国希特勒上台，格丁根驱逐犹太教授，闹了学潮。汉堡是世界大战后新成立的大学，数学教授除布先生外，还有阿廷和赫克，均极负时望，便成为新的数学中心。

我于1934年9月到汉堡，学校11月上课，中间读了一个月的德文(我在南开曾读过两年德文，能读数学书刊)。10月布先生假毕返校，我去看他，他给了我一堆他新写的论文复印本。我发现其中一篇证明不全，他听了很高兴。一个月后我把证明补齐，并推广了他的结果，成一文在汉堡数学杂志发表，总算立刻确定了我在汉堡的地位。

我于1935年底完成博士论文，学校于1936年2月正式授我博士学位。

1936～1937年我得中华文化基金会的资助，可继续在国外一年(清华公费限定两年)。我便与布先生商量，决定去巴黎随E.嘉当工作一年。

嘉当是当时公认的最伟大的微分几何学家。相认不久，他允我到他家中讨论。我平均每两星期去他家一次。一年中工作紧张，而获益甚大。1937年夏离去时，自信对微分几何有了相当深刻的了解。

三、西南联大(1937~1943)

1937年7月我由法乘船去纽约,经横贯铁路至温哥华,乘加拿大船至上海。我返国前已应聘为清华大学教授。时中日战争已发生,学校迁长沙,与北京大学、南开大学合成长沙临时大学,在圣经书院上课。一学期后长沙已成前线,学校迁昆明,成为“西南联合大学”。我们一部分教授经广州、香港、安南而达昆明。

我1938年1月抵昆明,与联大常务委员蒋梦麟先生同行。西南联大集三校的精英,对年轻学子有重大的吸引力,致人才辈出,在中国教育史上,成为光荣的一章。

联大数学系人才甚盛。南开姜立夫先生曾培养许多杰出的数学家,是当时中国数学界的领袖。北大江泽涵先生即是他的学生之一。江先生是第一个把代数拓扑引入中国的人。他的学生包括现在北京大学教授姜伯驹(立夫先生的长公子)。清华的系主任是杨武之先生(杨振宁的父亲),杨先生专长数论与代数,对于华罗庚初期的数学发展,有很多的帮忙。罗庚最早的论文,不少篇关于堆垒数论,杨先生的博士论文,即在此方面。

联大年轻教授中最突出者有许宝騄与华罗庚,两人都出身清华。宝騄专攻统计,由于他的深邃的数学基础,论文精辟。罗庚事业心强,用功非常人可及。他的数学研究范围甚广,扬名国内外。那时数学系有相当的研究风气,例如,物理系的王竹溪教授、罗庚同我于1939年合开一个“李群”讨论班,在国内外都是先进的。自然那时国内外消息难通,文献奇缺。我深信数学研究设备不是一个最重要的因素。

我的研究不断。在联大6年,写了十多篇论文,范围及于不同的方面。我也开了好几个高深的课。

我的学生有王宪钟、严志达、吴光磊等。宪钟后来对数学有许多开创性的贡献。志达对李群的拓扑的工作是一个里程碑。

四、普林斯顿高级研究所(1943~1945)

美国普林斯顿的高级研究所是一个私人创立的研究机构。创办时即以数学为主要项目。初聘的教授有爱因斯坦、外尔等。人才汇集,不多年便代格丁根而成为国际数学的中心。数学方面的主持者是有名的几何学家维布伦教授。在巴黎时即因工作关系,曾经通信。回中国后我们继续通信,自然谈到我访美的可能性。1942年初该研究院正式邀我去访问。

那时大战方酣,但由昆明去美仍是可能的。我得乘美国军用机经印度、中非

洲、南大西洋、巴西,历时一星期于1943年8月抵迈阿密。

普林斯顿在战时大部分科学家参加了战争工作,相当清静。但仍有许多可谈的人,兹不列举。到后两月,即完成了高斯-博内公式的证明。这可能是我一生最得意的文章。霍普夫曾说:“这是微分几何最重要和困难的问题。”我的证明有新见,解决了技术上的困难,并开创许多新发展。这在科学研究是难得的。(所谓“文章千古事,得失寸心知”。)

美国的数学当时集中在东部,普林斯顿尤为国际数学家荟萃之处。在普两年认识了很多数学家。高级研究所不收学生,尊重研究,对于数学的交流,贡献甚大。

1945年夏第二次世界大战结束,西南联大三校各归故园,我便准备返国,回清华任教。

我于1945年底离普林斯顿,经芝加哥、洛杉矶,到旧金山候船。战后运输拥挤,三月中才得船,于四月初回到上海。

五、中央研究院数学研究所(1946~1948)

早在昆明的时候中央研究院即有设立数学研究所的计划,聘姜立夫先生为筹备处主任。姜先生聘我为兼任研究员。战后复员,筹备处指定在上海工作,地点在岳阳路原来日本人所办的“自然科学研究所”。姜先生1946年去美,创所工作便落在我的身上。

我着重于“训练新人”。最初一批研究人员,大多是大学新毕业的学生。我每周讲12小时的课,授“拓扑学”(拓扑译名即是那时起的)。由此培养了一批新的拓扑人才,如吴文俊、廖山涛、陈国才、张素诚、杨忠道、陈杰、孙以丰、马良、林铣等。我也鼓励有些人从事其他方面,如周毓麟、叶彦谦、曹锡华等。第一年资深的研究员有陈建功先生。

1948年研究所迁南京九华山,并建新楼,也正式成立。新任的研究员有胡世桢、李华宗,并聘了王宪钟。姜先生也从美国回来任所长。

该年秋中央研究院举行第一届院士选举,膺选者81人。我是最年轻的。

有一天忽接普林斯顿高级研究所所长奥本海默的电报说:“如果我们可以做什么事便利你来美,请告知。”我两年来忙于所事,没有注意国内政情的变化。翻阅一下英文报纸,很快就了解南京的局面不能长久,便作去美的计划。

我们一家四人于1948年12月31日乘泛美机离上海,经东京、关岛、中途岛、檀香山,于1949年1月1日抵旧金山。

六、芝加哥大学(1949~1960)

我于1949年1月底抵普林斯顿高级研究所。虽宾至如归,而西望故国,归去

无日，感慨万千，唯藉工作以忘情。现在有了家室，需要一个长期的职业，便应芝加哥大学之聘为教授。

芝加哥大学由石油大王洛克菲勒创办，经费充裕，注重研究，是美国第一流的大学。她的数学系产生了美国初期好几个领袖的数学家，尤负盛名。当时的物理系有费米教授，是物理学的圣地。我 1949 年夏间就任，杨振宁、李政道都在那里。

系中最有名的教授，当是法国人韦伊。我们是多年老友，重聚切磋为乐。芝大有很多优秀的研究生，后来遍布美国数学界。

1950 年夏国际数学家大会在美国坎布里奇的哈佛大学集会，我被邀作 1 小时的演讲。这是第二次世界大战后的首次会议，显见世界数学的变化：重心由西欧移到美国，领导人物也大大地年轻化。许多数学观念，战前是不存在的。

在芝大十一年，多次到他校或他研究所作几个月的访问，如哈佛大学、麻省理工大学，巴黎、汉堡、瑞士等。在我的指导下完成博士学位的有 10 人。

芝大是一个开明的学校，人才荟萃，思想前进。惜地处城内，学校附近的治安，不如理想。网罗及保留杰出的教员，均渐感困难。

七、伯克利加州大学(1960～　　)

伯克利加大的数学系，由 G.C. 埃文斯主持多年，能维持最高的标准。他们感到系内几何内容的缺陷，埃文斯退休后，便多次邀我。

我去加大的原因有二：一是加大正在发展阶段，可以聚一些几何学家；二是加州的天气与环境。当然空运发达，加州不再孤立，也是一个重要的因素。

几年的努力，确使加大成为一个几何和拓扑的中心。我的学生很多，完成博士学位的有 31 人。

1961 年我当选美国全国科学院院士。这事有一段插曲：院士须是公民，我的公民资格虽已通过，但迟迟未去宣誓。当选有些迹兆，所以赶紧去宣誓，两者相距不到一个月。

我在国际数学家大会又作了两次演讲：一次半小时，在苏格兰爱丁堡，1958 年。一次一小时，在法国尼斯，1970 年。

1979 年我从加大退休，学校举行了一个学术会议，历时一周，出席者三百余人，许多重要的几何学家都来了。我续教到 1984 年。

八、美国数学研究所(1981～　　)

第二次大战后美国政府的科学经费激增。创办数学研究所的计划，时常有人提出。但聚讼纷纭，竞争激烈，迄无成议。1981 年国家基金会宣布在伯克利成立数

学研究所是二十多年争论的结果。我受任所长。

这在美国也是创举。我们没有永久性的研究员,因为政府经费随时可因政策改变而切断。我们的活动集中在某些专题,逐年轮流。对于促进研究,起了作用,赢得数学界的赞赏和支持。我于 1984 年退休,由芝加哥大学教授 I. 卡普兰斯基继任。

九、南开数学研究所(1984 ~ 1992)

天津南开大学胡国定教授请我帮助南开的数学。南开是我的母校,我自然很高兴。我们于 1984 年成立南开数学研究所,得到教育部的强力支持。经过 15 年的努力,有了一些值得报导的成绩。

我们的目的,要在国内成立一个基地,培养第一流的数学人才。那基地须有优良的设备,友善的空气,使人工作其中,觉得快乐。南开已有好几个有国际水平的年青数学家。在国内它已是一个数学中心。希望 20 年后可成为国际中心之一。可惜我不会看见了。

"一朝数学大国日,家祭无忘告乃翁。"

十、晚年生活

一辈子弄了数学,别的多不会了,晚年尤甚,只是精力差些。但我无意做热闹的问题。集中在两方面: 1) 芬斯勒几何;2) 复投影几何。

两个都是很有前途的方向。所谓芬斯勒几何,其实始于黎曼。我定义了一个连络,推广了黎曼的情形。很有意思,当时黎曼没有看到此点。

投影几何有极为光荣的历史。现在缺人注意,十分可惜。复数微分几何,结构丰富,是一个极有前途的方面。这当然也是复变函数论的一个主要方向。

因为个人关系,我长期访问休斯顿大学,得到两位年轻数学家鲍大维和嵇善瑜的合作。我同鲍大维、沈忠民合写了一本"黎曼芬斯勒几何"的书,由斯普林格公司出版。相信这种几何是有前途的。

9. 获美国数学会斯蒂尔奖时的答词

1983 年,陈省身荣获美国数学会颁发的斯蒂尔奖(Steele Prize)。获奖者在接该奖时需要有一个书面的答词。原文是英文,刊于《Notices of American Mathematical Society》,1983 年。中译者:王善平。

非常感谢由于我的积累工作而授予我斯蒂尔奖。这样的奖按规定授予老数学家。我认为这样做很合适,因为老数学家需要鼓励。

感谢之余,我想进一步提个建议。看着以往获奖者的显赫的名单,我想,由数学会出版一本关于斯蒂尔奖的书,这是很有意义的。书中可以包括那些因他们的工作积累而获奖的获奖者的自传或传记,包括论述由那些开创性的论文推动深入研究的文章——斯蒂尔奖就是为这些开创性的论文颁发的,还可以包括其他材料。我相信这样的书既有数学价值又有历史价值。

10. 给胡国定的信

1983～1984年间，陈省身为筹办南开数学所事宜与胡国定[①]频繁通信，这里是其中的一封。

国定：

接4月10日来信为快。

建筑"数学楼"事得有进展，皆兄大力，闻之甚慰，此间所楼建筑，正在进行，盼今夏能开工，一年后落成，兹将招标文件，另用平邮寄上，中外情形不同，供参考而已。

有以下几点建议：

1）科学研究须多有非正式讨论的机会，宜有一供人随意起坐的房间，英文叫Common Room。

2）研究室的一面墙，宜为高品质的黑板。

3）要有图书室。

省历年藏书，估计有五千册左右，拟全部捐赠南开，忆曾向兄及大任、陈鹀提及，此批书籍如能另放一室，该室的建筑费省愿捐助，详可待商。

建楼进展希随时见告。

项武义昨天飞港返国，暑期讲习班当由彼作具体接洽，地点方面不知北戴河有无足够的条件，此事需国内同志大力支持才有成功希望。

昨天同阿科拉教授通电话，他盼学校给他一正式聘书，内容包括：1）待遇；2）他们夫妇二人在华旅费由中国负担，他们大约将经深圳入境；3）他们当然希望假中在中国旅行，不知可有几次。我想待遇方面，总要比教英文的来得优厚。

阿科拉教授在他的本行有相当地位；有阿科拉定理，他能在南开专教一年，是难得的机会，他可把复变函数带入新的领域，从南开讲，在美国数学界有一忠实的朋友，将有无限益处，不限于搞函数论的数学家，我总觉得，中国数学的发展，需要国外的数学家帮忙，应不限于华裔。

---

① 胡国定。当时任南开大学副校长。南开数学所创办后首任副所长，后接任所长。

今年此间事忙，不能返国为憾，如来美，盼过金山停留畅谈。

祝好

省身

1983年5月3日

11. 我的若干数学生涯

本文是作者于 1987 年 4 月 22 日下午在台湾清华大学的演讲记录，由《数学传播》编辑部整理而成。原载《数学传播》第 11 卷第 2 期，1987 年。

今天很高兴回到清华来，有机会跟大家见面，讲讲话，毛校长刚刚说过我是清华的校友，所以回来等于回到自己的家里。今天讲的题目也是一个非常不正式的题目。所以我就是随便挑几件事跟诸位谈一谈。

岁数大了，无论哪一年，都可以找出一点意义。比方说，今年是 1987 年，50 年前，1937 年我是从法国回到长沙担任清华大学的教授。如果再往回一年，1986 年，50 年前，1936 年，我在汉堡大学得到博士学位。所以岁数大有一个优点，年年都可以找出一点花样(众笑)。

刚才毛校长也讲过，我 1930 年在天津南开大学毕业，刚巧那一年，清华决定成立研究院，所以我就投考了清华的研究院。那时的清华跟你们现在的不一样，规模小得多，人数也少得多了。研究院的学生，学校需要每个月给 30 元的津贴。那时候 30 元可以够一个学生的费用。研究院录取的一共 8 个人，所以第一班的研究生，校外录取的 8 个人，加上清华本校毕业保送进来的若干人，我想顶多只有十几个人。因为数学系只有我一个学生，临时决定研究院缓办一年，所以第一年我是做助教。因为在 8 名当中，我的英文姓是“C”开头，学号是 002(学校第二名的学生)。第一名是我一位学姐，她的姓是张。那时候的学校，在国内是有名的设备比较好的。所谓好者，就是美国式的设备，有图书馆、大礼堂、体育馆。我想那礼堂要比今天所在的地方小得多了，因为清华大学的学生大概有一千多人，一千多人没有法子在礼堂开会。可是因为设备好，清华还是一个大家向往的地方。大家都愿意到清华来读书。当时学生的一个说法，就是“北大有胡适之，清华有体育馆”。

那时候中国数学界的情形是很薄弱的。前几天，我拜访了俞大维先生，他是很少的在国外得到博士学位的一个人，可惜他没有继续在数学方面工作。另外一位是胡明复先生，在哈佛得到博士学位，可惜他回国不久就去世了。我的老师姜立夫先生，也是哈佛大学的博士，在南开大学教书。在清华，从国外得到博士学位、在国内继续作研究的有孙光远先生，他是我的老师，专搞微分几何，我跟他做研究。另

一位做研究的是代数学家杨武之教授，他是杨振宁的父亲。他们两位都是芝加哥大学的博士。当时在清华数学系里头继续做研究，指导学生的研究。我应该也提到清华当时的数学系主任熊庆来先生，他是留法的，专门搞分析。熊先生在清华教书之后，后来在休假的时候去巴黎完成他的博士学位，完成学位后继续在分析方面有很好的贡献。清华有他们几位老师，因此有很多好的学生。当时，比方说许宝騄，后来在统计学方面有非常重要的贡献；柯召，他去英国，搞数论，作了很好的工作。当然还有华罗庚，他初中毕业，因为他发表论文，得到系里的注意，清华当时请他做图书馆管理员，所以他就在图书馆里自己念书，到清华不久就发表论文，作有意义的研究的工作，是系里头非常活跃、后来很出名的人。

可以表示当时中国数学界的情形的，譬如说，中国那时候没有一个全国的中国数学会，中国数学学会是 1935 年才成立，因此也没有一个中国出版的或者全国性的数学杂志。不过，从 1930 年到 1937 年（1937 年卢沟桥事变，中日战争发生了），在短短不到十年的当中，北平跟中国其他的地方科学有很大的进步。在数学方面，除了刚才我所说的几位之外，还有从日本回来的陈建功先生、苏步青先生。他们在浙江大学带领很多学生工作，他们的工作很有成绩。所以当时是在国内做数学研究比较受注意的人。这是在北平时候的清华大学。

后来因为战争的关系，清华大学、北京大学、天津南开大学联合起来，最初在长沙成立长沙临时大学。半年以后，搬到昆明成为西南联合大学。西南联合大学是 1938 年在昆明开始，一直到抗战结束。因为三个学校有名的老师很多，所以对年轻的人有非常大的吸引力，西南联大后来造就很多的人才。在数学方面，比方说有王宪钟，他是跟我搞几何的，后来在美国康奈尔大学做教授，不幸的是前几年去世了。还有钟开莱，后来搞机率、统计，他现在是斯坦福大学的教授。还有一位是王浩，在数理逻辑方面有很大的成就，据我所知，最近一两天之内要到台湾访问并给演讲。那时候我们在西南联大（1938 ~ 1946），西南联大因为战事，设备不好，环境也不好，但是我们数学的工作还是继续。我稍微谈一谈我们那时候数学方面的一些活动。例如，刚才我所提到的华罗庚先生跟王竹溪先生和我，在 1940 年左右成立李群的讨论班。后来这李群的题目，在数学、物理上都有重大的发展。

我自己呢？因为我那时刚从德国、法国回来，在法国跟嘉当做研究工作（嘉当是对我的工作最有影响的一位老师），所以我开了很多课，讲嘉当的工作。他的工作包括了微分方程、连续群论、微分几何等方面。在我的课里头，除了有些数学系的学生之外，有好多物理系的学生，其中包括杨振宁。杨振宁那时候上过我好些课，课里头有一部分内容讲联络论，联络论后来发展成为数学上非常重要的观念，是杨-米尔斯规范场论的一个数学基础。可是数学有时候好像是同一个东西，当你没有搞清楚的时候，不见得能够认识清楚。我想我们在昆明的时候（1941 ~ 1942），我在课里一定讲到联络的观念。总而言之，这可以说明当时在昆明我们的环境虽

然不利，但是学术的生活并不很贫乏。

在清华园当研究生到当教授之间，我在德国、法国留学了三年，两年在德国汉堡。当时的数学与现在的数学有一些不同的地方，一个最大的不同就是当时人数少得多。从我老的想法，那时候搞数学比现在空些，因为进步不是这么快。比方说有数学观念要讨论的话就写封信，等他回信还有好几天的功夫慢慢可以整理思想，对问题有更深入的理解。现在数学研究工作者多了，一下子就见面了，有什么事情甚至可以打电话，很快就互相联系上了。像我这样的岁数，我觉得有点使人发晕。

德国的情形，大学主要工作的人是教授，帮助他工作的有几个助教，然后底下是研究生，这种生活是非常愉快的。这几个人(数学一般讲不到 10 个人)时常互相讨论，有问题的话，学生可以问老师，老师也许互相再去讨论。这是一个很安静，专门为学问而做学问的生活。德国的学制有很重要的一点，它的中心不集中，格丁根固然是一个数学中心，莱比锡、慕尼黑也是个中心，海德堡也有很好的教授。所以全国也许有两三个地方它们的教授都是第一流的，而且他们互相调来调去，海德堡的教授有出缺的话，它想法子到柏林、莱比锡去请那边最杰出的人继承这个位置，它是非常流动的组织。我想这个组织使得德国的科学在 19 世纪末年，甚至 20 世纪初年在全世界取得很高的地位。它的教授的地位非常之高，待遇非常之好，全国可以流动。

我得了学位以后，1936 ~ 1937 年在巴黎，巴黎是法国的中心。法国的制度跟德国很不一样，它是集中在巴黎，所以最好的科学家总有一天被请到巴黎来。巴黎当时是法国科学、数学集中的地方，那时期法国的数学在国际上是取领先的地位，最伟大的法国数学家是亨利·庞加莱(他的堂兄弟雷蒙·庞加莱曾任法国总统)，他是 20 世纪最伟大的数学家之一。为什么他伟大？我想我们大部分人所搞的数学，都发源于黎曼跟庞加莱。为什么我要特别提这两个名字呢？因为至少在我们所搞的数学，称为“核心数学”(core mathematics)，他们两位在数学界的地位就是菩萨。所以有一年我跟内人去参观罗汉塔，我就感慨地跟她说：“无论数学做得怎么好，顶多是做个罗汉。”菩萨或许大家都知道他的名字，罗汉谁也不知那个是哪个人。所以不要把名看得太重。黎曼的工作为什么重要呢？因为数学跟其他的科学一样要不断扩充范围，大家重视的工作，都是开创性的工作。对于新的范围，它的现象跟从前的现象不一样的，你能够认出它不一样的地方，你更能够认出基本性质在什么地方。黎曼就是把普通平面或空间的性质推广到所谓流形的一个更广义的空间。黎曼有些工作大致讲起来还是一维的，庞加莱把它推广到 n 维，他们两位大致可以说是建立高维流形上的几何、分析甚至代数性质的创始人。

现在因为科学的进展有很多基本的问题在近几年来都解决了，所以有人就觉得是不是有新的黎曼或庞加莱，他可以把我们带到一个新的数学领域。而在新的领域，他能够看出基本的问题在什么地方，给出指示，让下一代(21 世纪)的数学家

知道向哪方面去工作。这方面大家的意见都不一样。我比较偏向是有的。也许你们这年纪之中年轻的人,就是将来的黎曼或庞加莱,这是绝对可能的。

我的老师埃利·嘉当是做些什么呢?他最主要是对高维的分析创了最主要的工具,使得在庞加莱没有做到的方向,引进了基本的概念,把高维流形的性质可以更推进的做下去。比方说,其中包括李群的理论,李是一位挪威的数学家,他开创了李群,不过嘉当对李群的贡献不亚于创始人李。他给出了大范围高维流形的几何、分析的性质,在这方面作了基本性而方面非常广的贡献。我自己得到的好处就是,能够把他的东西学到一部分而能够继续做这方面的工作。

在我的老师之中,我还要提到当时我在汉堡的老师布拉施克,他是一个很有创见的几何学家。刚刚有个同学问我关于几何的直觉,我想布拉施克是对几何直觉有特别灵感的一个人,他是当年在德国最好的一个几何学家。他们都很大方,很有远见。我到汉堡是 1934 年,等到 1936 年完成我的博士论文之后,我还可以在欧洲等一年,我就问布拉施克先生,问他有什么意见?我应该走哪个方向?他当时就给我两个建议,他说你也许继续在汉堡学代数,跟阿廷(他是一个很伟大的代数学家)念代数,作代数方面的工作,或者到法国去跟嘉当。

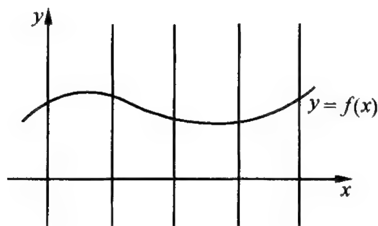
自然而然的法国的吸引力很大,我就决定去法国。事后看来,我想这是一个很正确的决定,因为嘉当的工作当时知道的人不多,我得意的地方就是很早进这方面,熟悉嘉当的工作,因此我后来能够应用他的发展方向,继续做一些贡献。

我想在坐很多是年纪轻的人,希望知道做学问应该是怎样的方向,我觉得有一点终生得到益处的,就是我不怕去找这方面最好的人。当然你在一个方向里头呆了一段时候,你就知道哪几个人是最领袖的人。我想一定值得找最好的,不要满足于找次一点的话,我也可以发展。我想就像赛跑,大家只注意谁跑第一,第二就比第一差得很多。如果你们要做学问的话,一定要想达到最高峰,因此在各种之中,你要是走那个方向的话,就要找最领袖的人,第二比第一差得远了。

后来同样的原因,在西南联大呆了几年之后,我感觉到应该到普林斯顿高级研究所。这是一个私人研究机关,它最主要的教授当然是爱因斯坦。爱因斯坦因为是犹太人的关系,在希特勒当政的时候被迫离开德国到普林斯顿高级研究所做教授。对于我特别有影响的是外尔。在黎曼,庞加莱之后最使我佩服的人就是嘉当跟外尔。外尔工作的范围非常广,他是格丁根大学的教授,继承希尔伯特的职位,希尔伯特是跟庞加莱同等地位的德国数学家,但德国人或许觉得他比庞加莱要紧些。另一位跟我接触最多的是韦伊,韦伊比我大 5 岁,所以我们是朋友,他是法国很好的一个数学家,他现在还活着,刚过 80 岁,可能是现在生存着的最伟大的数学家。

在普林斯顿两年半的时间,我做了一些工作,后来大家认为这工作是有意义的。后来在 1985 年,两年以前以色列的国会颁给我沃尔夫奖金,给我奖金的引文

(citation)是这样的:"The profound contributions to global differential geometry which affect all the mathematics"(对整体微分几何的深远贡献影响了整个数学)。就是说,当时我所做的工作(我想很多是运气)后来发现不但属于微分几何的工作,更影响到整个的数学(代数、分析……),甚至现在也影响到数学物理。这观念非常简单,就是现在所谓的纤维丛、矢量丛。几句话可以说清楚,你们要是念微积分的话,讨论一个函数 $y = f(x)$,在一个平面里头画直线与 y 轴平行的话,这曲线与每一条和 y 轴平行的直线相交于一点。现在发现在数学之中,需要把这个观念推广,规定不是整体的平行,只是局部的平行,这个观念是数学上所谓的矢量丛,在数学上有非常重要的应用。那时我的工作就是要发展这个观念底下的一些基本性质。



普林斯顿高级研究所是当时全世界数学界一个很特别的研究所,它之所以出名,之所以重要、伟大,就是它集中了数学上最伟大的数学家,我想任何一个研究机关能够成立的话没有第二条路子,就是要有伟大的数学家、科学家,在这方面要成立全世界最好的中心,一定要有最好的科学家,数学也如此。刚巧因为欧洲战争,希特勒赶犹太人,所以普林斯顿就成为全世界数学的研究中心,因为有了这些人之后吸收了许多访问的人,他们后来有许多人变成第一流的数学家。

我后来办了几个数学研究所,大家知道有中央研究院数学研究所,当时我在1946年回国,中央研究院叫我办数学研究所,姜立夫先生是所长。我是1979年退休的,在退休之前向来没有做过什么长或什么主任的。我不是所长,但实际上所是我把它创办起来的,因为姜先生不在。因为要办一个所的话,当然很多人(尤其在中国)都要介绍人给我参加这个所。我不是所长,我没有兴趣的话,我就告诉他,我替你告诉姜先生,那就没有下文;我要是有兴趣的话,我就继续想法子做下去。

也许大家愿意听一下我在伯克利办的研究所,叫做数学科学研究所(Mathematical Sciences Research Institute),这个所成功也有相当的历史了。因为美国的国家基金会要成立研究所,想法子能够跟普林斯顿比较。原因是在美国的话总想法子不要使力量太集中,所以有了普林斯顿这样子有成就的研究所,大家就感觉有需要另外再设几个所,分散一点,不要太集中在一个地方。在整个美国学术方面、政策方面,这观念是非常要紧的。要成立这个研究所是由政府来拨款,政府拨款大家都会来抢,为什么决定在伯克利?为什么交给我做?也可以说是一个笑话,比方说公司里头一个总经理出缺,由董事选总经理,大家都投票,不许投自己,每人

就投一个最不可能当选的。实际上讲就是也可以说我在数学界跟人的关系良好，大家对我很放心。我们是1981年成立的，我做了3年(1981～1984)，美国国家基金会给我们拨款，一共5年，一千万元，每年有两百万美元的预算。最主要我办事的一个原则是少做事，有时候做太多的话，也不见得有效。所以我的原则是，刚才说过的，办这研究所最要紧的是把有能力的数学家找在一起，找在一起之后不要管了，就让他们自己去搞。我想研究(尤其是纯粹数学的研究)没法子有计划，现在你要政府拨款或跟机关要经费的话，大家动不动要你有个计划，根据计划里头能够做出来的东西大概不是最有价值的。最好没有计划，不过这没法子跟管钱的人讲得清楚。总而言之，我们有相当的成功，这个所真正1982年才开始，到今年已经有5年了，大家都觉得很成功。当然，和普林斯顿比的话，因为我们是政府的拨款，所以不能够请到长期的最伟大的数学家。我们来的人是很有名的，各地方的人都有，每个人来的话是呆比较短的时间，不过有它的作用，就是来得新，负责的人、参加的人年纪轻，所以也比较会活动，开会也比较会互相讨论，关系比较多，作风跟普林斯顿不大一样。不过在美国讲起来，有这样另外一个研究所，因为美国现在数学家很多，也达到它的目的。

最后我想讲几句话，我要告诉大家，从我这个经验，现在20世纪末年，数学的活动是非常活跃的，就如我刚才所说，传统的有些困难问题一个一个解决了，所以我们现在到了一个时期，要想法子引进新的问题，使得新的问题的解决引到数学新的方面，得到新的了解。当然计算机的发展对数学有很大的影响，原因是计算机是一个离散的数学，离散数学因此受大家的注意。所以种种的原因，使我感觉到数学是一个现在非常活跃的学问。我想这个数学的方向对于中国人非常合适。因为现在美国(这几天报纸已经引用我的话，我再重复一下子)中学生考会考，华裔学生的成绩是要比美国的学生高得多，据统计数字，平均分数高30%。现在在美国最好的大学的研究院，如哈佛、普林斯顿、伯克利，往往大部分最好的学生是中国学生。中国人在数学上能力是没有问题的。这个学问有它的好处，就是不需要设备，完全可以靠个人的努力，所以即使在一个还没有很发展的环境之下，要去研究数学比较容易进去。比方说，在伯克利一两年以前，研究院有一个研究生的考试，是一个笔试，有一位学生，老师给他的分数给低了，所以他去跟他的老师讲，老师承认他看错了，把他分数改了，改了之后，他考了第一，原来第一的人就变成第二。不管怎么样，第一、第二两位，一位是中国大陆的，一位是台湾的，都是中国人。因此中国学生至少在美国，在欧洲也如此，在研究院的成绩非常之好。所以我非常有信心，中国的数学家在21世纪一定会取得重要的地位。

12. 我的科学生涯与著作梗概

本文写于1978年，收入作者的《Selected Papers》，Springer-Verlag，1978年。原文为英文；中译文刊于《数学译林》第7卷第2期，1988年；冯长彬、熊春先、虞言林译，虞言林校。1987年作者进行了补充，收入《陈省身文选》，科学出版社，1989年。

我1911年10月28日生于中国浙江省嘉兴。我中学时的数学课本是当时流行的霍尔与奈特合著的代数学及高等代数、温特沃思与史密斯合著的几何学和三角学，全是英文版。训练是严格的，我做了书中的大量习题。1926年我被录取为中国天津市南开大学新生。显然，我应学习科学，但是对实验的厌恶驱使我主修数学。当时的南开大学数学系是一人系，其教授姜立夫博士是随库利奇取得哈佛大学哲学博士学位的。20世纪20年代末期的中国数学尚处于原始状态。虽然有现代观念的大学，但只有少数学校才开设了复变函数论课程，至于线性代数实际上不知道。幸而我在一个强的班级中，这样的课程对我开设了，另外还有非欧几何课程，用的是库利奇的书。

1930年前后我从南开大学毕业时，目睹中国科学的巨大进步，许多在国外研究科学的学子学成归来。北京（旧称北平）的清华大学处于发展中心，该校是美国归还庚子赔款创办的。1930～1931年我是清华的助教，1931～1934年我是清华的研究生，我的导师孙镛教授以前是莱恩在芝加哥大学的学生。因此，我是从写射影微分几何论文开始我的数学生涯的。

1934年我获得出国研究基金。因为1932年布拉施克教授在北京所作的网几何的讲学吸引了我，所以决定去德国汉堡。我1934年秋到达汉堡时，恰逢凯勒的《微分方程组理论导引》一书出版，并且他以该书为基础举办了一个讨论班。在汉堡不到两年的时间里，我在嘉当-凯勒理论方面的钻研比其他方面更深入。1936年2月获理学博士学位。

学位的完成履行了我对研究基金的义务。我自然地期待着去巴黎与大师埃利·嘉当一道从事一年无忧无虑的博士后工作，可那却原来是艰苦奋斗的一年。1936～1937年在巴黎，我学习了活动标架、等价方法、更深的嘉当-凯勒理论，而最重要的应是嘉当的数学语言和思想方法。以致至今我还经常觉得嘉当本人比他的

某些解释者更易于领悟。

1937 年夏我回中国就任清华大学教授。我乘伊丽莎白女王号轮横越大西洋，在美国观光一个月之后，又乘加拿大皇后号轮横越太平洋。旅途中，中日战争爆发，以致我未能到达北京。

战时清华大学迁往中国西南的昆明，成为西南联大的一部分。就数学而言，这是一段与世隔绝的时期。我开设高等专题的课程(如共形微分几何、李群等)，有些好学生。

1943 年我成为普林斯顿高级研究所的成员，维布伦和外尔注意到我的工作。在 1943 ~ 1945 年期间，值得提到的是我研读代数拓扑和纤维丛，并做关于示性类的工作。1945 年战争结束，我决定回中国。战后运输困难推迟了我的旅程，以致直到 1946 年 4 月我才到上海。我被指派在南京组织中央研究院新的数学研究所。此项工作仅持续了近两年时间。1948 年 12 月 31 日，我再次接受高级研究所邀请离沪赴美(参见 A. 韦伊的文章《我的朋友——几何学家陈省身》。离华前，孟买的塔塔研究所邀请我去那里工作，并且进入筹划阶段，但我未能接受。此项邀请肯定是塔塔首席数学教授 D.D. 科萨姆比建议的，他对我在道路几何方面的工作知之甚深)。在高级研究所我度过了冬季学期。1949 ~ 1960 年我在芝加哥大学任教授。

1960 年我迁往伯克利，成了那里的教授，于 1979 年退休。和 C.C. 穆尔、I.M. 辛格一起，我向国家科学基金会提交一份在伯克利建数学所的建议。建议被批准了并且我成了数学所的 1981 ~ 1984 年度的所长。退休之后在我的母校，中国天津南开大学，我新办一个数学所。我希望我最终的退休将很快来临。

下面略述我的数学工作。

1. 射影微分几何

爱因斯坦的广义相对论有力地促进了黎曼几何及其推广的研究。在这之前，几何学为 1872 年菲力克斯·克莱因发表的埃尔朗根纲领所支配，每个空间都对应着一个起基本作用的变换群。于是，欧氏空间有刚体运动群，而射影空间有射影群等等。沿着塞雷特-弗雷内、欧拉、蒙日与高斯关于经典曲线与曲面论的传统，E.J. 威尔辛斯基、G. 富比尼及 E. 切赫创立了射影微分几何。它的主要问题是求射影群下一个子流形的局部不变量的完全系，并通过与较简单的几何图形的密切性来几何地解释它们。主要困难在于射影群相当大，不变量只能用高阶密切才能触及。此外迷向群是非紧的，这就丧失了许多美丽的几何特性。

我最早的论文[1]①、[2]通过研究更复杂的图形避免了第一个困难。这些论文与练习差不多，但其中隐含的基本思想在 P.A. 格里菲思关于网、阿贝尔定理及

---

① 本文方括号中的数字指本书附录《陈省身已发表的著作和论文目录》中的编号。——编者

它们在代数几何中的应用等近代工作中产生了共鸣。例如,代替平面上 d 阶代数曲线的研究,可以研究平面上每条直线与曲线的 d 个交点的构形。此法可得对应的 d 条弧。文[1]研究了对应的两条弧。

我的下一篇论文[3]论及射影线几何,一个现在被遗忘的论题。用现代术语,线复形乃是三维射影空间中所有直线组成的普吕克-格拉斯曼流形中的超曲面。如同通过对曲面的切球面的考察导致曲率线与主曲率的基本概念,对射影曲面的切二次曲面的考察导致达布与李二次曲面一样,在一般线复形的研究中使用二次线复形则始创于这篇论文。

几年后,我回到射影微分几何,在论文[17]、[20]中引进 n 维射影空间中一对曲线或曲面切触的新不变量,它们包含梅姆克-史密斯不变量作为特例,梅姆克-史密斯不变量在多复变数的奇点的一些问题中有用。总的说来,在奇点上射流的微分同胚不变量的研究近代已引起广泛的关注(H. 惠特尼,R. 托姆)。意大利微分几何学家广泛研究的射影不变量,应会引入更精细的问题中去。

共轭网的拉普拉斯变换是曲面变换理论中的热门课题。它乃是导出二元二阶线性齐次双曲型偏微分方程之变换的优美几何结构。文[25]、[36]将其推广到一类任意维子流形上去。此推广与高维孤立子及它们的贝克隆德变换的近代研究有关。

用二阶常微分方程组的积分曲线代替直线,射影空间便自然地转为道路空间。这种思想可追溯到 H. 外尔。这样的空间称为是射影连通的,或具有一个射影联络。O. 维布伦、J.A. 斯豪滕引进射影相对论的目的在于选取其道路与统一场论自由粒子轨道一致的射影连通空间,它们由“场方程”组来定义。论文[114]中提出了一个新的场方程组。

从数学的观点来看,射影连通空间具有内蕴的兴趣,把射影空间和一般射影连通空间联系起来,这是嵌入问题。在射影空间中给出一个子流形 M,在 M 上定义一个诱导射影联络如下:取一个横截于 M 的切空间的线性子空间场,由之在邻近切空间上做投射,便得此射影联络。在文[7]中我证明了一个与黎曼空间的施莱弗利-雅内特-嘉当嵌入定理相类似的定理。下述结果是它的一个特殊情况:n 维空间上的一个实解析正规(按嘉当意义)射影联络可以由一个到 $\frac{n(n+1)}{2}+\left[\frac{n}{2}\right]$ 维射影空间的嵌入局部诱导出来,所需维数一般高于施莱弗利情况。

射影联络基本定理是对一个道路系统联系于一个唯一的正规射影联络。我在文[24]中宣布,当 n 维空间中有一族 k 维子流形,它们依赖于 $(k+1)(n-k)$ 个参数且满足一个完全可积微分方程组时,定理同样正确。$k=1$ 得经典结果,而 $k=n-1$ 时得 M. 哈赫特罗笛在巴黎的学位论文的主要结论。我的推导甚长且未发表。后来,严志达(Annali di Matematica,1953)给出了几何论述。在普林斯顿,维布伦及托马斯领导下对非黎曼几何的探讨,主要工具是利用法坐标系定义了相应于

它的张量法扩张。在道路射影几何中,法坐标可有不同的定义;其存在性一般不易建立。我在文[8]中证明,托马斯的法坐标一般不同于通常由嘉当的射影联络概念所自然定义的法坐标。

最近我与格里菲思关于网的工作[115]中发现一个将平坦正规射影联络表征为具有适当分布的∞^2全测地超曲面的联络的定理;而传统的定理要求∞^n全测地超曲面,这里n为空间维数。

最后我想说,我相信射影微分几何的重要性将不断增长。在多复变理论与代数族的超越理论中,凯勒度量的重要性怎么强调也不会过分。另一方面,射影性质则属全纯范畴,在直接或间接包含线性子空间或其推广的问题中,射影性质就会出现。

2. 欧氏微分几何

19世纪40年代前,一般是通过欧氏空间的曲线、曲面论课程向数学系学生介绍微分几何,该课程在欧洲的大学中视为“无穷小分析在几何上的应用”。布拉施克的书以其对整体问题的强调特别使我着迷。然而,仅当我开始用活动标架处理曲面论后才能做一些工作。在文[30]中我指出,希尔伯特对球面刚性的证明给出了一个更一般的定理:E^3(= 3维欧氏空间)中的闭严格凸曲面当一个主曲率是另一主曲率的单调减函数时是一个球面。我对常平均曲率的研究所获甚微,迄今未知E^3中是否存在正亏格的常平均曲率的闭浸入曲面。

更一般地,欧氏微分几何研究的一个自然领域涉及W-超曲面,此处,主曲率之间有一个函数关系。若超曲面是闭严格凸的,则它到单位超球面内的高斯映射是一对一的,我们能等同该超曲面上的函数与单位超球面上的函数。令$\sigma_r(1 \leqslant r \leqslant n)$是$E^{n+1}$中一凸超曲面的主曲率的倒数的$r$次基本对称函数,在文[71]中我证明了,如果对某$r$而言,$E^{n+1}$中两个闭严格凸超曲面$\Sigma,\Sigma^*$的$\sigma_r$函数作为单位超球面上的函数是一致的,则$\Sigma$与$\Sigma^*$仅相差一个平移。条件的几何意义是$\Sigma$,$\Sigma^*$上法线平行的点处的$\sigma_r$是相同的。在文[72]中埴野顺一、熊全治和我对某个r,以$\sigma_r \leqslant \sigma_r^*,\sigma_{r+1} \geqslant \sigma_{r+1}{}^*$代替定理中的条件证明了类似的唯一性定理,该证明基于某些积分公式的建立。

在文[84]中,我考察了欧氏空间中的具有边界超曲面。当满足某些曲率条件时找出了其大小之上界。这就推广了E. 海因茨和S. 伯恩斯坦对E^3中曲面的一些工作。

在文[77]中熊全治和我再次用积分公式证明,当满足某些附加条件时E^n中两个k维紧子流形的保体积的微分同胚是等距变换。

在文[65]与文[69]中拉肖夫和我研究了E^n中紧致浸入子流形的全曲率。这全曲率定义为E^n中单位超球面上的单位法丛在高斯映射下的像之测度(注意,不论子流形的维数如何,单位法丛的维数是$n-1$,它乃是E^n中单位超球面的维数)。

J. 米尔诺紧随着他关于纽结的工作考察了全曲率。拉肖夫和我推广芬切尔关于空间闭曲线的全曲率的经典定理而证明了在合适的规范化下，E^n 中一个紧浸入子流形的全曲率有一个统一的下界，且此下界当且仅当子流形是凸超曲面时才可达到。作为一个推论，证明 E^3 中具非负高斯曲率的闭曲面是凸的。这就推广了阿达马的经典定理。在此项工作中起根本作用的是一个关于具有退化第二基本型的超曲面的局部性质的引理。近年来，全曲率与态紧浸入已获得许多有趣的发展(凯珀，班科夫，波尔及陈)。

其中有班科夫引进的套紧浸入的概念，它是指：对于空间中任一点，子流形中各点与之的距离函数具有最少临界点个数。这是比态紧浸入更为强的特性。在文[146]中 T. 赛西尔和我证明，套紧性在球变换组成的李群下是不变的，球变换是将球变到球的切触变换。我们也在李球几何学中引进一些微分几何学的基本概念，例如勒让德映射和迪潘子流形。

研究 E^3 中曲面保持中曲率的等距变形的是博内。这个问题化为一个复杂的过定偏微分方程组，后者已为多人研究过。在文[136]中我证明它们或者是常中曲率曲面，或者构成一个具六参数由 W-曲面构成的例外族，在分析处理中单位切球丛的联络式用得多。

在 E^4 中给定的一个定向(二维)曲面，其高斯映射的像空间是过一点的所有定向平面的格拉斯曼流形。后者同胚于 $S^2\times S^2$。作为结果，该映射定义了一对整数。斯潘涅和我在文[50]中证明，如果曲面是嵌入的，当空间合适地给定向时，此二整数相等。

在文[53]中凯珀和我对 E^n 中浸入流形引进了两个整数：零化指数及相对零化指数。建立了它们与 E^n 中紧子流形的维数、余维数之间的不等式。此项工作起源于汤普金斯的一个定理：E^3 中不存在高斯曲率恒为零的闭曲面。

曲面论中各种定理的光滑性要求已被 P. 哈特曼及 A. 温特的一长串论文透彻研究。我们在文[58]中研究了等温坐标下的临界情况，即使等温坐标系中的度量有相同光滑性的极少条件。

最后，我想说一个关于复空间形式的结果。B. 史密斯在他的论文中用对称埃尔米特空间的分类决定了常全纯截曲率的凯勒流形中的完备爱因斯坦超曲面。这原是个局部性结果。该问题引出了过定微分组，我在文[90]中从对可积性条件的仔细研究推出了一个定理。问题中的超曲面要么是全测地的，要么是超球面。

欧氏微分几何以其单纯之美感可与初等数论相媲美，与后者不同之处是有更多的东西尚有待发掘。

3. 几何结构与它们的内蕴联络

黎曼结构由其列维-齐维塔联络支配而道路结构由其正规射影联络支配。局

部微分几何的基本问题是对一个结构联系一个能刻画全部性质的联络。达此目的之有效手段是 E. 嘉当的等价方法。我在孤处中国内地的 1937 ~ 1943 年间从多方面实现了这个计划。

A. 特雷西斯研究了在(x,y)-平面中二阶方程

$$y'' = F(x,y,y'), \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

的几何学,特雷西斯的结果已用李理论的术语简洁表示;可以更几何化地说,正规射影联络能在线元(x,y,y')的空间中定义。我研究了平面内切触变换群下的三阶方程

$$y''' = F(x,y,y',y'')$$

且证明了在一个重要情况中共形联络能内蕴地定义(文[6]、文[13])。我亦定义了由网产生的结构之仿射联络(文[9])(参阅 § 8)。

局部微分几何结构可由微分系统或度量来定义,两种典型的情况是射影几何与欧氏几何。当道路是常微分方程组的积分曲线时,容许的参数改变对产生的几何有重要的影响。D.D. 科萨姆比考察了具有容许参数的仿射变换之二阶微分方程组,并给该结构附上一个仿射联络。我在文[10]中用等价方法证明了此结果,接着在文[11]中又解决了由更高阶微分方程组定义道路时的相应问题。

对参数化不加限制(即参数容许任意光滑改变)所给出的子流形族就几何而言更为自然。推广特雷西斯问题到 n 维,已知条件应该是满足某微分系统的 $\infty^{2(n-1)}$ 条曲线,使得过任一点及在该点的任一切方向恰有一条这样的曲线。用这些曲线取代直线就定义了广义射影几何即正规射影联络。如 § 1 所述,我拓广该结果到有给定的、满足某微分系统的 $\infty^{(k+1)(n-k)}$ 个 k 维子流形的情形。以同样的想法我在文[21]中定义了一个外尔联络,它在 $\mathbf{R}^3$ 中给出 ∞^2 个曲面作为“迷向曲面”。在文[22]中又把它拓广到 n 维,但 n 维的详情从未发表。

我在文[23]、文[44]中研究附加于芬斯勒度量的联络且证明了有不止一种的自然选择。

1972 年莫泽发现了 C_2 中的非退化实超曲面之局部标准型,并请我判断他的不变量是否为嘉当不变量。数年前我曾将嘉当的工作拓广到 C_{n+1}的超曲面。我未曾发表这些结果,部分原因是其间田中发表了论同一主题的文章,虽然田中对超曲面设置了一个假设(他在以后的文章才撤去)。莫泽和我在文[108]中既给出了 C_{n+1} 中非退化实超曲面的标准型又给出了作为 CR-流形的内蕴联络,并把两个不变量集合统一起来。我在文[111]中就超曲面是实解析时定义了一个射影联络。它并未给出全部不变量,但优点是其不变量属全纯范畴。

这一切都是 G-结构的特殊情形。某些 G-结构,如复结构,容许一个变换的

无限伪群。我在文[54]中给出了 G-结构的导引,包括挠型的概念及无限连续伪群之嘉当理论的介绍。文[83]给出了 G-结构更完整的叙述。

我在文[61]中注意到对 $G \subset O(n)$ 的无挠 G-结构霍奇的调和理论成立;于是霍奇分解能被推广,调和式分解为 G-作用下的既约项的和,该观点使霍奇的结果更好理解。

在数学的规矩中几何学的领地从未很好地圈定。也许 G-结构概念足够开阔,能满足几何主流之现代要求。

4. 积分几何

1934年我赴汉堡时,正值布拉施克以他特有的风格开始发表一系列称为“积分几何”的论文。虽然我对积分几何有强烈的兴趣,但我在这方面的工作是零散的。

我注意到克罗夫顿传统的积分几何是处理具有相同群的两个齐次空间,称此群为 G。若这两个齐性空间实现为陪集空间 G/H 与 G/K,此处 H 与 K 为 G 之子群,又若当二陪集 aH 与 bK, $a, b \in G$,有公共元时就称它们是关联的。用此关联概念,在很一般的场合下建立了克罗夫顿公式(文[14,15,19])。这个关联概念为韦伊所看中且在后来黑尔加松及蒂茨的工作中发现有用。

我在积分几何方面之其他工作涉及庞加莱的运动学的密度,我与严志达一道证明了 E^n 中的运动学基本公式(文[15,51])。

外尔在其关于管之体积的公式中引进了 E^n 中嵌入流形的许多数量不变量,其中有一半仅依赖于诱导度量。若 M^p 与 M^q 为 E^n 中闭嵌入流形,让 M^p 固定而 M^q 运动,我在文[84]中证明了表示交集 $M^p \cap M^q$ 的一个不变量关于运动学测度之积分的一个简单公式,这补充了处理超曲面的运动学基本公式。

5. 示性类

我是通过学曲面论的学生都熟知的高斯-博内公式引进示性类的。早在1943年以前,当我给出 n 维高斯-博内公式的内蕴证明(文[26,31])时,利用曲面论中幺正标架,我认识到经典的高斯-博内公式只不过是这个表示“精彩定理”之高斯公式的整体性推论。文[26]中证明的代数形象乃是构作以后名为超度的首创例子,而超度在纤维丛的同调论及其他问题中起着根本作用。

高斯-博内公式涉及欧拉-庞加莱示性数,很自然要考虑一般的斯蒂弗尔-惠特尼示性类对应的结果,因此重新引进。我立即认识到后者本质上由模2定义,它们与曲率形式的关系是人为的。从技巧上说,其原因在于正交群的复杂的同调结构,例如挠的出现。复数域上的格拉斯曼流形和斯蒂弗尔流形是无挠的,同样酉群亦是如此。我在文[34]中引进复向量丛的示性类,凭借德·拉姆定理把它们与该丛中埃尔米特结构的曲率型联系起来。通过微分式的清晰构造,该文实际上包含了以

酉群为结构群的主丛之同调结构的精髓：超度、示性类、万有丛等等。这些示性类是对代数流形定义的，但其定义不论用埃尔米特结构还是用万有丛都不是代数的。文[54]中我通过考察用以旗流形为纤维的配丛，证明了示性类能用线丛的示性类来定义。作为一个推论，代数流形的示性类之对偶同调类包含了一个代表的代数闭链。

纤维丛的同调结构之研究在用联络后把局部性质融入到整体性质中，并且把微分几何与微分拓扑结合起来。用任意李群作结构群的主丛的一般情形于 1949 年由韦伊在一未发表的手稿中完成，我的上述工作是关于酉群的特殊情形。专著[1]中介绍了韦伊的部分结果。其主要结论是所谓的韦伊同态，它(通过曲率形式)把示性类与伴随群作用下的不变多项式等同起来。此等同的重要意义应能直接看出，晚近发现它在阿蒂亚-辛格指标定理之热方程证明以及关于叶状结构的博特定理中是决定性的。

通过德·拉姆定理代表示性类的示性式本身，实际上包含更多的信息，示性式的零化不仅是它们的示性类为零(示性类为零只意味着示性式是正合的)，它导致二阶示性类。我和西蒙斯在文[101,106]中对此曾作过研究。二阶示性类依赖于联络的选择，但联络改变时它具有很强的不变性。在许多问题中显示了它们的作用：如共形浸入以及紧黎曼流形上用谱来定义的 η 不变量。我与怀特合写的论文[111]给出了示性式的对偶定理。

我在文[41]中确定了实格拉斯曼流形的模 2 上同调环。作为一个推论，它证明了斯蒂弗尔-惠特尼类生成球面丛的模 2 示性坏。此结果在紧黎曼流形上闭测地线个数的估计中起着作用。

当底流形具有复结构时，其复值外微分式环亦有更精致的结构。微分式有二重次且存在两个外微分，其一是关于复结构的，而另一是关于共轭复结构的，通常分别表为$\partial,\bar{\partial}$。博特与我在文[83,95]中研究了关于算子 $i\partial\bar{\partial}$之全纯埃尔米特向量丛的微分式。它已应用于复几何，特别是对全纯截面之零点的研究。亚纯函数值分布经典理论乃此研究的特殊情形。

我在文[104]中给出关于紧黎曼流形示性数和其上的亚纯向量场的残数之博特定理的初等证明(不涉及层上同调)。它是用超度的想法来证明的。

对流形必须用共变微分；曲率乃度量其非交换性。其组合为示性式，乃度量所论丛的非平凡性。这一系列观念是如此朴素而自然，以至其重要性无论如何强调都不算夸大。

6. 全纯映射

全纯映射之最简单情形是 $\mathbf{C}\to P_1$，此处 $\mathbf{C}$ 表复直线而 P_1 表复射影线。用通常的术语，$\mathbf{C}$ 称为高斯平面，而 P_1 称为黎曼球面，映射理解为亚纯函数。经典的值

分布论之几何基础由两个定理组成,即熟知的第一、第二主定理,它们只是把高斯-博内定理分别用于 P_1 的霍普夫丛和典范丛。据此再用微积分型不等式推出奈望林纳亏量关系。

文[73]中通过对非紧黎曼面到紧黎曼面的全纯映射之研究使这些观点更清晰了。作为微分几何学者,我当然对由 H. 嘉当、H. 外尔和 J. 外尔及阿尔福斯所发展的,解释为 P_n 中一条全纯曲线的一族亚纯函数理论早已感兴趣,此处 P_n 为 n 维复射影空间。文[102]中对 P_2 作了几何处理;山口在一篇未发表的手稿中对 P_n 作出了相应的结果。非紧全纯曲线的分布状态之优劣主要取决于弗雷内型公式是否成立。考文、维特与我考察任意复流形 M 中的全纯曲线而且证明仅当 M 具有极特殊的性质时,弗雷内公式才成立,这些性质接近于具有常全纯截面曲率(文[107])。我们自然会考察更高维的全纯映射,它有许多课题尚待解决。我在文[78]中给出了某些一般性的发现,继 H. 莱文在我指导下所作的一些工作,我在文[74]中研究了全纯映射: $f: C_n \rightarrow P_n$,并证明了在某些增长条件下集合 $P_n - f(C_n)$ 之测度为零。

在文[83]中博特与我再将值分布问题公式化为全纯向量丛之全纯截面的零点分布问题。复超度(即关于算子 $i\partial\bar{\partial}$ 的超度)之研究成了需先解决的代数问题(文[80,92])。示性类是一个精细定义的概念,在属于全纯范围之问题的应用中有其重要性。

我在文[91]中证明了作为体积递减性质的高维施瓦尔茨引理。我与 S.I. 戈尔德贝格在文[109]中又对黎曼流形之调和映射类证明了一个类似的定理。

在文[93]中我与莱文与尼伦伯格在复流形 M 的实上同调向量空间中导入了内蕴伪范数。该定义要用到多重次调和函数,当 M 中存在足够多的多重次调和函数时,伪范数就变成了范数。在全纯映射下伪范数为非增函数。

在复变函数论中,几何学具有重要的地位。在未来的多复变函数论中其作用将更大。

7. 极小子流形

在 E^n 中过一点的所有定向平面之格拉斯曼流形 $\tilde{G}_{2,n}$ 具有在 $SO(n)$ 作用下不变的复结构。另一方面,E^n 中的定向曲面通过其诱导黎曼度量而有一个复结构。当且仅当高斯映射是反全纯时,曲面是极小的(文[82])。当 $n=4$ 时此定理为平尔所证明,这显然是与复变函数论有关的极小曲面论之起点。极小曲面论的基本定理之一是伯恩斯坦唯一性定理,它断言 E^3 中对所有 x、y 有定义的极小曲面 $z=f(x,y)$ 必为一平面。伯恩斯坦定理是一个被奥斯曼推广了的定理之推论。推广后之定理断言,如果一个完备极小曲面不是平面,则在高斯映射下它在单位球面上的像是稠密的。文[82]将之推广为 E^n 中非平面的完备极小曲面在高斯映射下像

之稠密性定理，我与奥斯曼合写的文[89]建立了更精细的稠密性定理。

球面 S^n 上的极小曲面几何学采取了不同的主张，这是因为人们自然会从研究紧极小曲面开始，当余维数任意时必须考察更高阶密切的空间。此于文[99]中实现，该文证明了它们的维数是相继偶数。事实上对任何空间形式中的极小曲面这都是对的。根据 E. 卡拉比的结果，由于 2 维球面的简单共形性，S^n 中极小 2 维球面可一一列举。我在文[97]中给出了 S^4 中所有极小 2 维球面的简单构造。对 S^n 中极小 2 维球面的该项工作由卢卡斯·巴尔博扎继续进行。

继西蒙斯单位球面 S^n 上的(k 维)闭极小子流形的著名工作之后，我与陀卡摩及小林在文[94]中考察了第二基本形式之长度的平方。记为 $\|h\|^2$。由西蒙斯不等式推出，如果 $\|h\|^2 \leqslant k(n-k)/(2n-2k-1)$，则 $\|h\|^2=0$ 或 $\|h\|^2=k(n-k)/(2n-2k-1)$。我们确定了 S^n 中满足 $\|h\|^2=k(n-k)/(2n-2k-1)$ 的所有闭极小子流形。

另一个空间，它包容的极小曲面可以描绘得更具体者，是复射影空间，或更一般些，是复格拉斯曼流形，极小曲面的解在理论物理中有应用，理解为 σ-模型。数学上讲，这样的调和映射曾被 J. 伊尔斯和他的合作者研究过。沃尔夫森和我在文[134]、文[138]、文[145]中运用活动标架法，从而给出这个专题的一种不同的更为几何的处理。

在文[128]中奥斯曼和我研究欧氏空间中极小子流形上诱导度量的内蕴刻画问题，这推广里奇的著名定理，我们给出许多结果，但是问题没完全解决。

我在文[117]中研究仿射极小超曲面。这里需极小化的积分包含二阶偏导数。我计算了第一变分并证明其为零乃由仿射平均曲率为零来刻画。

仿射极小曲面在贝克隆德型变换中起作用，后者尚待更好理解。滕楚莲与我在文[119]中证明，如果一个 W-线汇之焦曲面在对应点具有平行的仿射法线，那么二者均为仿射极小曲面。

极小子流形几何学的任务之一是提供例子。其重要性在于通过和例子的比较往往可导致一般性定理。

8. 网

论文[4]、[5]是我在汉堡的学位论文。我在文[4]中对 $\mathbf{R}^n$ 中超曲面的 d-网之秩给出了准确的上界。论文[5]是我努力理解嘉当-凯勒理论时在网几何方面的自然结果。我定义了 $\mathbf{R}^{2r}$ 中 r 维子流形的一个三网之仿射联络，由此能得到一个不变量的完备系，并对其中某些不变量给出了几何解释。

我被命运开了个玩笑，40 年后又转回到这一课题。1975 ~ 1976 年间 P. 格里菲思访问伯克利时，他对作为射影簇几何学的推广的网几何感兴趣。例如 P_n 中 d 次代数曲线与一般超平面相交于 d 个点；由对偶性，这就给出对偶空间 $P_n{}^*$ 中超平面

的 d-网。

我们感兴趣于推广博尔的线性化定理到 n 维情形,在文[113]、文[115]中我们对证明这个推广的努力没有完全成功。一个附加的条件必须加入,并且需用一个较代数几何的论证。文章更正在文[127]里。不管怎么说,问题是有趣的,值得进一步探讨。

在文[116]中我们给出了 $\mathbf{R}^{kn}$ 中余维数为 k 之 d-网的 k-秩之准确上界。

9. 外微分系统和偏微分方程

正如我开头所说,我对外微分系统感兴趣。这是很自然的,因为微分几何中的问题常常化到这样的系统。基本而又一般的概念是对合系统的概念。在文[125]、文[144],布赖恩特、格里菲思和我有一个嘉当-凯勒理论和对合的普法夫系统的介绍。这将扩充为我们与 R. 加德纳、H. 戈尔德施米特合写的一本书。

在应用中外微分系统和偏微分方程之间没有本质差别,因为一个可以化为另一个。对于庞大的过定系统而言,前者有方便之处,这在于它的简捷记号和这样一个事实,即微分式通常有几何意义。在整体问题中,后者胸有成竹地提出微分算子,泛函分析便可用上了。在一般的理论和特殊的情形之间也有着一条鸿沟,它们竞相争夺着在这一领域工作的数学家的精力。我认为持有开放的想法是明智的。

有一个例子是发展方程,例如正弦-戈登方程和 KdV 方程。已经看到,这些方程是一个拟球曲面上的可积条件。在文[130]中一个原始观察之后,这个问题我和 K. 特南布莱特在文[142]中作了仔细研究。我和彭家贵在文[121]、文[131]中只利用 $SL(2,R)$的结构方程给出一个更简单的做法。

在文[137]中 R. 哈密顿和我研究三维紧致定向流形,它们的切触结构及相容的黎曼度量。在一个这样的流形上,切触结构总是存在的,这正如度量一样。这个结构确定一个曲率,它首次为 S. 韦伯斯特引进。我们证明,当给定切触结构之后,切触形式可以改变,使得韦伯斯特曲率是正的、零或负的。并且在最后一种情形下,可以成为负的常数。这个问题类似于 n 维黎曼流形经共形变换后,关于数量曲率的山路问题,这里 $n \geqslant 3$。前一问题化归为一个二阶次椭圆方程。切触结构使论证完成。

10. 附记

在结束本文前,我必须提及我的夫人在我的生活和工作中所起的作用。近 50 年来,无论是战争年代抑或和平时期,无论在顺境抑或逆境中,我们相濡以沫,过着朴素而充实的生活。我在数学研究中取得之成就实乃我俩共同努力之结晶。

13.《陈省身文选》前言和再版序

1989 年,张洪光编辑的《陈省身文选》由科学出版社出版。1991 年,该书由台湾联经出版公司再版。作者为该书写了前言并为再版写了序。

前言(1988)

我原来是喜欢写作的。我的母校天津扶轮中学(现名铁路一中)的校史资料室发现我于 1926 年曾在扶轮校刊发表过 7 篇文章,其中有两首新诗,一篇小说,一篇题为“科学与宗教”的文章,和几何学、化学、植物学的论文各一篇。我的太太郑士宁读了那两首“诗”,说:“你的思想没有改变。”我说:“你说我六十多年没有进步?”

我喜欢自由与独立,不肯随俗。这包括我 1934 年用留美的公费去留德法。这也包括我苦读 E. 嘉当的论文。1946 ~ 1948 年,我在南京中央研究院办数学研究所,正值国民党政府摇摇欲倒,我苦撑了三年。有一位朋友说,我把研究所办成了研究生院,这是很敏锐的观察。当时数学所的作风与他所不同。

联邦德国斯普林格公司曾出版我的数学论文选集第一集(1978)。预料此书问世时第二、三、四集都将出版。该公司的广告说,我创办了三个数学研究所,当指中央研究院、伯克利及南开。三者情形不同。但都是落在我的头上,不是我所追求的。我 1937 年离法就任清华大学教授,以为将在清华园终此一生,做一点学问上我所喜欢做的事。不料连清华园的大门都没有看见。再到清华,已是十年以后。人生真如空中一叶。

这本书是张洪光同志建议和编辑的。在此对他表示深切的谢意。若干原为英文的文章,经朋友们译成中文和校对,亦在此道谢。

再版序(1990)

这本文选的编印是张洪光先生建议的。它于 1989 年秋由科学出版社出版,今年将出第二版。我很感谢联经大学数学丛书的项武义、莫宗坚、康明昌先生把它收为丛书的一册。

我自然了解这是一项优待，因为本书的主题是"人"，不是一种数学，与他书不同。数学是人为的，人的故事应在数学上占一地位，但选择宜十分谨慎。数学的范围广泛而深刻，而作准确的报导，是很不容易的。

本书的传记部分自信大致是正确的。年来关于我的新闻报导，错误甚多，本书可作准绳。何炳棣、柯俊良先生精子平之学，说我的命"二德重逢，日月合朔"，"真官帝胜"，主极真极贵。我只希望以残年继续思考几个数学问题，仍能从此得到乐趣，所以极幸极贵也。

书中的"通俗"演讲，病在简略，读者需参考他著。但所提到的问题，大都是活跃的。如依此根据，向前发展，当有不少工作可做。这些演讲应该当作参考材料来读。

本版添了三篇文章，但相片却大大地减少了。《示性类与示性式》一文由康明昌先生亲自翻译，特此致谢。

14. 接受张奠宙访问时的谈话

此文首载于香港《二十一世纪》1992 年 4 月号。原题为《数学大师陈省身》。

访问者(张奠宙)的说明

1991 年我有幸访问位于加州伯克利镇小山巅上的美国国家数学研究所,因而躬逢其盛,得以参加当年十月同行为祝贺数学大师(也是创所所长)陈省身教授 80 华诞所举行的盛宴以及陈教授的答谢宴。随后,很幸运地,又获得了访问陈教授的良机。

陈省身是 20 世纪的数学大师,他在几何学上的贡献是划时代的,影响遍及于数学的整体。他所得到的各种荣誉,例如数学上最高的沃尔夫(Wolf)奖、中央研究院院士衔、美国全国科学院院士衔、英国皇家学会以及意大利科学院二者的国外院士衔、许多著名大学的荣誉博士衔等等,可说不胜枚举。但杨振宁以"欧高黎嘉陈"这句诗称颂他,将他与欧几里得、高斯、黎曼和嘉当这几位有史以来最伟大的几何学家相提并论,也许更能凸显他在数学史上的崇高地位。

要了解陈省身,要看清楚这么一位数学界的伟人,也许我们应该先从他那个时代的数学界看起。

1900 年前后,世界数坛上由法国与德国争雄。法国数学以庞加莱为代表,研究三体问题、微分方程定性理论、组合拓扑学以及测度理论等,极一时之盛。然而,德国因为大学不集中,发展更为蓬勃。德国的领袖数学家当推希尔伯特。后起的外尔、诺特、冯·诺伊曼等名家,全方位地研究泛函分析、李群论、数论、曲面几何、抽象代数,数学基础与数学物理等,数学研究充满了活力。那时的法国、英国、俄国等也产生了不少数学大家。但领袖地位无疑操在德国,而美国还在向欧洲派留学生学数学的阶段。

20 世纪初年,满清王朝处于风雨飘摇之中,内忧外患,使中国数学大体上只相当于 17 世纪牛顿时代的水平,落后于西方达 200 余年。1911 年辛亥革命之后,中国开始现代数学的征途。由于美国退回庚子赔款的关系,中国的第一个数学博士胡明复,于 1917 年毕业于哈佛大学;次年,中国第一个现代几何学家姜立夫自哈佛

大学取得博士学位;1928年,杨武之和孙光远以数论和几何研究同时从芝加哥大学取得博士学位。因此,美国对中国数学影响深远。30年代中国留德数学生中,杰出者有曾炯之等。惜曾不久去世,未能在中国发挥作用。

进入30年代之后,德国数学由于希特勒法西斯上台而日见式微,大批犹太血统数学名家流向美国。二次大战前后,美国遂成为世界数学中心。不过,30年代的微分几何学研究,则仍以德、法两国领先。在函数论王国的巴黎,有一个光辉的例外,那就是"超越时代"的嘉当,他的工作当时很少人看得懂,后来却成为几何研究的出发点。在德国,汉堡大学的布拉施克则是几何学的代表人物。

陈省身生于辛亥革命那年,15岁便到姜立夫主持的南开大学数学系就读,1930年转到清华大学,其后跟孙光远研修微分几何,尽得国内名师传授。他1934年赴德国汉堡,两年后在布拉施克指导下获博士学位;1936~1937年,又到巴黎接受嘉当的指导。在两位大师熏陶下,他迅即达到微分几何研究的前沿,成果累累。30年代前后,代数拓扑学兴起。这是研究整体性质的有力工具,对20世纪后期的数学发展有决定性影响。当时能注意、理解和运用拓扑学的数学家很少,陈省身是其中杰出的一个。

1943年,第二次世界大战正酣。陈省身应美国数学界领袖维布伦之邀,到美国普林斯顿高级研究所。此后两年间,他完成了一生中最重要的工作:证明高维的高斯-博内公式,构造了现今普遍使用的陈示性类,为整体微分几何奠定了基础。

陈省身在二次大战后回到中国,主持中央研究院的数学研究所。后来再度赴美,成为美国微分几何学派的领袖人物。本来,分析学一向是数学的主体,微分几何只是微积分在几何上的应用。但爱因斯坦广义相对论和杨(振宁)-米尔斯规范场论的推动,以及整体微分几何的形成,使得微分几何成为当代核心数学发展的主流学科,反过来影响分析学的发展。二次大战以后的数学,从线性数学转到非线性数学,从局部性质研究过渡到整体性质研究,从现实空间发展到研究一般的 n 维流形。微分几何恰好顺应了这一发展趋势。正因如此,陈省身"由于对整体微分几何学的杰出贡献,而对数学整体产生深远影响"而获得"沃尔夫奖"①。

陈省身虽是饮誉世界的大数学家,他的生平却平淡无奇。这儿没有硝烟弥漫的战场,没有引人入胜的侦探故事,没有如火如荼的政治事件,更没有五彩缤纷的感情世界。他所拥有的只是令人目眩的数学天地。然而,我们可以看到,他选择了最有意义的研究方向,得到了举世最好数学导师的教育,因而能顺应20世纪数学中心转移的历史脚步,把握最佳的工作机会。这里当然有"机会"、"幸运"的因素。但我们仔细分析,就会看到一位执着追求理想,才华横溢,有充实人生的数学家和哲人。

---

① 见沃尔夫基金会公告原文:"for outstanding contributions to global differential geometry, which have profoundly influenced all mathematics..."

陈省身的访问谈话

1991 年 10 月 28 日，张奠宙来到数学研究所三楼陈先生的办公室，对着窗外的金门大桥和旧金山海湾，开始了和这位数学大师的谈话。

格丁根、汉堡和巴黎

张 第二次大战以后的几十年中，微分几何学一直居于数学发展的主流地位，可算是当今的一个"热门"课题。请问您当初为什么选读几何学？

陈 说到"热门"，我倒是从不赶时髦的。我进入几何领域，可说完全由环境决定。我进南开碰到了姜立夫先生，他是研究几何的；毕业后，又遇到孙光远先生，他也是研究几何的，这就决定我走上微分几何的道路。如果单论个人兴趣，我也许更喜欢代数。

张 在 30 年代，微分几何是不是"热门"？

陈 不见得。分析一向是数学的主流。那时德国的格丁根学派有库朗的分析，E. 诺特的代数。英国有哈代和李特尔伍德的函数论——解析数论学派，法国的皮卡、勒贝格和蒙泰尔等名家主导的函数论研究仍然强盛，希尔伯特和巴拿赫等倡导的泛函分析相当流行。虽说黎曼几何学得到广义相对论的推动，但毕竟是"阳春白雪"，少人唱和，并非"热门"。

张 二次大战以前的世界数学中心在德国的格丁根，您为何不去格丁根"朝圣"，反而去了汉堡？

陈 我觉得选择工作地点应该以自己的计划为主，至于见大人物，虽可供谈助，但和学问实不相干。当然，有大人物的数学中心，人才集中，气氛和环境与一般地方是不一样的。

我去汉堡，首先是因为布拉施克来华讲学，他讲的内容我都懂（差不多同时，美国的 G.D. 伯克霍夫也来讲学，我却听不懂），因而可以进一步讨论。其次，我读过汉堡大学的学报上面的论文，引起很大兴趣。所以，我就去了汉堡。

张 那时的格丁根有没有很强的几何学家？

陈 有。如科-福桑；还有赫格洛茨，他是一个很伟大的数学家，搞的方向很广，也研究几何，刚体几何中就有赫格洛茨定理。不过，我还是觉得去汉堡较合适。

张 在汉堡，你获益很多吗？

陈 当然。除布拉施克之外，E. 阿廷和赫克都是非常强的数学家。年资较浅的还有 E. 凯勒、H. 彼得森、H. 察森豪斯等，其中凯勒对我帮助很多。

还记得 1934 ~ 1935 年间，我的主要精力花在凯勒的讨论班上。讨论的内容以一本著名的小册子《微分方程组引论》为主，那就是后来有名的嘉当-凯勒定理。讨

论班的第一天济济一堂，布拉施克、阿廷和赫克等都到场，但以后参加者愈来愈少，我是坚持到最后极少数人中的一个。将凯勒的理论用于网几何，再加上先前的一些结果，就构成了我的博士论文。我做学问，不赶热闹，有自己的想法，只选择最适合自己的工作去做。

张 在 30 年代，许多留学生一旦得了博士，便不再做研究了。您却到大数学家嘉当那里做"博士后"，显示您在事业上雄心勃勃。

陈 我读数学没有什么雄心。我只是想懂得数学。如果一个人的目的是名利，数学不是一条捷径。当时，最好的几何学家是嘉当，但在 30 年代，嘉当的工作很少人理解，被认为"超越时代"。我为嘉当的博学精深倾倒，遂于 1936 年 10 月到巴黎，在那里逗留了 10 个月。

话说回来，做研究实在是吃力而不一定讨好的事，所以学业告一段落便不再继续那是自然现象，中外皆然。在巴黎的庞加莱研究所有整架的精装博士论文陈列，但大部分作者都已经不知去向了。长期钻研数学是一件辛苦的事。何以有人愿这样做，有很多原因。对我来说，主要是这种活动给我满足。杨武之先生赠诗予我说"独步遥登百丈台"，实道出一种心境。我平生写了很多文章，甘苦自知，不是一言可尽的。

张 据说嘉当的工作很难懂，但您却把他的思想方法彻底掌握了，这可能是您成功的重要一步。

陈 是的。嘉当的主要工作是两方面：李群和外微分。这是研究微分几何强有力的新工具。要做"最好"的数学不掌握它不行。嘉当老是给我一些他所说的"小"题目，我回去研究，就变成了一篇篇的论文。也许因为我对他的指导总是有反应，他破例准许我到他家里访问，约每两周一次。谈完后第二天，还常会收到他的信，补充前一天的谈话内容。这些交往，使我理解了当时"最好"的几何学。

张 现在，大家都能理解嘉当的思想了吗？

陈 不一定。他的许多工作，即使到今天，也未见得被人普遍接受。我甚至说过，现在的许多微分几何学书籍都写得不好，他们总是从

$$\nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Y,Z]} X = R(Y,Z)X$$

这样的关系式出发，推演整个微分几何。其实，嘉当的方法还要考虑到联络与 ω，以及曲率与 Ω 这样两重关系。光是从上式出发，得不到许多好结果；倘若用我对嘉当的理解，则可以很容易得到。这一点我曾经提出过，但许多人仍旧不改。这倒也不错，我可以保留一种"秘密武器"，你们做不出的结果，我可以作出来，聊胜一筹。之所以发生这类情形，乃是因为几何是用代数控制的，不同的代数手段，会产生不同的几何结果。

普林斯顿和整体微分几何

张 那么，"整体微分几何"应是您想做的"最好"的数学了。

陈 微分几何学趋向整体是一个自然的趋势。了解了局部的性质以后,自然想知道它们的整体含义,但是意想不到的,则是有整体意义的几何现象。1943～1945年间在普林斯顿那一段时期,使我对数学的了解更增大了。研究整体几何学需要坚实的经典几何知识基础,要掌握当时刚刚诞生不久的代数拓扑理论,更要将嘉当创立的几何方法加以改造。这样才能别开生面,独树一帜。这样做,很费力,世界上涉足的人也很少,但这正是我追求的目标。

张 您去普林斯顿,是美国数学家维布伦和著名的外尔邀请的。他们希望您研究整体微分几何吗?

陈 没有。做甚么研究,完全由自己的意愿决定。我到普林斯顿去,主要是和维布伦的联系。1936年,当我还在巴黎时,维布伦写信给嘉当,询问有关投影正规坐标的事,这对维布伦学派的“几何途径”(geometry paths)很重要。他们想发展一个更高级的微分几何理论,突破爱因斯坦理论所考虑的洛仑兹空间的限制,以便做出统一场论。我知道投影正规坐标可以用多种方法定义,但都有缺陷,于是就提出了一种基于嘉当几何方法的定义,寄给维布伦,这给他很深的印象。我在西南联大时,又曾经由维布伦转交我自己和王宪钟的一些论文,因而和他相熟,但从未谋面,他并不知道我对整体微分几何感兴趣。

张 战争年代应邀去普林斯顿,应该是很少见的事。

陈 确实。那时普林斯顿的经费很少,战争又正在进行,请人是很困难的。他们不但对我的研究感兴趣,也因为我是一个中国人。那时,中国人搞科学研究的不多,不会威胁美国人的“饭碗”,所以他们也许会优先安排中国人访问。现在看来,我到普林斯顿是很幸运的,我一生“最好”的工作就在那里完成。

张 您去普林斯顿是一种幸运,那么做学问是否也有机遇的问题? 例如,选择了一个方向,有时做得出成果,有时却做不出来。

陈 机遇不能说没有,但我想主要是看能力。就像在茫茫荒漠上找寻石油,光凭机遇怎么行? 成功主要是靠地质学家的知识积累和科学判断能力。同样,即使有了数学问题,并不见得人人能解决,杰出的数学家就能解决别人做不出的问题。

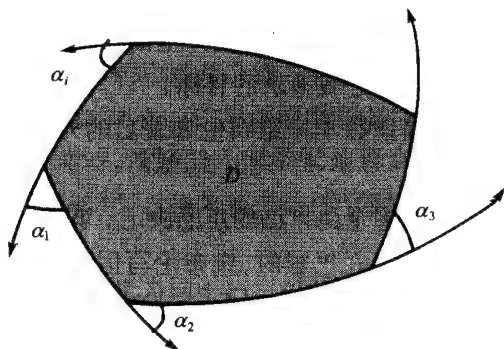
张 能请您以整体微分几何为例来谈谈好吗? 比如,您为甚么选择整体微分几何作为研究方向?

陈 数学家要能分别好数学与坏数学,或者不大好的数学。譬如读诗看画,有些伟大的作品,令人百读百看不厌,投地拜服。数学工作亦是如此: 从微分几何走向整体是一个自然的步骤。

但要能走这一步,必须作好工具的准备。我很早就注意代数拓扑的作用,1932年布拉施克在北京作题为“微分几何中的拓扑学问题”的演讲,实际上仍是讲局部微分几何。1933～1934年E. 施佩纳来华讲学,严格证明若尔当曲线将平面分为两部分的拓扑定理。我也听过江泽涵的一门拓扑课,但我当时觉得并未进入拓扑学

之门。直至亚历山德罗夫和霍普夫合著的《拓扑学》出版，情况才有变化。代数拓扑是很重要的一门数学，我对它兴味很浓。

张 那么，您又为什么选择高斯-博内公式作为研究的突破口呢？



二维高斯-博内公式

曲面上由有限个曲线弧相连而成的简单闭曲线 C，围成区域 D，各弧线外角为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$，则

$$\int_C \rho_z \mathrm{d}_s + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \iint_D K \mathrm{d}\sigma = 2\pi,$$

ρ 为 c 的曲率，K 是高斯曲率。它的特例是三角形的三个外角之和为 2π。

陈 我在西南联大教书时就对这一课题有不同平常的了解。大拓扑学家霍普夫于 1925 年的博士论文就研究高维的高斯-博内公式，他曾预言："高斯-博内公式在高维的推广是最重要的也是最困难的问题。"他将它推广到超曲面的情形。外尔也作过贡献。C. 艾伦多弗和 A. 韦伊更证明了一般高维黎曼流形的高斯-博内公式。但他们的流形，都是嵌在欧几里得空间中的。我到普林斯顿之后给出了一个完全"内蕴"的证明。我用的是长度为 1 的切向量丛，而外尔、艾伦多弗和韦伊所处理的都是一种"非内蕴"的球丛。这一截然不同，导致了高斯-博内公式的彻底解决。我走了不同的路，这需要能力。

张 您最著名的工作是"陈示性类"(Chern Class)，为什么其他示性类，都没有"陈示性类"来得重要？

陈 这需一种眼光去分析。主要的示性类有三种：

(1) 惠特尼示性类：一般的拓扑不变式；

(2) 庞特里亚金示性类：实流形上的拓扑不变式；

(3) 陈示性类：复向量丛上的拓扑不变式。

问题恰恰在于我所处理的是复向量丛。复数是一个神奇的领域。例如有了复数，任何代数方程都可以解，在实数范围就不可以。而我又着重研究向量丛，不仅

刻画底空间，更刻画了纤维丛。这样，“陈示性类”就有更广更深的含义。这种既有局部意义又有整体意义的数学结构具有普遍价值，因此可以影响到整个的数学。我的眼光集中在“复”结构上，“复丛”比“实丛”来得简单。在代数上复数域有简单的性质，群论上复线性群也如此，这大约是使得复向量丛有作用的主要原因。

数学家和数学学派

张　大家都要提高能力，可是怎样才能提高能力？是不是在于“用功”？

陈　当然必须用功。不过，用功与否不能看表面。成天呆在办公室里，没日没夜地看书、计算，草稿几麻袋，这是一种用功。但有些人东跑西看，散散步，谈谈天，也是在用功，而且说不定成就更大。当年在格丁根，范·德·瓦尔登成天呆在办公室里，而科-福桑则东跑西看，两人成就都很大。科-福桑在二维流形上的工作是开辟道路的。他东跑西看时，其实也在思考。

张　数学家成天计算，练技巧，证明难题和猜想，往往令人觉得像一位忙碌的工匠或工艺师。

陈　工匠和工艺师都是不可少的，优秀工艺品可以价值连城。问题是数学大厦的结构需要数学家去设计，而新学科的开辟，往往有赖于新的数学观念和思想。这些光靠坐在办公室里练技巧是不成的，必须广为涉猎，与人交谈通信，融会贯通，扩大视野。

张　从您的谈话中，觉得您很重视怎样提问题，怎样看下一步发展，观测未来。

陈　是的。我觉得搞数学的人，要做“以后有发展的东西”，不能只看眼前。看今后不是订计划，写在纸上，而是思考方向。有了方向，才能提出自己的问题，自己的构想。解决别人提出的猜想，固然很好，很重要，但解决自己提出的有重大意义的理论课题，岂非更好更重要？我在普林斯顿时，常和大数学家外尔闲聊，他就是向前看。他有一次对我说“看来代数几何学将会有大发展。”后来的事实果真如他所料。

张　现在大家都认为“强大的美国微分几何学派”多半受到您的影响[①]。您是怎样发挥这种影响的？

陈　学术影响主要是看工作，但个性也有关系。我喜欢与人交往：我和A. 韦伊的友谊已有半个世纪了；和博特、尼伦伯格、谢瓦莱、格里菲思、塞尔和希策布鲁赫等著名数学家也都合作写过论文。此外，我带学生，由我任导师获博士学位的超过40人；我也和许多年青数学家交往，联合发表论文。我想我能看出有意思的问题来做。

张　有些数学家则较少与人交往，例如周炜良先生。

---

① 见本书收录的《奥斯曼：几何学在美国的复兴：1938～1988》。

陈 周先生是我的老朋友。当年他和 M. 维克多结婚时，我是唯一的中国宾客。他是夜间工作者，白天睡到下午两三点钟，德国银行一点钟关门，每次取钱都得找我帮忙。周先生在代数几何方面成就很高，但生性澹泊，宁愿少和外界交往，把家庭生活安排得十分舒适，享受人生。当年中央研究院遴选院士，局外人很少了解他。我于是出来说："如果周炜良不是院士，我们这些院士都觉得有些惭愧了。"后来他选上了院士，但从不参加任何活动。

张 那么，您是否觉得数学家应多担任一些社会公职或行政工作，藉以扩大影响？

陈 不，不，完全没有那个意思。我自己就不愿负责行政事务，曾经辞谢美国数学学会主席的职务。但开创性的事务例如创办本研究所，则是有意思的。这里，我不妨说一件中国数学史上的轶事。中国数学会迟至 1935 年成立，原因也是北方的姜立夫、冯祖荀诸数学前辈怕麻烦，不愿负责行政。后来南方的顾澄愿意干这类事，但自知资格不够，于是请了交通大学的胡敦复先生任首届主席，这样才在上海创会。抗战时顾投入汪伪政权，后方成立了新中国数学会，会长是姜立夫先生。光复后，这两个会合并，选出姜先生任会长，胡敦复先生也很高兴，大家相处很融洽。

张 您是不是可以谈谈和法国布尔巴基学派的交往？

陈 A. 韦伊是布尔巴基学派的灵魂，和我是挚友，此外如 H. 嘉当、J. 迪厄多内和 C. 谢瓦莱等也都是好友，但我并没有加入他们的活动。1936 年至 1937 年间，我正在巴黎大学嘉当处做博士后，那年，早期的布尔巴基成员正组织每两周一次的"朱利亚"讨论班，中心议题就是"埃利·嘉当先生的工作"，那时我和他们却是有接触的。

张 布尔巴基学派最出名的工作是他们所写的《原理》丛书，您对它有甚么看法？

陈 据韦伊说，在 30 年代，他们觉得许多数学家的工作都经不起推敲，没有严格的逻辑基础。为了避免以讹传讹，他们就从最基础的"集合"开始，写一套丛书，表明凡是写在他们书上的东西都是靠得住的。所以这是一套基础书，不是教本。

张 现在有些数学家批评布尔巴基学派的做法束缚人的思想。

陈 那是读者自己的问题。作者写他的观点，你可以跟着走，也可以不跟，不能把责任推到作者头上。其实，韦伊等人本身数学工作十分深刻，气势恢宏，并不是以那套《原理》丛书作为研究模式的。

张 布尔巴基对几何学研究有甚么影响？

陈 影响不大，因为像微分几何学中的斯托克斯定理究竟要甚么样的条件才恰恰合适？光滑是充分条件，但不光滑到甚么程度才刚刚好使斯托克斯定理能够成立？这根本没法决定。因此后来他们也意识到有些数学结构，不能像他们那样弄得一清二楚。因此那套书后来没有继续，原来每一专题出一套书的想法也没有实现。此外，他们忽视应用数学，也是不妥的。

张 迪厄多内主张在中学里“打倒欧几里得几何”引起很多反感。

陈 我也不赞成迪厄多内的这个观点。他们那套书，只是数学的一个方面，并不是模范。数学如果只有一个模式，生命就会枯萎。

数学在苏联和中国

张 能不能谈谈苏联的几何学研究？

陈 我只想谈一点苏联的拓扑学研究。苏联的亚历山德罗夫、柯尔莫哥洛夫、庞特里亚金等都作过很好的拓扑学研究。1935 年的莫斯科拓扑会议是一次大检阅 。后来庞特里亚金转向控制论，亚历山德罗夫偏爱闭集，似乎有些偏，你仔细看惠特尼的文章(在美国数学会 100 周年纪念文集上)，就知道 1935 年之后，他自己代表了后来拓扑学发展的主要方向。惠特尼是数学大家，但他也是一个默默耕耘的人，只有数学家才知道他的工作。不过他还是得了沃尔夫奖。

张 关于数学史研究，您还能谈些意见吗？

陈 我有一点想法：现在的数学史著作，好像是“新闻汇集”，例如谁得了甚么奖、谁开了甚么会的消息之类，很少涉及数学发展的真正关键。有人建议我写一部微分几何学史，我打算试试，某段时期我当然是一个积极参加的人。但现在研究工作还很忙，何日动笔，十分渺茫。

另外，我心中还有一个中国数学史上的疑问：宋元时代中国数学发展得那么快，是否有外国的影响，例如阿拉伯人的影响？秦九韶在他的《数书九章》序中自己说得到“异人传授”，这句话有甚么意思？中国数学家之间有无来往？当时是否有讲数学的学院？这些都是有兴趣的问题。

张 您今年八十大寿，大家都向您致贺，希望您高寿。

陈 80 岁并没有太多可高兴的。未来是属于年青人的，希望在年青人身上。到我这个年纪已不可能有体育爱好，听音乐对我是浪费时间。不过，我的脑子并没有休息，所以每年仍能发表几篇论文。

张 您对中国数学发展的前景有甚么看法？

陈 总的来说很乐观，因为年青人上得很快。海峡两岸都是如此。台湾现在已有 200 名数学博士，大陆的博士人数也在迅速增加，现在需要的领袖人物自然会产生的。

张 中国数学家在国际数学家大会上应邀作一小时报告的还没有，作 45 分钟报告的也很少，究竟是实际水平差，还是别人不了解？

陈 我想还是别人缺乏了解的原因居多。中国长期在国际数学联盟(International Mathematical Union，即 IMU)之外，别人不熟悉你的工作，就得不到报告的机会。不过，没有被邀作报告不太重要，反正那只是新闻，过了就算了，不值得太计较。重要的还是努力把工作搞上去。许多极好的数学家从未在国际数学大会上

作过报告,但那并不影响他们的学术地位。

张 中国成为“二十一世纪数学大国”的愿望,能实现吗?

陈 “数学大国”并不是要“雄踞全球”,“征服一切”,只要能在中国本土上建立起数学队伍,与国外数学家进行平等的、独立的交往就好了。以中国之大,人口之多,实现这一点应该是不成问题的。

张 谢谢您。

陈省身后记(1992年1月)

读了张奠宙先生的访问记录,很觉惭愧。谈话中有些话可能是偏见,请读者不要太认真。但所举事实相信都是正确的。

21世纪的科学将蓬勃发展,使世界改观。只是前景无法预测,但数学必为基本的一支。原因是数学的出发点简单,一切根据逻辑,因此是一门坚强的学问。它何以在许多科学上都有用,则有点神秘了。个人的想法是:天下美妙的事件不多,“终归于一”,是很可能的。但学问能层出不穷的深邃(如三维几何),则难解了。

一个数学家的目的,是要了解数学。历史上数学的进展不外两途:增加对于已知材料的了解,和推广范围。近年来数学发展迅速,令人目眩。数学家只能选择一些方面,集中思考。在一个小天地内,可以有无穷乐趣。陶渊明说:“每有会意,便欣然忘食。”杜工部说:“文章千古事,得失寸心知。”这也是数学家的最高境界。

人的精力有限。我想数学家应求“先精一经”,如有余力,则由此出发,再求广博。要知道能精一经已是很大的成就了。

20世纪中国建立了近代数学的基础,成就可观。21世纪必然要看到中国数学的光明时代。愿同志们抱着信心,奋勇前进。

15. 与杰克逊的谈话

本文原载《Notices of American Mathematical Society》第45卷第7期,1998年,标题为《Interview with Shiing Shen Chern》,访问者A. Jackson。中译文见《数学译林》第18卷第2期,1999年;田义梅译,李叶舟校。

陈省身是目前世界上仍健在的最伟大的几何学家之一。他出生于1911年10月28日中国嘉兴。他父亲有法律学位,供职于政府部门。当陈省身幼年时,中国刚刚开始建立西方式的学院和大学。15岁他进入南开大学攻读物理。由于他觉得自己动手能力差,最后选择了数学。1930年,他进入清华大学研究生院。当时清华有一些从西方获得博士学位的中国数学家,如:孙光远,他是美国芝加哥大学莱恩的学生。20年后,陈成为莱恩在芝加哥的继承人。1932年德国汉堡大学布拉施克访问清华,他的演讲对陈产生很大影响。

杰: 你在中国学习之后,决定到西方获得博士学位?

陈: 1930年我在清华大学先做了一年助教,然后念三年研究生。之后清华给我奖学金去西方,我选择了比美国好的欧洲。当时一般人都选择去美国,但我对普林斯顿和哈佛没兴趣。

杰: 为什么?

陈: 当时这些学校不怎么好。我想成为一个几何学家,而美国没有我想研究的那种类型的几何,所以我想去欧洲。我虽然是一个初学者,但我有自己的一些想法。我对当时世界的数学状况,谁是最好的数学家,哪里是最好的数学中心,我都有想法。我的想法也许不对,但这是我自己的想法。我决定去汉堡,后来证实,这是一个很好的选择。19世纪末,科学(包括数学)的中心是德国,德国的数学中心是格丁根,柏林和慕尼黑也不错。当然,巴黎一直是一个中心。

1934年我从清华研究生院毕业。1933年希特勒在德国掌权。于是德国大学闹学潮,驱逐犹太人教授,格丁根也崩溃了。而汉堡变成了一个很好的地方。汉堡大学是第一次世界大战之后建立的新大学,虽然没那么有名,但数学系却是极好的,因此,我去那里正合适。

陈第一次接触E. 嘉当的工作是在汉堡。嘉当对陈的数学生涯有深刻的影响。

那时，汉堡大学的不支薪讲师凯勒是嘉当思想的主要支持者。凯勒正好写了一本书，这本书的主要定理现在称为嘉当-凯勒定理。当时凯勒在汉堡组织了一个讨论班。讨论班的第一天，所有的正教授——布拉施克、阿廷和赫克都参加了。

陈： 讨论班看上去像一个庆祝会，教室里坐满了人。凯勒拿着一叠自己刚刚出版的书，分发给每一个人。但是，书的主题很难，所以，后来许多人都不来听课了。我想我是唯一坚持到最后的一个人，因为我能跟上他讲的内容。不仅如此，我还利用他讲的方法解决另一个问题，并写出一篇论文。所以，讨论班对我来说是非常重要的。讨论班之后，我去看了凯勒。我们多次在一起吃午饭。那时，研究所附近有一个餐馆，我们一边吃饭一边讨论各种问题。我的德文很有限，而凯勒不会讲英语。不过，我们相处很好。之后我很快完成了我的论文。

大家都知道嘉当是最伟大的微分几何学家，但他写的文章很难懂。一个原因是他用了所谓的外微分运算。在微分几何中，当我们谈论流形时，一个困难是几何是由坐标来描述的，但坐标本身没有意义，坐标是可以变换的。为了处理这种情况，一个很重要的工具就是张量分析，或里奇运算。里奇运算对数学家来说是新的。在数学中有函数，给你一个函数，你计算，或加，或乘，或微分，都很具体。在几何里，几何的状态是由许多数来描述的，但你能任意地改变这些数，因此，要处理这些，你必须懂得里奇运算。

陈有三年奖学金，但他只用两年时间就完成了学业。第三年，布拉施克安排陈去巴黎与嘉当工作。那时，陈法语说得不太好，而嘉当只会说法语。当他们第一次见面时，嘉当给陈两个问题做。后来，他们偶然在庞加莱研究所的楼梯处遇见。陈告诉嘉当，不会做他给的题。嘉当要陈去他的办公室讨论。此后，陈定时地去嘉当办公室，这里经常吸引众多想与著名的数学家见面的学生。几个月后，嘉当邀请陈到他的家里去面谈。

陈： 通常与嘉当见面的第二天，会接到嘉当给我的信，他会告诉我："你离开之后，我想了很多你的问题……"他会有一些结果和更多的问题等等。他熟知所有关于单李群、李代数的文章。当你在街道上看到他并且他有一些想法时，他会拿出一些旧信封写些什么，并给你答案。为了得到相同的答案，有时我要花费几个小时，甚至几天的时间。我们差不多两周见一次面。显然我得非常努力工作。这种状况一直延续到 1937 年，之后我回中国。

当陈回到中国，他成为清华的数学教授。但中日战争极大地限制了他与中国之外的数学家的联系。他把他的处境写信告诉嘉当，嘉当寄给他一箱自己论文的预印本，包括一些老文章。陈花了大量时间阅读和思考。尽管孤立，陈仍不断发表文章，并引起国际上的注意。1943 年他收到维布伦要他去普林斯顿高级研究所的邀请。由于战争，陈花了一个星期，坐军用飞机才到达美国。在该研究所的两年期间，陈完成了广义高斯-博内定理的证明。该定理把任意维闭黎曼流形的欧拉示性

数表示为流形上曲率项的某种积分。该定理把局部几何和整体拓扑不变量结合在一起,这在陈的许多工作中是一个非常深刻的主题。

杰: 你认为在你的数学工作中哪些是最重要的?

陈: 我想是纤维空间的微分几何。你知道,数学有两个不同的方面。一个是一般理论。例如:人人都得学习点集拓扑,人人都得学习一些代数,这样这些就形成一种一般性的基础,一种一般性的理论,它们几乎包括了所有数学。还有一些课题,虽然它们很特殊,但在数学的应用中却起着重要的作用,以至你也得很好地了解它们。例如:一般线性群,或者酉群。它们到处出现,不管你是做物理还是数论。这样就有这方面的一般理论,它包含某种很漂亮的结果。纤维空间就是其中之一。给了你一个空间,它的纤维都很简单,是经典空间,但是它们以某种方式放在一起。这里就有一个非常基本的概念。在纤维空间中,联络概念很重要,而我的工作就是从这里开始的。通常最好的数学工作把某种理论与某些最特殊的问题联系起来。而特殊问题又促使一般理论发展。我利用这种想法给出了高斯-博内公式的第一个证明。高斯-博内公式是一个非常重要,非常基本的公式,这不仅在微分几何中,在整个数学中也是如此。在1943年到普林斯顿之前我就已经在考虑这个问题,所以在普林斯顿时的发展是很自然的。到普林斯顿后我遇见了韦伊,他刚和艾伦多弗一起发表了一篇论文①。韦伊和我成为好朋友,所以我们很自然地讨论起高斯-博内公式,之后我得到了我的证明。我想这是我最好的工作之一,因为,它解决了一个非常重要,非常基本的经典问题,并且这其中的思想是很新的。而为了利用这些思想,你需要某种创造才能,这不是轻而易举的,不是有了这些想法就能施行的,这里需要敏捷和灵巧。所以我认为这是一个非常好的工作。

杰: 示性类也是你非常重要的工作。

陈: 示性类给我的印象不是那样深。示性类很重要,因为它是纤维空间的基本不变量。而纤维空间又是那样重要,因而示性类也就产生了。不过这不需要我很多思考,它们经常出现,包括一阶陈类 c_1。在电磁中,人们需要复线丛的概念。而复线丛导致 c_1,这在狄拉克关于量子电动力学的文章中就有。当然狄拉克并不称其为 c_1。当 c_1 不为零时,就与所谓的磁单极有关。这样既然示性类出现在一些具体的、基本的问题中,所以非常重要。

杰: 当你40年代开始发展陈示性类理论的时候,你是否知道庞特里亚金的工作以及这样的事实,即一个实纤维丛的庞特里亚金示性类可以从它的复形式的陈示性类得到。

陈: 我的主要想法是人们应该研究复形式下的拓扑和整体几何。复的情形有较多的结构,在许多方面比实的情形简单。所以我引进了复情形的陈示性类,而实

① 这篇文章介绍了高斯-博内公式的一个证明,该证明依赖于这样一个事实:一个黎曼流形可以局部等距地嵌入到一个欧氏空间。而陈的证明仅仅利用了流形的内蕴性质。

的情形要复杂得多。我读过庞特里亚金的文章,但没有见到他的详细文章,不过我想他在英文版的《科学纪事》① 上发了摘要。我是从希策布鲁赫那里得知陈和庞特里亚金这两种示性类的关系的。陈示性类可以借助曲率,借助局部不变量来表示。我主要的兴趣在局部和整体之间的关系。当你研究空间时,你能够测量的都是局部性质。要紧的是某些局部性质和整体性质有关。高斯-博内公式最简单的情形即是一个三角形的三角之和为 180°。因此,可以说它早就出现在简单情形中了。

杰: 你被看做整体微分几何的主要代表之一。像嘉当一样,你在微分形式和联络等方面工作。但是德国学派,克林根柏格是其中的一个代表,用不同的方式做整体几何。他们不喜欢用微分形式,他们用测地线和比较定理等来推导。你怎么看这种差别?

陈: 没有本质差别。这是一种历史发展。例如为了做流形上的几何,标准的技巧就是里奇运算。基本问题是形式问题,这些问题是由李普希茨和克利斯托费尔解决的,特别是后者。而克利斯托费尔的想法又追溯到里奇,里奇写了关于里奇运算的书。所以包括外尔的所有人都通过里奇运算学习数学。张量分析是如此重要,以至人人都要学。这就是在微分几何中人们从张量分析开始的原因。不过在某些方面微分形式应该引入。我通常喜欢说,向量场像一个男人,而微分形式则像一个女人。社会必须有两性,一个是不够的。

陈 1943 ~ 1945 年在普林斯顿研究所,之后回中国两年,在那里他帮助建立了中央研究院数学所。1949 年他是芝加哥大学教授,1960 年到伯克利加利福尼亚大学。1979 年退休后,陈仍很活跃,特别是他帮助创建了伯克利的数学科学研究所,并于 1981 年到 1984 年受聘为第一任所长。陈培养了 41 位博士。这个数字不包括他经常回中国时与之接触的许许多多学生。由于中国的"文化大革命",这个国家失去了许多天才的数学家,而数学研究的传统也几乎丧失殆尽。陈做了许多事来恢复这种传统。特别是 1985 年在中国天津,他创建了南开数学研究所。

杰: 你多长时间回一次中国?

陈: 近年来我每年都回去。通常呆一个月或更长一点。我创办了南开数学研究所,而最重要的是找一些会呆在中国的好的年轻人。在这方面我们是成功的。例如龙以明(动力系统)、陈永川(离散数学)、张伟平(指标理论),以及方复全(微分拓扑),还有其他一些非常好的年轻人。我想在中国数学进步的主要障碍是工资太低。顺便提一句,国际数学联盟已选定北京为下一届国际数学家大会的地点。

杰: 你认为中国的数学会长足进步吗?

陈: 噢,当然。不过令我担心的是中国的数学家会太多。

① 俄罗斯科学院杂志。

杰：中国是一个大国，或许他们需要许多数学家。

陈：我认为他们不需要太多数学家。中国是一个大国，自然有大量天才，尤其在一些小地方。譬如高中生的国际奥林匹克数学竞赛，中国的成绩一般都很好。为了在这种竞赛中取得好成绩，学生就要训练。其结果是其他科目就可能忽视。现在中国的父母要他们的小孩多学英语，做生意，赚更多的钱。而比赛是不给钱的。我想有一年这种训练少了，当年中国的成绩会立刻掉下来。这毕竟是一个12亿人口的国家！任何一个公正的人都会理解，其生活水平不可能很高。

1934年当陈选择去德国攻读博士学位时，几何在美国还是一个不起眼的科目。而当他1979年退休时，在美国数学领域中，几何已成为最辉煌的方向之一。这种变化多半归功于陈。而陈对他的成就却极为谦虚。

陈：我不认为我能高瞻远瞩。我只是在做一些小问题。数学中大量概念和新的思想涌入，而你只是做一些问题，试图得到一些简单的解答，并给出一些证明。

杰：这就是说你观察事物，然后产生想法。

陈：对。在大部分情况下你一个想法也没有。而在较多情况中你的想法又不管用。

杰：你把自己描绘成为一个解题者，而不是一个创建理论的人。

陈：我想这中间的差别很小。每一个好的数学家都应该是一个解题者。不然你空有想法，怎么做出好的贡献？你解决了某些问题，你利用了某些概念。而数学贡献的价值，你可能就要等。你只能在未来看到它。评价一个数学家或一部分数学，很困难。譬如可微性这个概念。二三十年前，许多人不喜欢可微性。许多人对我说："我对任何有可微性概念的数学不感兴趣。"这些人想使数学变得简单些。而如果你排斥和可微性有关的概念，你就会排斥掉许多数学，而这就不行。这里牛顿和莱布尼茨起了作用。有趣的是数学中有些看法是有争议的。

杰：你能给出数学中有争议的看法的一些例子吗？

陈：其一是当今一些文章太长。例如有限单群的分类。谁会去读1 000页的证明？四色问题的证明亦如此。我想我们应该使数学更有趣。

我认为数学不会很快消亡。它会存留一些时间，因为有许许多多漂亮的事情需做。做数学是个人的行为。我不相信可以由一群人来做数学。基本上这是一种个人行为，从而也容易做。数学不需要许多仪器。所以它会延续一段时间。我不知道人类文明会持续多久，这是一个非常大的问题。但就数学本身，我们还会和它相处一段时间。

陈以86岁高龄在继续做数学。近年来他特别有兴趣的是芬斯勒几何。两年前他在《Notices》的一篇文章中讨论了这个题目。(《芬斯勒几何就是没有二次型限制的黎曼几何》，1996年9月，959～963页。)

陈：芬斯勒几何比黎曼几何范围要广得多，它可以以一种非常优美的方式来

处理。在今后几十年中，它会成为许多大学微分几何方面的基础课。在数学上我没有什么困难，所以当我做数学时，我是在欣赏它。这也就是为什么我一直在做数学，因为其他事我做不了。我已退休多年，人们问我是否还做数学。我想我的答案是：这是我能做的唯一一件事，没有其他我能做的事。我的一生就是这样。

16. 在南开大学和访问者的谈话

此文原载《科学》第52卷第4期，上海，2000年，原标题是《回归故乡，寄望南开——陈省身访谈录》。访问者为张奠宙、王善平、倪明。

1985年，国际数学大师陈省身挥笔写下"21世纪数学大国"的预言。这被称为中国数学的"陈省身猜想"。今年是2000年，在不少人心目中已属21世纪。"数学大国"离我们还有多远？

年初，笔者走访了在南开大学数学研究所度过严冬的陈先生。陈先生刚刚痛失相濡以沫60余年的老伴郑士宁女士。陈师母平静地离去，南开大学和陈先生决定让她长眠南开校园。陈省身是1948年的中央研究院的首批院士，1961年的美国科学院院士，1995年的中国科学院外籍院士。叶落归根，陈省身最终属于中国，属于南开。

2000年1月28日下午，笔者应约到达南开谊园对面的一座小楼，敲门进去，献上一束素雅的鲜花。

陈先生精神矍铄，记忆清晰，谈锋仍健。前后两次达6小时的谈话，并无倦意。这一次，笔者代表华东师范大学出版社来向陈先生报告出版《陈省身文集》的有关事宜，其中收录的一份"陈省身年谱"有许多地方需要核实。谈话从他的生平谈到中国数学的过去和未来。笔者摘取其中的一些片段，写成这篇访谈录，不断地留下这位数学伟人的思想和脚步。

问： 陈先生，听说您最近发表了关于"数学和诺贝尔奖"的文章。

陈： 数学没有诺贝尔奖。经济学本来也没有诺贝尔奖，是后来补上的。那一次，瑞典的数学家如果努力一点，数学也许就列上了。但是他们不喜欢活动。与科学接近的数学没有设，原来属于人文科学的经济学反倒列上了。不过我觉得数学没有诺贝尔奖也许是好事。研究数学不是为得奖，大家甘于平淡，远离功利，潜心研究，陶醉于数学。

问： 能够有一个世界性大奖，对于激励人的积极性还是很有作用的。您得过沃尔夫奖，还有一个是菲尔兹奖。这两个世界数学的最高奖仍旧是数学家所向往的。

陈： 菲尔兹奖的早期得奖者声望很高，许多得奖者都有重要的工作。菲尔兹奖能否维持这个水平似渐成问题。我想这和菲尔兹奖的评选过程有关。国际数学联盟没有钱，选择的评审委员会连开会的路费都没有，只能靠通讯发表意见和投票。于是委员会主席权力就很大，难免有一些片面性。菲尔兹奖当年不是大奖，所以有年龄限制。现在看来这个限制似不合理。

问： 现在国内的许多资格和获奖评审，"活动"得很厉害。难免有不公平的地方。

陈： 凡是要靠人的选举产生的事情，都需要活动。有些活动是必要的。例如和别人交往，参加国际活动，合作进行研究，以增进彼此间的了解。不会活动，人家根本不知道你在做什么，连人都没见过，叫人家怎么提名？但是有些不正常的活动，确实令人讨厌。外行人只知道某某奖，某某称号，不管别的，他们管理起来很省事。其实绝对公平是很困难的。

问： 那么，不善活动的数学家就不能获得很高的声誉么？

陈： 不！只要数学工作真正好，尽管不是"院士"，没有得奖，仍然会受到人们的尊敬。例如，2000 年 10 月 9 日到 13 日，在南开将要举行"周炜良、陈国才数学工作研讨会"。他们两人都非常淡于名利，没有什么"院士"称号，也没有得过什么大奖，现在却越来越觉得他们的工作十分重要。周炜良在代数几何上的成就很高，以他名字命名的专有名词，光是进入《岩波数学辞典》就有 5 个之多，很少有的。陈国才在美国一些大学执教，地位不高。1991 年在伊利诺伊大学平淡地过世。他很有想法，一直在做自己的研究，别人不理解他的工作，他也不在乎。他的工作类似于著名的德·拉姆定理，但德·拉姆定理是把微分的外形式与同调论联系起来，而他用同伦论来联系，所以很有创造性。现在人们认识到他的工作很重要。

问： 中国的廖山涛、严志达先生等也属于这一类型，默默地工作，不愿意出头露面，而数学成就很高。

陈： 廖山涛在芝加哥大学随我读博士。他很用功，大白天把窗帘拉起来，躺在床上想数学。其他的事不闻不问。当时美国的麦卡锡主义很猖獗，他却完全不知道。英语不行，第二外语更谈不上，所以多年来无法毕业。有一次我在教授会上，请大家特许他毕业，于是举手通过，终于拿到了博士学位。后来他回国，在动力系统研究中做出了重要工作。严志达三年级时就能和我讨论问题。这个人有才气，喜欢念念唐诗，有空了就想想数学。周炜良、陈国才、廖山涛、严志达都不善"活动"，但是都有个性，有自己的见解。所以他们实际上是成功的。比一些徒有其名的要好得多。

问： 您的这几位学生和朋友都不善于活动，您自己是不是也这样？

陈： 不！我喜欢活动。我的朋友很多。我喜欢交往，把工作和生活混合。和各种年龄、各种性格、各种身份的科学家，主要是数学家一起谈话、吃饭、合作研究。

但是,我不喜欢单纯的应酬,也不愿意担任行政职务。只有担任数学研究所所长是例外(指美国国家数学研究所和南开数学所,后者是在退休以后)。

问:我们注意到您和许多著名数学家进行合作研究,成效卓著。合作是怎样形成的呢?

陈:情况很不相同。莫泽是前任的国际数学联盟的主席。他写信给伍鸿熙,问 E. 嘉当著作中的一个问题。伍鸿熙转问我。对嘉当的东西我当然知道,于是就开始合作了,最后产生了一篇影响很大的文章,发表在《数学学报》(Acta Mathematica)上。我和格里菲思有许多合作,他当初在普林斯顿,读我的油印本小书《复流形》,很感兴趣,每年夏天到伯克利来和我讨论问题,不仅是礼节性的访问。数学讨论一多,也就开始了合作。后来他来伯克利工作,升了正教授。以后他又去普林斯顿,哈佛;接着到杜克大学担任高级行政职务,又接着任普林斯顿高级研究所所长。他还是国际数学联盟的秘书长,以后大概也会当主席。交往多,讨论多,合作也就会多。例如希策布鲁赫、博特等等名家都是在交往中形成合作。

问:还有一位西蒙斯。近来"陈省身-西蒙斯-威腾不变量"在文献上出现的频率非常高。

陈:西蒙斯是一位传奇人物。他在麻省理工学院毕业,喜欢微分几何,所以到了伯克利来跟我学。那年是 1959 年,我正在欧洲,他只好自学,自己读懂了,就贴布告让人家来听他讲,听的人还真不少,其中包括教授。后来我回伯克利,那时他已有导师,但是我们之间仍然交往很多。西蒙斯能力非常强,一边读书一边做生意。他没有很多的学术经历,就被纽约州立大学(石溪)聘为数学系系主任。我们合作的时候不知道这个不变量在物理上有什么应用。后来威腾(1990 年菲尔兹奖获得者)把它用于物理学研究,这也是始料不及的事。一些好的数学开始时不知道有什么用,后来却找到了大用处。所以我不大赞成把纯粹数学和应用数学对立起来的提法。西蒙斯后来作外汇交易经商成功,发了财。数学家也是多种多样的,我都可以和他们交往。

问:有一位中彩票大奖的学生为"陈省身讲座"捐 100 万美元,是怎么回事?

陈:乌米尼是伯克利毕业的。读本科时,他的成绩一般,想继续读研究生,要我帮忙。我觉得他还可以试试,就写了一封推荐信。他拿了博士学位后在一家计算机公司工作。平时有买彩票的习惯。结果有一次真中了,得了 2 200 万美金。于是拿出 100 万美金,在伯克利设立"陈省身讲座",用利息每年请一位世界级的数学家来讲学。现在共有 5 人应邀:先后是阿蒂亚、斯坦利、希策布鲁赫、塞尔、马宁。1999 年是 M. 阿廷(德国著名数学家 E. 阿廷的儿子),都是世界顶尖级的数学家。

问:现在国内的科学研究非常强调"创新",您如何看待数学上的创新?

陈:数学是"胜者为王"的学科,只有第一,没有第二。无论国内国外,已经有人发表了的结果,你不能再发表。在这个意义上说,数学研究都是创新。前些年,

中国的大学校长多是数学家，我想也是因为数学家的成果都是创新性，容易得到承认的缘故。但是，虽然数学成果都是创新的，毕竟还有好的数学和不大好的数学之分。现在许多关于创新的文章大多停留在口号阶段。

问： 什么是好的数学呢？

陈： 这很难下一个定义。但是大家心里都有数。举例来说，费马大定理的叙述很简单：$x^n + y^n = z^n$，当 $n \geqslant 3$ 时没有满足条件 $xyz \neq 0$ 的整数解。走在大街上可以对行人讲明白，但是证明很难，内涵很深。“方程”也是好的数学。从它产生以来的几千年中，始终在发展。一元一次方程、一元二次方程、多元联立方程、微分方程、积分方程、差分方程等等，发展永不穷竭。至于不大好的数学，往往是一些无病呻吟、支流末节、无关痛痒的问题。有些数学工作，没有自己的新概念和新方法，只是在别人工作的基础上做一些小的技巧性改进。作为初学者练兵，这未尝不可，但不可满足于此。

问： 张奠宙教授 1991 年在伯克利访问您时，您曾经有过“数学匠”和“数学师”的说法，不知您现在有何看法？

陈： 数学研究需要两种能力：一是有丰富的想象力，能够提出理论框架，构作概念，提出问题，找到关键。另一种能力是强大的攻坚能力，能把一个一个的具体对象构造出来，把不变量找出来，把要找的量准确地计算出来。像造一座大厦，要有人设计（工程师），还要有人建造（工匠）。数学也是一样，要有数学设计师，也要有数学工匠。两者都不可少。好的数学家都是一身二任，自己设计自己制造。就中国的现状来说，数学匠比较多，数学师比较少。多半是外国人设计建造，中国人扩建。有的连建造也说不上，只是“修补”而已。

问： 近几年来，您在提倡芬斯勒几何。这会是好的数学吗？

陈： 我想是的。从黎曼几何到芬斯勒几何是一个自然的进步。其实后者是黎曼当初提出来的一般情况。它是 1900 年希尔伯特提出的著名的 23 个问题中的最后一个——变分问题。我看到了前人没有看到的一个关系，芬斯勒几何整个地改观了。一本新书即将出版。很遗憾的是，我在中国已经讲了 5 年了，可是没有人跟上来。

问： 听说理由是“没有背景”和“不是热门”。

陈： 黎曼-芬斯勒几何根据于 1854 年黎曼的历史性论文。当时数学的重点是分析，所以它不太被人注意。它受人重视是由于广义相对论的应用。黎曼当时只讨论了二次形度量的特别情况，就是现在的黎曼几何，这种情况特别简单，是一个了不得的深入了解。现在我们知道，一般情况可以同样处理。请看我们的新书。黎-芬几何必然会有用，例如固态物理学。你说的两点批评充分说明了评者的无知，不足为怪。

问： 现任的国际数学联盟主席是巴西数学家帕利斯。有人说，巴西、印度、中

国是三个最大的发展中国家，您对这三个国家的数学情况都有许多了解。您认为哪一个国家的数学最好？

陈： 中国。理由很简单：中国有读书的传统。要对巴西的老百姓讲数学的重要性，让他们读数学，实在太难了。

问： 因此，您对中国会成为"21 世纪数学大国"依然充满信心？

陈： 当然。中国人的数学能力是不需要讨论的，现在需要的是进一步的努力。数学可以单独发展，不需要太多的支持。与其他科学比，发展较易，但是支持仍是必要的。中国的科学经费太少了，有时也用得不太有效。

17. 诗 四 首

回 国

(1974 年)

飘零纸笔过一生，世誉犹如春梦痕。
喜看家园成乐土，廿一世纪国无伦。

寿士宁六十

(1975 年)

乙卯九月值士宁花甲之期缀句述怀

三十六年共欢愁，无情光阴逼人来。
摩天蹈海岂素志，养儿育女赖汝才。
幸有文章慰晚景，愧遗井臼倍劳辛。
小山[1] 白首人生福，不觉壶中日月长。

访理论物理研究所

1980 年 9 月 3 日去理论物理研究所，归而赋此。

物理几何是一家，共同携手到天涯。
黑洞单极穷奥秘，纤维联络织绵霞。
进化方程孤立异，对偶曲率瞬息空。
畴算竟有天人用，拈花一笑不言中。

七十五岁生日偶成

(1986 年)

百年已过四分三，浪迹平生亦自欢。
何日闭门读书好，松风浓雾故人谈。

---

① 在美居城名 EL CERRITO，系西班牙文，译名小山。

SYZY

二、师友之忆

数学文明的传承，是一辈辈数学家的努力，又是国际交流的结果。这部分文字记叙了数学家之间的友谊，充满着诚挚而深沉的感情。

18. 立夫师在昆明

此文录自《陈省身文选》,科学出版社,1989 年。

立夫师的生平业迹,已有吴大任、姜淑雁、江泽涵等的记述。本文只叙他在昆明西南联大的二三事。

1939～1940 年我们曾同住一段时期。那年 7 月我同士宁结婚,我们的家就在昆明大西门内大富春街。那是一座中式的楼房,中有天井。楼上住了饶毓泰先生及北大地质系孙云铸先生两家,楼下正房住了姜先生及淑雁一家,楼下厢房则住房主人陈西屏先生。陈先生曾任云南的地方官,房子建得坚固,当时也相当新。饶先生去了上海,把他的厢房让我们住。1986 年春我们重去昆明,房子仍在。

大西门离联大步行约 20 分钟,可以经过翠湖公园,风景幽美。我们有时同去学校或同归,无话不谈。姜先生知识广博,见事清楚,律己严格,足为后学者的模范。记得胡适曾有一文说姜先生是当代的圣人。(他列举的人中还有一位是张元济先生。)我十分同意。

当时西南的科学空气相当浓厚,聚会渐多。数学家感觉有组织学会的必要。1935 年上海交通大学的胡敦复、朱公谨等教授倡议并组织了"中国数学会",会址设在上海,与西南各省无法联络。所以我们成立一会,叫做"新中国数学会",立夫师任会长,我任文书,华罗庚任会计,理事有陈建功、江泽涵、苏步青等人。记得成立大会时陈建功先生由贵州赶来出席。

这个会只为实际上活动方便,并无对立的意思。所以胜利以后,1948 年职员全体改选,新中国数学会便没有了。会务活动直到解放以后才积极进行。

立夫师的另一活动是成立了当时中央研究院数学研究所筹备处。这事决定于 1941 年 3 月,由立夫师任筹备处主任。他洞鉴了当时中国数学界的情形,只求切实工作,未尝躁进,树立了模范。胜利后筹备处迁上海,立夫师去美。1946 年数学研究所正式成立于南京,立夫师任所长,我是代理所长。数学研究所在南京九华山盖了新楼,这房子现为科学院南京分院所用。

19. 我与杨家两代的因缘

原载香港《明报》1987 年 1 月 9 日。

中文大学杨振宁图书室开幕，不可无祝。记与武之先生、振宁两代半世纪的关系，以代贺辞。

我于 1930 年从南开大学毕业，投考入清华研究院。9 月去报到，才知因为只有我一个学生，数学系决定缓办一年，聘我为助教。那时数学系最活跃的两位教授，是孙光远和杨武之先生。我从孙先生习几何，比较相熟。杨先生专长代数，有时在办公室谈天，觉得他为人正直，通达情理。那时数学系教员连我在内共 7 人，曾多次到杨家吃饭，振宁才 8 岁。

杨、孙二先生都是芝加哥大学博士。清华后来聘请的胡坤升先生也是芝大博士。振宁又是芝大出身，而我则于 1949 年到 1960 年在芝大教了 11 年。我们同芝大真是有缘了。

我入研究院后曾选读武之先生的"群论"课。那时搞代数的年轻人有华罗庚和柯召，在同一班上。武之先生有时同我们谈到振宁的早慧。往事历历，不禁沧桑之感。

我同杨先生接触较多的一年是 1934 年。那年他代理系主任，我则从研究院毕业，准备去德国留学。我因论文导师孙先生去了中央大学，成了"孤儿"，办理毕业与留学，不全顺利，杨先生是我在学校里最可靠的朋友。

我同士宁的婚姻是杨先生促成的，1937 年我们在长沙订婚，他是介绍人之一。

1938 年起在昆明西南联大，杨先生是清华的系主任，振宁则是物理系的学生。振宁曾选读过我的好几门课，包括为研究院开设的法国大数学家嘉当的偏微分方程组的理论。联大的学生优秀。那时我的班上数学系有王宪钟、严志达、吴光磊等，物理系除振宁外还有张守廉、黄昆等，这些人后来都有独特的贡献，成为各方面的领袖。"得天下之英才而教育之"，是我一生的幸运。尤其幸运的是这群好学生对我的要求和督促，使我对课材有更深入的了解。振宁在班上是一个活跃的学生。那时中外隔断，设备奇缺。但是我们的学术生活并不十分贫乏。

事后想来，我们必曾注意到嘉当在 1923 年、1924 年关于相对论的两篇重要论文。他的处理方法可用到任意纤维丛的联络。这也是物理上规范场论的几何基

础。40 年来这些都发展为数学上的基本概念。

1945 年振宁来美国留学。在他去芝加哥前,我们曾在普林斯顿相见。

等到我 1949 年夏去芝加哥任教,振宁在物理系任教员,时常相会。1954 年、1955 年我从芝加哥休假,去普林斯顿一年,振宁在彼。我们见面常谈学问。很奇怪的,杨-米尔斯场论发表于 1954 年,我的示性类论文发表于 1946 年,而我于 1949 年初在普林斯顿讲了一学期的联络论,后来印成笔记,我们竟不知道我们的工作有如此密切的关系。20 年后两者的重要性渐为人所了解,我们才恍然,我们所碰到的是同一大象的两个不同部分。

矢量丛的联络已成为数学的基本概念,相信在不久的将来,它将成为高等微积分课程的课材。它的观念其实很简单自然。它有局部的和整体的性质。两者的关系便成为微分几何学家研究的对象。这个观念同物理学的场论自然符合。数学家得到现在的认识,花了几十年功夫。譬如沙漠求泉,得来不易;海底探宝,获珠为难。科学家献身而辛勤,非常人所可了解。他的酬报是得宝后的快乐。

在物理上重要的一个特别情形,振宁与米尔斯能独立看出这些深刻的数学性质,这是十分惊人的。许多物理学家认为物理学家不必读太多数学,因为他们应该能发现所需要的数学。这是一个例子。1954 年杨-米尔斯的非阿贝尔规范场论是一个大胆的尝试。现在大家公认,物理上的一切场都是规范场。

振宁在基本粒子论另一个重要贡献是他同李政道关于宇称可能不守恒(Non-conservation of Parity)的建议。他们因此于 1957 年获得诺贝尔奖。振宁在理论物理领域还有许多重要的工作,都富有独立性与创造性。在理论物理学家中,他以超人的数学能力见长。

我同杨氏父子的关系,有几点值得特别提出的:第一,武之先生促成我的婚姻,使我有一幸福的家庭。第二,振宁在规范场的工作同我在纤维丛的工作,有一共同出发点。我们走了不同的方向,在物理和在数学上都成为一项重要的发展。这在历史上当是佳话。第三,他们每人送我一首诗。社会对我的认识,这两首诗的作用很大。1962 年夏天武之先生及杨师母在瑞士日内瓦小住,我专程去看他们,相聚数日。杨先生送我以下的诗:

冲破乌烟阔壮游　　果然捷足占鳌头
昔贤今圣追多让　　独步遥登百丈楼
汉堡巴黎访大师　　艺林学海植深基
蒲城身手传高奇　　畴史新添一健儿

振宁在一篇文章中为我作了下诗:

天衣岂无缝　　匠心剪接成
浑然归一体　　广邃妙绝伦
造化爱几何　　四力纤维能
千古寸心事　　欧高黎嘉陈

最后一句不敢当，姑妄听之而已。

1986年春，天津南开大学授振宁名誉教授名义。他来南开，并参观南开数学研究所。我们决定在所中成立理论物理组，由他指导。先后50年，从联大到南开（南开是联大的一员），造物主待我们厚矣。

20. 六十余年的友谊

《杨-米尔斯方程和杨-巴克斯特方程》是作者为庆贺杨振宁70寿辰而作，本文是其中的第一部分。原作为英文，收入刘兆玄和丘成桐编：《Chen Ning Yang—A Great Physicist of The Twentieth Century》，Hong Kong：International Press，1995年。中译者：张奠宙。

我第一次遇到振宁是在1930年秋天，那时我刚成为北京清华大学数学系的一名助教。数学系很小，只有4位教授，2名教员，我则是唯一的助教。振宁的父亲杨武之(克纯)教授，是系里的一位代数学家。我不时到他家作客，看到只8岁的振宁，而我则是19岁。我们彼此一定说过话，但没有太多的接触。杨武之教授几次提及作为小学生振宁的聪慧，这给我深刻的印象。

由于战争的关系，清华大学于1937年迁到长沙，1938年再迁到昆明。我在国外留学三年后回清华任教，而他则成为一名大学生。大约在1940年前后，振宁修读我讲的微分几何课程，以及一些后续的高级课题讨论班。那时我正在努力学习E.嘉当的工作，认识到联络概念所起的中心作用，并写了几篇讨论对已知几何结构赋予联络的论文。我很高兴地说，我们两人的工作都和联络有关。

在准备这篇报告的时候，我学习了有关杨振宁的若干工作。物理学，对我来说一直是很难的。我希望向大家报告(从数学家的眼光来看)我已经学到了些什么。

21. 回忆杨武之

这是接见张友余女士的访谈记录。原载《科学》第49卷第1期，上海，1997年。

【访谈者的说明】 1996年5月，著名数学家陈省身、吴文俊应贵州省数学会邀请赴黔访问讲学。我有幸受到约邀，前去聆听两位大师的报告。并借此机会，继续去年在清华大学参加纪念中国数学会成立60周年会议时对陈省身教授的采访。

5月23日下午，两位大师与贵阳市一中的师生见面后，陈老留在休息室内休息，由于控制极严，我在人群中钻空挤到陈老跟前，但说了几句话便被制止。陈老看出我的心情，决定让我随车到他下榻的宾馆去。采访即在宾馆会客厅进行，气氛随意而融洽，在场的还有郑士宁师母及《中国现代数学家传》编辑部成员严瑜。陈老对我的提问很感兴趣，认真思索，细叙半个多世纪以前的往事，我们谈话的主题是杨武之先生的史绩及关于中国数学史的研究。

张：今年是杨振宁的父亲杨武之先生诞辰100周年。杨武之是您的老师，过去您曾多次提到他。为纪念已故先辈，想请陈老较详细地介绍杨武之的有关情况以及他的贡献。

陈：杨武之先生(1896~1973)，安徽合肥人。1928年在美国芝加哥大学获得博士学位。他是当时美国著名的代数、数论专家迪克森的学生，杨先生主攻数论方面的堆垒问题，是我国代数数论领域的第一个博士学位获得者。杨先生获得博士后即回国，先在厦门大学教书，以后才到清华。我到清华时，他已经是那里的教授。清华大学早期有关代数数论方面的课程，都是杨先生开，我入研究院后，曾选读他开的"群论"课。华罗庚到清华，最早就是跟杨先生学习研究初等数论，发表了十多篇这类内容的论文，杨先生看出华罗庚是一位很有发展前途的青年，不久就鼓励他研究当时新发展的解析数论，鼓励他向新的方向进攻；以后又支持帮助他到英国剑桥大学，去跟随名师哈代深造。那时的剑桥大学是世界解析数论研究的中心之一，华罗庚去剑桥进修两年，经世界名师指点，进步很快。不出所料，几年后就写出了具有世界先进水平的《堆垒素数论》。

张：1941年，华罗庚著的《堆垒素数论》送交教育部申请国家奖励金。两位评

审专家现已查明,一位是熊庆来,另一位很可能是何鲁。杨武之是专门研究数论的博士,为什么没有直接参加评审?

陈: 我的猜想,因为杨武之是清华的,与华罗庚同在一个系,属推荐单位,评审人员可能需要请本单位以外的专家。那时熊庆来是云南大学校长,何鲁是重庆大学教授。华罗庚获奖后,我们新中国数学会在西南联大专门为此开了一个小型庆贺会,记得杨先生好像参加了这个庆贺会,当时他是西南联大数学系的系主任。

张: 杨先生对您主要有过哪些帮助?

陈: 我在清华读研究生时,数学系最活跃的两位教授是孙光远和杨武之,我主要是跟孙先生学几何,选读杨先生的课。与杨先生接触最多的是 1934 年前半年,那时,我的导师孙光远被南京的中央大学请走了,系主任熊庆来正在法国进修,杨先生代理清华数学系主任。我毕业和出国的选择等问题,常去找杨先生商量。我是清华数学研究所的第一个毕业生,大概也是中国授予的第一个数学专业的硕士生,杨先生帮助我办理了毕业和学位授予的手续。毕业后,我得到清华公费留学两年的资助,清华公费留学一般是派往美国,我希望去德国,继续跟已经熟悉的布拉施克学习。布氏 1932 年曾应邀来北京大学讲学,是一个很有创见的几何学家,是当时德国汉堡大学的几何教授、德国几何学的领袖。我去德国的想法得到杨先生的积极支持,我第一次出国没有经验,在申请改派和办理出国手续中,杨先生帮了很多忙,他是我那时在学校里最可靠的朋友。

去德国汉堡读博士的决策,对我后来的学术发展影响很大,是一个明智的选择。1962 年,杨先生和师母去日内瓦和振宁小住,我专程从美国去看望他们,杨先生送我一首诗:

冲破乌烟阔壮游　　果然捷足占鳌头
昔贤今圣遑多让　　独步遥登百丈楼
汉堡巴黎访大师　　艺林学海植深基
蒲城身手传高奇　　畴史新添一健儿

诗中提到的就是 1934 年去德国汉堡,两年后又转到法国巴黎继续研究,为我后来的发展打下了坚实的基础。

此外,杨先生还促成了我和士宁的婚姻,使我一生有个幸福的家庭,成为我在数学研究中取得成就的重要保障。

张: 您和华罗庚都是世界著名数学家,年轻一代世界知名的陈景润,是杨武之的学生华罗庚和闵嗣鹤的学生,与杨武之的教育可以说有间接关系。他的儿子杨振宁又是诺贝尔奖金获得者。因此,我认为杨武之先生是我国 20 世纪育才成就极卓著的一位数学教育家。

陈: 杨先生确实培养了不少杰出的人才,代数、数论方面有成就的还有柯召、段学复等,他们都是杨武之的学生。从 20 年代末到 40 年代末,清华大学数学系的

学生,差不多都受过杨先生的教育,他教书教得很好,人缘也好,对学生很负责任,不仅在学业上,其他各方面都很关心,学生们把他当成可靠的朋友,遇事愿意去找他商量或帮忙。

杨先生最早学习研究初等数论,发表过有价值的论文。他后来的工作,偏于教育方面。在中国当时的环境,这个选择是自然而合理的。他的洞察力很强,善于引导学生创新,鼓励支持他们到世界研究的前沿去深造,去施展他们的才能。迈出去这一步,不少青年都得到过他的指点帮助,经他培养教育过的学生中,后来有杰出成就的很不少。

抗战前夕,熊庆来到云南大学当校长,他接替了清华数学系主任的职务一直到1948年,同时还兼任清华数学研究所的主任。在工作中,他善于团结同事、知人善用。特别是抗日战争期间,他担任内迁设在昆明的西南联大数学系主任多年,这个系云集了清华、北大、南开三所学校的十多位教授,当时中国最好的大部分数学教授都聚集在这里,下面还带有一批很聪明能干的讲师、助教。在战争环境中,条件异常艰苦,系主任杨先生巧妙地将大家凝聚在一起。让年长一点的教授上基础课,把好教学质量关;支持正处于发展开拓时期、刚留学归国、30岁左右的几位年轻教授,带领一批讲师助教和部分高年级学生,组织各种学术讨论班,研究世界前沿的数学问题。虽然战时的昆明信息闭塞,但有我们刚从国外带回的最新资料,充分发挥人脑的思维作用,人尽其才,大家搞数学研究的热情依然很高。几年中取得的科研成果是西南联大各学科中最突出的,有些成果超过了战前水平,华罗庚、许宝騄就是其中的佼佼者,在他们的带领下,还锻炼培养了一批青年。

杨先生在清华大学、西南联大数学系任教授、当系主任几十年,通过他的学术水平、教育才能和组织才能,培养出的学生后来在学术上、教学上超过他的人才不少,他的这些学生对中国数学的发展起了很大的作用。杨武之是一位杰出的数学教育家,确实值得纪念!

张: 过去对杨武之的事迹宣传很少,多数人仅知道他是杨振宁的父亲、一位数学教授,对于他的业绩知道的人不多。值此纪念杨武之诞辰100周年之际,我们很希望能够见到一本纪念杨武之的文集出版,总结他的教育经验,以促进我国21世纪数学教育事业的发展。

陈: 这是一件好事,最近我会见到振宁,可以和他谈谈此事。谁来任主编较合适呢?不知段学复先生的身体怎样?如果段先生能够出面牵头比较合适,再找其他人帮助做具体工作。研究一下约稿的内容和对象,我还可以写一点。

张: 最近十多年来,您多次向我国数学界建议要重视数学史的研究。20世纪即将结束,很希望听听您关于开展20世纪中国数学史研究的指教。

陈: 数学史研究是一项重要的工作,并不容易。它的一个重要条件,是工作者须有广博的学问,举例如次。例一,何以希尔伯特伟大?除了他的专长,如积分方

程、代数数论、几何基础等外，他能解决其他方面最基本的问题，如狄利克雷原理（椭圆方程的基本存在定理）、华林问题等。例二，哈代喜欢提出如下的问题：比较拉格朗日与拉普拉斯何人伟大？这样的问题有意思，因为作者需要了解两人的工作。

什么东西发展都有一个历史的程序，了解历史的变化是了解这门学科的一个步骤。数学也是这样，中国人应该搞具有中国特色的数学，不要老跟着人家走。发展中国数学，我觉得最关键的一点是如何培养中国自己的高级数学人才，世界一流水平的人才。总结20世纪，了解这个世纪中国数学家成长的道路，现代数学在中国发展成功的经验，写数学家传是一个重要方面，还可以选一些好的专题进行研究。譬如：清华大学数学系早期培养人才的经验，留法学生对中国数学发展的贡献等，也可以考虑编一本论文目录。不一定什么都写，典型的专题研究会有好的借鉴作用。现在已经有一些优秀青年数学家回到国内服务，南开就有几个，他们的工作很出色。有个陈永川，回国后办了一份杂志叫《组合年刊》(英文)，由德国斯普林格出版社出版，质量很高，这将有利于中国组合数学走向世界。还有张伟平等，都不错。他们30岁出头，很年轻，是中国21世纪数学发展的希望。

谈话间，郑士宁师母有时也补充几句，偶尔伴随两句笑话，其乐融融。不觉过了规定的访谈时间，接待人员进屋示意。面对这位为发展中国数学事业不辞辛劳满头银发的长辈，我不禁又补充了几句。

张：陈老，您和郑士宁师母都已是80多岁高龄，近年您的腿脚又不甚方便，为了中国数学事业的发展，你们每年仍然奔波于美国、中国之间，做了大量工作，培养了众多人才，你们的爱国深情，给我们做了好的榜样。我想中国的子孙后代是不会忘记的，您的功德将永载史册。

陈：每年好像都有许多事情等着我回来办。我愿意尽最大努力，为中国数学的发展，多做点可以办到的实事。数学工作是分头去做的，竞争是努力的一部分。但有一原则：要欣赏别人的好工作，看成对自己的一份鼓励，排除妒嫉的心理。中国的数学是全体中国人的。中国在21世纪成为数学大国是很有希望的！

22. 周 炜 良

本文为悼念周炜良逝世而作，原载《Notices of American Mathematical Society》第43卷第10期，1996年。中译文见《中国现代数学家传》（第四卷）（程民德主编，江苏教育出版社）2000年；王辉译，李文林校。

在久病之后，炜良于1995年8月10日去世。他同我于1934年10月在德国的汉堡初次相见，那时我作为一名新生刚刚从中国来，而他正从格丁根往莱比锡去跟随范·德·瓦尔登一起工作。

炜良出身于前清贵族家庭，其家族负责人对中国西化的重要性已有所认识。凭借丰厚的家财和开明的观点，这个家庭在19世纪末和20世纪初期为中国社会的不同领域培养出了不少领袖人物。或许由于家庭条件影响，炜良没有上过一所中国学校。然而通过私人教师的辅导，他对中国的语言和历史都非常熟悉。他的家庭状况足以使他在美国完成大学学业。1931年，他在芝加哥大学取得学士学位。在芝加哥的岁月里，他逐渐地将兴趣集中到数学上。1932年，他去了当时世界上最大的数学中心之一——格丁根。不幸的是，那段时期德国所发生的一些政治事件使他在格丁根的停留十分不快，于是他决定去莱比锡跟随范·德·瓦尔登工作。

恰值此际，我们在汉堡相遇。格丁根的衰落使得汉堡新兴为德国一个重要的数学中心。其最具魅力的人物便是年轻教授阿廷，他的学术讲座十分精彩，数学兴趣相当广泛。尽管炜良是莱比锡大学的一名学生，但德国的大学体制容许他生活在汉堡。除了要接近阿廷之外，他还有一个更重要的目的，就是赢得一位年轻女士玛格特·维克多的爱情。他们于1936年结婚，我有幸参加了他们的婚礼。

炜良于婚后返回中国，在当时中国首都南京的中央大学任数学教授。第二年，中国沦入战争，沿海省市被日军占领。

战争结束后，我们于1946年在上海重逢。十年战事，炜良实际上已经停止了他的研究。问题是，对他而言，再次回到数学上来是否明智或者合适。

他的再次投入相当成功，我简直视之为奇迹。他以1947～1949年在普林斯顿高级研究所从事研究为起点，此后便受聘于霍普金斯大学，直到1977年退休。在霍普金斯他担任了10多年系主任，同时负责霍普金斯出版的美国最悠久的数学刊

物——《美国数学杂志》。

尽管炜良的专业是代数几何，但他是一位富有创见，涉猎广泛的数学家。他对于数学作出了许多重要的贡献。

1. 相交理论(intersection theory)是代数几何中一个基本问题。周环(Chow ring)有很多优点，并被广泛应用。

2. 周配型(associated forms)很好地描述了射影空间代数簇的模空间。相当漂亮地解决了一个重要问题。

3. 他的阐明射影空间上的紧解析簇是代数簇的定理相当有名。他揭示了代数几何与代数数论彼此之间的类似之处。

4. 在推广热力学卡拉西奥多里结果的基础上，他建立了一条微分系统的可达性定理。这一定理在控制论中具有重要作用。

5. 他有一篇鲜为人知的关于齐次空间的论文，通过精巧的计算对所谓矩阵射影几何给出了一个漂亮的处理，他的论述可以推广到更为一般的情况。

周过着一种简朴、恬静的生活，他把他的精力全部奉献给了数学和其他文化活动，包括集邮。他是一位中国邮票的权威，还出过一本相关的书。炜良和玛格特有三个女儿，他们拥有一个幸福美满的家庭。

不容置疑，他是一位一流的代数几何学家。我曾在扎里斯基的支持下提名他为[美国]全国科学院院士，遗憾的是未能获准。我想这对科学院来说是一大损失。

23. 忆 炯 之

原载《著名数学家曾炯博士纪念文集》,江西科学技术出版社,1993年。

我是在1934年10月在德国汉堡认识炯之的。那时他刚完成他的有名的关于"函数域可除代数"(Division Algebra)的基本定理,来汉堡作博士后研究。炯之为人诚恳、豁达,没有人不喜欢他。那年在汉堡的中国数学家,还有姜立夫先生、程毓淮、周炜良等。我们时常共餐,畅谈对于发展中国数学的抱负和计划,回顾半世纪中国数学的进展,感慨系之。炯之和我都喜欢吃烤鹅,确是德菜中的美味。

汉堡一别,我们没有再见,通信亦稀。他回国后没有充分发展他的才力,是国家的损失。

24. 七十一年的友谊

本文为纪念吴大任先生逝世而作，附挽联。原载于《吴大任纪念文集》，南开大学出版社，1998 年。

我同大任初识，当在 1926 年我们同入南开大学的时候。我们都是一年级新生。那时我 14 岁，他比我大 3 岁。他已是名人。他是南开中学毕业，得奖学金来南大的。他住第一宿舍，我住第二宿舍。第一年我们很少来往。

我除国文、英文外选了微积分、物理、理论力学三课。下学期开始去注册，见了伉乃如先生，他说"你都及格了"。那时遇到这情况，也是不简单的。

入校时我们似乎都是想进物理系。姜立夫先生的教学，似是吸引我们入数学系的主要因素。毕业后的理想出路自然是出国留学。但是我们的家庭都谈不上作这样的负担。留学的机会极少，并且要经全国性竞争。

刚巧 1930 年我们毕业那年，清华开办研究院，有数学系。并规定成绩优秀者可资送留学两年。所以我们决定去投考清华研究院，也都考取了。但大任因家庭关系，续学与就业不易决定。结果他还是去了广州中山大学担任助教。清华研究生只剩我一个，决定缓办一年，聘我为助教。我也成了数学助教了（1930 ~ 1931）。1931 年清华研究院数学系开始，大任参加了几个月，后来决定去南开任教。1931 ~ 1934 年我们分居平津，时常见面，也常有陈鹀。

1933 年中英庚款举行留学考试，大任当然一试获取。他去英后就读伦敦大学。陈鹀去后，两人都在伦大读书。

1934 年我从清华研究院毕业，得两年留学机会。清华留学生大多去美，但我要求去德国汉堡大学，获学校批准。19 世纪的德国数学执世界牛耳，20 世纪初年此势未衰。去德国读数学是明智的。到了汉堡，教授阵容，研究空气，都令人十分满意。

我把这些情况函告大任和陈鹀，结果把他们两人都引到汉堡来了。所以我们又同学了一年。那时我们三人周末或旅游又常在一起。

汉堡是大任数学研究最出色的两年。他发表了关于椭圆积分几何的两篇文章，文中有好几个漂亮的公式。这两文足够他在汉堡获得博士学位，可惜他入学时未正式注册。事实上有布拉施克帮忙，可以补救，但他急于回国，所以"博士"藏在

囊中了。

挽　联

八里台畔　阿斯河边　永忆江湖

椭圆空间　积分几何　长留真理

弟　陈省身　挽

25. 一个全能的科学家

本文为纪念吴有训先生而作。原载于《吴有训》,中国文史出版社,1990年。

我1930年到清华大学,未去前已知道吴有训先生的大名。那时中国科学在萌芽时期,国内固然闭塞,在国外工作而有成就者也寥寥可数。我们知道吴先生有关康普顿效应的实验工作;翻开康普顿的名著的索引,在吴的名字下,有无数引页。大家以此自豪。

等到我1930年任清华数学系助教,两个最熟的朋友是物理系助教蒋葆增和余瑞璜。自然对于吴先生的成就有更多的了解,并听到一些关于吴先生的故事。当时吴先生做领先的研究工作,并积极参与学校的教育和行政工作。

记得德国哈雷科学院曾授予吴先生通讯院士的名号,在该时的中国科学界,是一则轰动的消息。

但是我同吴先生的直接关系,是1937年才开始的。我的岳母郑桐荪夫人同吴夫人王立芬女士是好朋友。我同士宁于1937年在长沙订婚,吴先生是介绍人之一(另一介绍人为杨武之先生)。那时他是理学院院长,我是一年轻的教授。他对年轻人的了解是十分敏锐的,所以许多事我都同他商量。他真是一个难得的益友!

后来学校由长沙迁昆明,成为西南联合大学。我同士宁于1939年在昆明结婚。惜不久日机轰炸频繁,我们就疏散到昆明近郊的梨烟村,同吴家住在同一房子。那时士宁怀孕,我没有家事经验,相当狼狈。幸吴太太热心,同我们同伙一段时期,等于做了她的食客。我工作得不懈。我一生数学工作的突破,是由于1943~1946年在普林斯顿高级研究所完成的,但事前在昆明的准备,实为关键。愿借此机会,对吴太太的恩德,表示感谢。

吴先生时常谈到对中国科学的大计。他深思熟虑,有通盘长久的计划。他办事勤慎,得到科学界的普遍爱戴,是近代中国科学史上一个模范的科学家。

26. 挽严志达

陈省身的学生与好友严志达教授于 1999 年 4 月 30 日逝世，作者特作此挽联。

志達弟千古

足跡深入特殊李群

精思冠儕

影響包括曲率積分

創見無盡

陳省身輓

27. 我与华罗庚

本文是陈省身先生于2000年12月18日在纪念华罗庚九十诞辰国际数学会议开幕式上的讲话。首刊于《光明日报》2001年3月26日。

我与华先生有过多年的交情，第一次见面就在清华园，是1931年秋天开学的时候，到现在有七十年了。七十年之间，我们有时在同一个系，我们始终有不断的联系。他比我大不到一岁，是1910年生的。

想起我们最初在一起，1931年他来的时候，那时他只是初中毕业的学生，他的数学论文引起大学的注意。清华是很例外的，不但找他到清华来，并且给他一个职位，这在当时大学里是很少有的一件事。因为他的学历的关系，刚来时名义是助理员。那时数学系叫算学系，后来改为数学系。一年以前，我是算学系的助教。算学系的办公室就在工字厅走道的地方，两边各有两间房间，一共4间房间，是算学系的办公室。有一边是熊庆来先生，他是主任，我在另外一个地方也有个桌子，是他的助教。外头一间有两个桌子，是周鸿经先生和唐培经先生的办公桌。罗庚到清华的时候就呆在我的办公桌，因为1931年我改为研究生，是学生了，他就做助理员，用这个桌子，所以我们的关系是一个先后的关系。

罗庚是一个很好的数学家，所以他不需要一般的数学训练。他很快就跟所有的人，所有的研究生，甚至于教员，可以在同一个阶段讨论数学的问题。他虽然名义是助理员，等于是个研究生，我也是研究生，我们时常来往，上同样的课，那是很愉快的一段学生生活。

我想提出来的是，清华在那个时期，算学系是很小的一个系，但是对于中国算学的发展有相当的影响，甚至于可以说是中国数学史上有意义的一章。除了华先生之外，我们当时同学之中有庄圻泰、施祥林（庄圻泰后来是北大教授，施祥林是南京大学教授），还有同学曾担任南开大学教授。清华在那时这么小的规模之中，也产生了相当一群人，对于中国的数学有些影响。清华后来很发展，所以请了外国教授。那时请外国教授不是什么来开个会，吃吃饭，拿几个transparency（透明胶片）展览一下。那时是在清华园住一年。法国数学家阿达马是国际上很有名的数学家，美国的维纳，都是在清华园里头住下来，讲课。现在做到这种样子的安排不见得很

容易了。所以清华园规模很小，能够对中国的数学发展产生一些作用。

1934年我离开了清华，研究生毕业了，我到德国去念书。罗庚是1936年出国的，他到英国剑桥大学，跟随英国的大数学家哈代。他出国是坐西伯利亚铁路的火车从北京到柏林。我就在汉堡，也在德国。所以我们1936年夏天在柏林相会。刚巧那一年世界运动会在柏林举行，希特勒在台上。也很有意思，100米、200米跑得最快的是黑人，对希特勒是个打击。很遗憾，中国的运动员在1936年柏林世界运动会的成绩不大好，最有名的是游泳的杨秀琼，她游泳有相当的成绩，不过我记得她没有得什么锦标。中国地位最高的是符保卢的撑杆跳，不过也没有得到任何的奖牌。相比之下，我们的国家现在长进了不知多少，现在中国运动员在世界运动会有很光荣的成绩。想起来，数学也有这个潜力的，不过数学需要的时间长一点。罗庚和我在柏林见面，也看看运动会，一起谈了很多。

1936年世界运动会之后，我到了英国剑桥，自然跟罗庚在一起。他那时的工作是关于解析数论，解析数论最要紧的法子是圆法，就是圆周的法子。很奇怪，数论是讨论整数的性质，但是要研究整数的深刻的性质，需要复变数。复变数跟素数的关系是很神妙的问题，罗庚做了很多工作，有他自己的贡献。他用圆法做华林问题，做塔里问题。关于圆法，很要紧的一个人是印度的天才数学家拉马努金，第一篇文章是哈代跟拉马努金的文章。后来很大的一个进展是苏联的数学家维诺格拉多夫。罗庚对于维诺格拉多夫的方法有很多的整理，有很多的进展。他自己的一个贡献是关于三角和的一个估计，这是一个很重要的贡献。我想罗庚在剑桥的一段，1936年到1938年，是他在数学上有最深刻贡献的时候。关于解析数论，他的贡献非常多。

1938年他回国，那时候中日战争已经开始了。北京大学、清华大学、南开大学在昆明组成为西南联合大学。他是清华的教授，因此也是西南联合大学的一部分。我们现在喜欢讲设备不够，或者支持不够。其实，我们那时候什么都没有，甚至于本来有的书都装在箱子里头，也不知道什么时候需要再搬，所以图书馆的先生们都不愿意打开箱子。可是在那个情况之下，在昆明西南联合大学，大家的情绪很好，精神很好，有很多很好的朋友。例如说，我们跟物理系的王竹溪先生有一个seminar（讨论班），我想那是1940年的样子。那时候西南联合大学的数学系出了几个很好的学生，如王宪钟、钟开莱、严志达、王浩、吴光磊。所以，假使有人，有这个精神，即使环境差一点，也还是可以做很多工作。

1938到1943年，跟罗庚在一起大概有五年的光景。刚到昆明的时候，去了一群人，没有地方住啊。因为原来学校不在那个地方，所以我们借了中学的房子，那个中学很慷慨，拨出一些房子让西南联大的人暂时住。所以教授像华罗庚、我，还有王信忠先生（他是日本史的专家），我们三个人住一个房间。每人一个床，一个书桌，一个书架，一个椅子，房子摆得相当挤了，不过生活很有意思。三个人一清早没

有起床就开玩笑,互相开玩笑。虽然物质上艰苦,但是生活也很有意思。现在大家希望物质不断进步,我想苦中也有乐。

1943年夏天我去了美国普林斯顿高级研究所,罗庚在昆明,我们时常通讯。抗战胜利了,国家复元,我知道他有许多社会活动。我们相会是1946年在上海。那时我刚从美返国,他则将去美。他负有使命,但我们仍谈了不少数学,我们的数学兴趣逐渐接近。我1950年去美,在芝加哥大学,他在伊利诺斯大学,相距甚近。他曾来芝大讲布饶尔-嘉当-华定理的初等证明,很漂亮。他1950年夏天返国,须过芝加哥去旧金山登轮,大家都佩服他的爱国热忱。此次相别,便天各一方,通讯也稀。幸媒体有时有他的报道,得知他的一些行动。

直到1972年,我得到中国科学院邀请,我们才在北京会面,相隔二十二年。回顾前事,如在梦中。1980年他率团访美,过伯克利时在我家住了两夜,相谈如旧日,甚畅。1983年他访问加州理工大学,我从伯克利去访他,相距400余公里,自己驾车。这是我们最后一面了。

28. 我同布拉施克、嘉当、外尔三位大师的关系

原载《科学》第 38 卷第 4 期，上海，1986 年。

张奠宙教授在《现代微分几何的形成与发展》中提到我同布拉施克、嘉当、外尔这三位大师的关系。他们自然是 20 世纪初期最伟大的数学家，学问广博，影响至今未减。我在学术事业中能同他们发生密切的关系，诚终身之幸。

布拉施克于 1932 年来北平讲学，我正是清华大学的研究生。他的系统演讲有六讲，题目是“微分几何的拓扑问题”，内容其实是网理论（Web theory），与拓扑关联不多。他在北大演讲，我每次进城去听，并作笔记。当时这问题刚刚开始，内容不深，我大致都懂。

早在南开从姜立夫先生习曲线论与曲面论，即部分采用布拉施克先生的书。所以对他并不大陌生。他的著作简要深刻，趣味无穷。1934 年我将从清华研究院毕业时，有望被派赴美国留学，因之申请改去德国汉堡大学。

事后看来，这是一个明智的决定，汉堡除布拉施克先生外，有阿廷、赫克等教授，所作研究，都是领导性的。我 1934 年 9 月到汉堡，读了一个月德文，11 月学校开始上课。上课前我去看布拉施克先生，他给了我一大叠复印本。我发现一个基本定理的证明有点漏洞。他听了很高兴。后来我把定理推广，并补了漏洞。两个月时间，写成一论文，发表于 1935 年的汉堡学报。总算给他一个好的印象。

我在汉堡时期的最主要的工作是学习所谓嘉当-凯勒理论。那时凯勒正在汉堡任编外讲师，写了有关此理论的一本小册子，并开一讨论班进行讲授。第一次全研究所的人都出席了。但此理论太难，两个月后，班上只剩我一人。凯勒先生学博识深，我从他学了不少数学。

我 1936 年 2 月获博士学位。适文化基金会给我一年补助，可在国外多留一年。问计于布拉施克先生。他建议二途：或在汉堡习数论，或去巴黎从嘉当续习微分几何。嘉当的论文一直难读，但我已有点基础。嘉当是当时最伟大的微分几何学家。经布拉施克先生的介绍，他允许我去。

我 1936 年 9 月抵巴黎，即去谒见嘉当。他是一个慈祥的人，决看不出是几何大师。他只讲法文，我可听懂，但在最初几个月，答复只好用笔谈了。他每星期四下午在办公室接见学生，门口排长龙。两个月后，他同我说，可到他家去谈。我每

两星期去一次，每次约谈一小时，没有闲话(我的法文也不够谈闲话)。他的意见甚多，材料熟悉，简单的问题，时常立刻便有答案(有时我要花几天才得同样答案)。会见后一天往往接他的信，继续讨论我们的问题。我 1937 年 7 月离巴黎返国。十个月工夫全力应付每两个星期的嘉当会见，所以工作努力而精神愉快。这时期共发表三篇论文，但工作范围远超出这些论文的内容。

1937 年夏返国，原拟去北平清华任教。适值日本侵华，改去长沙临时大学及西南联合大学。国家在战争，学校在搬迁，谈不上图书设备。幸嘉当寄给我他的大批复印本，可以苦读。他一生所写论文，约六千页，我至少读了十之七八，其中有些更十分熟悉。学术固需交流，有段闭门精思的时间也是有益的。

我 1943 年秋由昆明去美国普林斯顿，初次会到外尔。他当然知道我的名字和我的一些工作。我对他是十分崇拜的。但我已不是学生。对于传统的微分几何学，我的了解和我所掌握的工具，自信不在人下。我要搞整体的微分几何，便需要拓扑、李群、代数几何和分析等。外尔很看重我的工作。他看了我关于高斯-博内公式的初稿，曾向我道喜。我们有很多的来往，有多次的长谈，开拓了我对数学的看法。历史上是否会再有像外尔这样广博精深的数学家，将是个有趣的问题。

29. 关于半世纪前埃利·嘉当的一封信

陈省身保留了嘉当 1945 年的一封来信,交张奠宙研究。原文为法文,由陈志杰译为中文,发表于香港《二十一世纪》1995 年 2 月号第 27 期。发表前陈省身写了《读信后记:嘉当(1869 ~ 1951)》,即本文。

重读恩师五十年前的信,感慨万千。1936 年我在汉堡完成学位,得中华文化基金会的补助,决定去巴黎随他作一年博士后的工作。事先通过信,得他的允许。所以 9 月中第一次见他,他就给我一个与网络几何有关的问题。我不会做,就不好意思再去找他。有一天在庞加莱研究所的楼梯上遇见了。他问我为甚么好久不见,我说你的题目我做不出。闲谈之后,我们从此有很多接触。我住巴黎大学的国际学生宿舍,他住同一街上。他让我到他家,我约每两星期去一次。

嘉当是一个慈祥的人,待人真诚有礼。我的法文不好,每次见他,我总把结果和问题写好,他的答复我听得懂。我们的双周谈话后,第二天往往接他的信,告我讨论后他的一些新想法。可以想见,这段时间我的工作是很紧张的。

他给我的第一个问题后来我也解决了,并于 1938 年发表在云南大学学报。

我于 1936 年 9 月抵巴黎,1937 年 7 月 10 日由法经美返国。行前已得中日卢沟桥冲突的消息,心情自然沉重。

1938 ~ 1943 年我在昆明西南联大。全球战火,但我们的通信不完全中断。我有时跟他报告我的工作。记得他也曾推荐我的几篇文章到法国杂志。

1943 年起我在普林斯顿。战后法国供应奇缺,我不止一次寄给他食品包裹。信中首句,当指比节。

嘉当声名,晚年始盛。微分几何的一个中心区域是黎曼几何。处理黎曼几何的基本解析工具是张量分析,亦称里奇演算。那时外微分还未通行。到了整体微分几何的发展,大家才觉得外微分有用,其实外微分在局部问题也是很有效的。嘉当的工作至今还未得普遍了解。

嘉当专心学问,一身过了平静的生活。信中所提的儿子路易,因参加抗德被德军枪杀,自使他十分悲痛。他出身农家,幼年受到督学的注意,才得受公费的教育。

1984年里昂举行了嘉当的记念会，我参观了他的故居伊泽尔的多洛米约，并在墓前致敬。法国的农村，一片恬静的景象。

陈省身
1994年7月

附：埃利·嘉当致陈省身的一封信

Paris 95 boulevard Jourdan
26 mai 1945

Cher Monsieur Chern.

巴黎佐丹大道95号
1945年5月26日

亲爱的陈先生：

几天前收到了你的邮包，这使我非常感动。我和我的全家都要谢谢你。感谢你关心我们的食品需求，很遗憾我们眼下仍不得不为此操心，尤其是我那六个分别住在巴黎和普瓦蒂埃的孙儿们，他们将津津有味地享用由祖父最好的学生从美国送来的美味的可可。那大一些的孩子将会饶有兴趣地得知这位年青的数学家出生于中国，这对他们将是一堂生动的世界地理课。

我非常感谢，已拖延了很多时间，你给我的插印本，我对此非常感兴趣。可能你也会高兴地听到以下的消息：我已经收到那本关于外微分系及其几何应用的书的初校样。可是与此相反，我的关于黎曼空间几何的书还不能付印。

我们刚刚遇到极大的不幸（我直至最近才得知这一消息），我的小儿子路

易——普瓦蒂埃大学的数学物理教授，已在1943年2月28日被押往德国，并再也不能回到我们身边了。他于同年10月被判处死刑，12月3日遭到处决。同时遇害的还有同一抵抗小组的其他9个成员。他遗下了三个9岁、6岁和4岁的孩子，尽管孩子的妈妈非常坚强，但她毕竟要面对一副沉重的担子。

我刚接到参加苏联科学院建院220年庆典的邀请，活动将于7月下半月在莫斯科和列宁格勒举行，我打算和我的同事阿达马、波莱尔一起去，在那里我们也许会遇到美国和中国的数学家。

请代我向普林斯顿的同事问候，并向你，亲爱的陈，致意。

嘉当(E. Cartan)

30. 精确性和明澈性的典范

本文是为H.霍普夫的《整体微分几何》所作的序言。原书为《Differential Geometry in the Large》, Lecture Notes, 1000. Springer-Verlag, 1983年。中译本由科学出版社于1983年出版;吴大任译,王启明校。标题为本书编者所加。

这本讲演记录包括两部分:

1) 几何选讲,纽约大学,1946,记录者P.拉克斯。

2) 关于整体微分几何的讲演,斯坦福大学,1956,记录者J. W. 格雷。

这里重印的记录未加实质改动。

H.霍普夫是一位能通过特款发现重要数学思想和新的数学现象的数学家。在最简单的背景中,问题的核心思想或其难点,通常变得十分明澈。以这种方式解决几何问题是一种乐趣。霍普夫的巨大洞察力使这种探索方式能够导致严格的数学成果,因而这些讲演中的大多数课题已成为重要的进一步发展的起点。试举其中少数事例。

从这些演讲可以清楚地看出,霍普夫强调了多面体微分几何。光滑微分几何中大多数结果都有其关于多面体的对应物,因而对后者的了解是重要的并能给人以启发。在新近的工作中,可以举出罗伯特·康纳利关于刚性的工作,那是和这些讲演的精神很接近的(参看 Connelly R. *Conjectures and open questions in rigidity*. Proceedings of International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978, **1**: 407 ~ 414)。

以分解为基础的关于多面体面积和体积的一种理论,起源于波尔约和高斯。高斯认识到体积问题的微妙性,希尔伯特则在他的著名"数学问题"中提出要"构造两个四面体,它们有相等的底和相等的高,但无法分解为分别全等的四面体……"(问题3)。这个问题很快为M.德恩所解决,他的结果在这本书第一部分的第四章里作了介绍,但有些修改。这项工作已通过代数方法作了进一步探讨和处理。关于新近的发展,可参看 Sah G H. *Hilbert's third problem*: *Scissors congruence* (Research Notes in Mathematics, 33, Pitman, San Francisco, 1979)。

第二部分主要内容是三维欧氏空间魏恩加滕曲面的研究,特别是那些中曲率或高斯曲率为常数的曲面。最近项武义取得了重要进展,他构造了许多关于欧氏

空间里具常数中曲率而不是超球面的超曲面的实例；参看项武义的《欧几里得空间中常平均曲率超平面的广义旋转》I(J. Differential Geometry, 1982, **17**: 337 ~ 356)和他的其他论文。但是，三维欧氏空间里是否有具常数中曲率的浸入环面这个最简单的问题（“肥皂泡”问题）却仍未解决。

霍普夫的数学表述是精确性和明澈性的典范，从这些记录中可以看到他的风格。

31. 矢野健太郎——我的老朋友

本文是为《矢野健太郎论文选》所作的序言。原书为《Selected Papers of Kentaro Yano》, North Holland,1982 年。序言原作是英文;洪文明译,虞言林校。

矢野和我年龄差四个月,他年轻些。我们之间必定有着某种缘分。我们对同一个数学领域产生了兴趣,从而在生活道路上多次相遇。1936 年秋,我们第一次相见于巴黎,当时我们都在做一个微分几何学家想要做的自然的事,那就是追随数学大师埃利·嘉当。星期四下午是嘉当会见学生的时间,我们时常在“庞加莱研究所”嘉当的办公室外面过道里相见。

矢野刻苦工作的精力是有目共睹的。那时研究所的图书馆只是一间大房间,沿墙靠着书架,中间摆些桌子。矢野在图书馆的时间几乎和图书管理员一样多。那时我们都在从事“射影联络”的研究,他正撰写毕业论文,我写了两篇小文章。

矢野是里奇、列维-齐维塔和斯豪滕传统中的最优秀的微分几何学家,他是一位出色的张量分析专家。这里,一个基本的概念就是向量丛。其解析处理必须有个基底场(或标架场)。张量分析基于选择一个局部坐标系的自然基底。这种思想既自然又简单。经过许多年,一套标准化的符号得到发展,它已为同行们了解,也便于检查计算中的错误;一般地,我相信基底不应与局部坐标联系在一起,以便达到自由、普遍和简洁,这正是活动标架法所充分显示了的。不幸,这导致了符号的激增,结果人们的交流还须依赖于张量分析,张量分析的这种重要作用值得我们珍惜。

我相信,就介绍矢野的数学工作而言,《文选》将比我所能说的更多。论文所涉及的深度和广度,证明是经过长期努力的结果。也许他以下的书给出了他数学工作领域的一个相当好的写照:

(1)《曲率与贝蒂数》(与博赫纳合著)

(2)《李导数的理论及其应用》

(3)《黎曼几何的积分公式》

(4)《反变子流形》(与 M. 科恩合著)

第一本书是他的最著名的著作,它的影响超出了微分几何。第二本书是对广义空

间内的变换群的论述,从局部和整体的角度研究它们会具有一个可期望的前景。

矢野对微分几何方面的文献了如指掌。正像他在日本的许多数学著作及其他出版物中所显示的那样,他的各门数学知识是渊博的。他显然是一位值得我们极为称赞的数学家的典范。

32. 给我的朋友：佐佐木重夫

本文是为《佐佐木重夫论文选》所作的序言。原书为《Shigeo Sasaki: Selected Papers》, Tokyo, 1985 年。序言原为英文；洪文明译，虞言林校。

非常荣幸应邀为佐佐木重夫教授的"论文选"作些介绍，这对我是很有吸引力的。因为，尽管我们相隔一年出生在千里之遥(我于 1911 年 10 月 28 日出生于中国浙江嘉兴)，但我们在经受的数学训练方面有着相同的背景，也有同样的研究兴趣。我们喜欢几何问题的论证，又深受菲力克斯·克莱因的爱尔朗根纲领的影响，而且我们都首先从事局部微分几何的研究，然后迎来了整体微分几何的曙光。

如今能经受这种训练的人很少了。由于近几十年来数学的令人注目的发展，局部微分几何被挤出数学课程之列，这是很遗憾的。因为局部微分几何有许多有趣的结果，通常也是进行整体思考的基础。在佐佐木重夫教授的论文里也看到这样的数学观点，令人鼓舞。

在结束这个引言之前，我必须谈及我同《东北数学杂志》及东北大学的联系。1935 年，我最早的两篇论文发表在《东北数学杂志》上，当时收到林鹤一和藤原松三郎教授给我的录用通知时的激动情景，如今依然历历在目。1974 年，作为东北大学的客座教授，我和夫人住在大学的招待所，即前任校长的旧宅。那里的清静的环境使我想起自己在中国的童年。佐佐木重夫教授的热情好客，使我们的旅行非常愉快且颇有收益。此情此景，作诗抒怀：

牛刀小试呈初篇[①]
垂老方知学问难
四十一年读旧作[②]
荷花时节传新知
同文同志寻真理
一心一德探精微

---

① 我最早的两篇数学论文于 1933 ~ 1934 年发表在《东北数学杂志》。
② 1974 年我应日本文部省之邀，作轮回讲演，以东北大学为主校。

莫道畴人天地小
喜看后学继前贤

使我非常高兴的是,我的朋友王熙(Harry Wang)博士将这首诗译成了英文:

I presented my first writing,
Like trying a butcher's knife.
Upon growing older I came to realize,
For the first time learning's strife.
Having read my old paper,
After forty-one years.
It's lotus season,
Time to disseminate new knowledge.
With a common language and a common will,
We search for truth and principles.
With oneness of mind and heart,
We seek the ultimate and the infinitesimal.
How can anyone say,
The mathematicians' world is small.
Our joy is seeing our young elite,
Follow the footsteps of those before them.

1984 年 12 月

33.《大学数学丛书》序

台湾联经公司曾经出版《大学数学丛书》，由项武义、莫宗坚、康明昌主编。作者写的这份序言，发表于《数学传播》第 12 卷第 1 期，1988 年。

联经出版公司大学数学丛书创刊，约我写几句话，很高兴有机会谈一谈我对中国数学的展望。

中国数学有长久和光荣的历史；从《九章算术》到刘徽、祖冲之的割圆勾股，从“大衍求一”到天元四元，都是人民智慧的结晶。唐代算学设于学官，长期训练学生。唐朝是中国历史上最伟大的一个朝代。当时的中国是全世界最强盛的国家，其设施令人景仰。

但是中国数学没有产生像欧几里得的《几何原本》这样伟大的著作。欧几里得根据一组公理，用逻辑推理导出平面和空间的基本性质。希腊的科学和近代的科学是人类文化史的奇迹。中国以往的政治社会和文化背景，不能产生这样的科学！

十六七世纪后世界数学突飞猛进。基本的现象是数学的范围扩大了，而这种新数学符合于其他科学的发展，获得应用。因为扩大范围，就需抽象化。例如，从一本书、两本书到 1、2、3，从 123 到 xyz，都是抽象化。数学的基础是纯粹数学。纯粹数学引进基本的概念，将繁化简，导入进一步的发展。中国数学不如西洋的一个主要原因是过分注意应用。这种短浅的眼光，现在还很普遍。

中国的新式大学大多有数学系。到了三十年代有些可喜的发展：南开大学的姜立夫先生首先注意到图书设备的重要并培养学生；清华大学以其雄厚的财力，在熊庆来、孙光远、杨武之先生的领导下，培养一批优秀的青年，包括华罗庚、许宝騄、陈省身等；浙江大学在陈建功、苏步青先生的领导下，训练学生从事研究工作；其他许多学校也都有蓬勃的空气。西南联合大学集北大、清华、南开三校的精英，抗战 8 年，人才甚盛。

第二次世界大战后的一个现象是大批中国学生去美国受教育而发展成名。举国际数学会议为例：该会每四年举行一次，有菲尔兹奖，奖励突出的研究工作。也有约 16 个的综合演讲，结论各方面的最近进展，邀讲者必为各方面研究的领导人物。中国数学家曾得菲尔兹奖，受邀作综合演讲前后已有 5 次。此外作专题演讲

者甚多。中国数学已经成熟了!

中国现在有大批的年青的数学工作者,在博士阶段前后。人数空前,优秀者甚多。中国将成为数学大国,是挡也挡不住的。

我的朋友,法国大数学家韦伊喜欢说,20年后数学家需要学中文。此说已有端倪,大家已经知道:中国人的姓不能确定这个人,此张不是彼张,此王不是彼王。数学家已开始学中国人名了。

中国数学正在经历史上未有的变化。如果大家努力,20年后或者每一数学家的书架上都将有几本这个丛书。

ZLST

三、综论数坛

作为社会文化的一部分的数学，是人类活动的结果。作者在这一部分文字中，就数学的预测、展望、评价、治学等宏观思考，以及数学与女性、数学与诺贝尔奖、数学与国家统一等社会问题进行了独特的阐述。

34. 对中国数学的展望

本文为1980年春在北京大学、南开大学和暨南大学讲话的增订稿。原载《自然杂志》第4卷第1期,1981年。

数学是一门古老的学问。在现代社会中,因为科学技术的进展和社会组织的日趋复杂,数学便成为整个教育的一个重要组成部分。计算机的普遍应用,也引起了许多新的数学问题。从几千年的数学史来看,当前是数学的黄金时代。工作者的人数是空前的:可以说,健在的数学家的人数超过了历史上出现过的数学家人数的总和。国家社会供养着许多人专门从事数学工作,这是史无前例的。这个现象的结果引起数学的巨大进展,真到了日新月异的地步。现在第一流大学或研究院所讲的数学,往往是二三十年前所不存在的。

不同于音乐或美术,数学的弱点是一般人无法了解。在这方面数学家所做的通俗化的工作是值得赞扬的,但一般人总与这门学问隔着一段距离,这是不利于发展的。数学是一个有机体,要靠长久不断的进展才能生存,进步一停止便会死亡。

为什么要搞数学呢?答案很简单:其他的科学要用数学。我先讲一个故事:甲乙两人是中学同班,毕业后各奔前程。有一天相见了,甲便问乙:你这几年做什么事?乙说:我研究统计,尤其是人口问题。甲便翻看乙的论文,见到许多公式,尤其屡见 π 这个符号。甲说:这个符号我在学校时念过的,是圆周长与直径的比率,想不到它会和人口问题发生了关系。

在中国,通常把实现现代化譬成第二次长征。数学在这个长征中是小小的一环。法国大数学家庞加莱说:在科学的斗争中,敌人是永远在退却的。因此这次长征比第一次幸运多了。但困难是近代科学浩如烟海,又是不断在进展;胜利将是遥远的,同样需要艰苦的工作。

在向现代化进军中,数学是占一些便宜的:第一,设备需要极少;第二,研究方向不很集中。因此小国家和小的学校都可以有活跃的数学环境和受人尊敬的数学家。波兰、芬兰都是有名的例子。

通常把数学分为纯粹的和应用的,其实这条分界线是很不确定的。好的纯粹数学往往有意想不到的应用。爱因斯坦广义相对论所需的微分几何,黎曼在六十多年前已经发展了。量子力学所要的算子论,希尔伯特早已奠定了它的数学基础。

近年来理论物理的研究中,统一场论是一个热门。去年萨拉姆和温伯格因为统一了电磁场与弱作用场而获得诺贝尔奖。它的数学基础是杨振宁和米尔斯的规范场论。后者在微分几何中叫做联络,它的几何与拓扑性质,是近三十多年来微分几何研究的主要对象之一。

微分几何是微积分在几何上的应用。我不能不提它的曲线论在分子生物学上的作用。我们知道,DNA 的构造是双螺线。它的全挠率的研究引到 J. 怀特的公式,这是当今实验分子生物学的一个基本公式。

这些贡献在纯粹数学上有开创性,在应用上成为基本的工具,是第一流的应用数学。

中国的近代数学,发展较日本为晚。但中国数学家的工作,有广泛的范围,有杰出的成就。缺点是人数太少。比较起来,美国数学会的会员人数多达近万人!

要使中国数学突进,个人意见,宜注意以下两点:

第一,要培养一支年轻的队伍。成员要有抱负,有信心,肯牺牲,不求个人名誉和利益。要超过前人,青出于蓝,后胜于前。中国数学如在世界取得领导地位,则工作者的名字必然是现在大家所未闻的。

第二,要国家的支持。数学固然不需要大量的设备,但亦需要适当的物质条件,包括图书的充实,研究空间的完善以及国内和国际交流的扩大。一人所知所能有限,必须和衷共济,一同达成使命。

我们的希望是在 21 世纪看见中国成为数学大国。

35. 五十年的世界数学

1985 年，中国数学会在上海复旦大学举行“中国数学会 50 周年年会”。这是作者在开幕式上的讲话。原载《科学》第 38 卷第 1 期，上海，1986 年。

中国数学会 50 周年纪念，今天躬逢盛会，十分幸运。受邀作报告，更是无上的光荣。刚才苏先生讲了 50 年来中国数学的长足进步令人兴奋。中国数学的最终目的是要达到国际水平。所以我想借此机会回顾一下 50 年来世界数学的进展。

先讲一点个人的经验。1935 年我在德国汉堡读书。那是当时德国数学的一个中心。记得教代数拓扑的是代数学家阿廷。当时一本最好的书是新出的由赛费特和思雷尔福尔两人编著的(此书曾由江泽涵先生译成中文)。现在这是最易入门的研究院课程，其中前半本的内容是研究生的常识，处理得比从前优越得多。我们现在的拓扑知识，恐怕十倍于这书的内容。现在研究院高深课程的内容，50 年前大多还没出现。

要讲 50 年的数学，真是“一部二十四史从何说起”？所以我只想看一下几个著名的国际数学奖和得奖者的工作范围。我要说清楚，这并不包括所有的重要工作。这 50 年中数学的范围扩大了，数学工作者人数大量的增加，数学内容变化之快是史无前例的。

现在最有名的国际数学奖是国际数学家大会的菲尔兹奖章。菲尔兹是加拿大多伦多大学的教授，遗嘱捐款设此奖金，目的是奖励年轻的工作者。所以得奖者的年龄都限于 40 岁以下。此奖在开会时发给，约每 4 年一次。从 1936 年起一共给过 27 人。华裔的丘成桐教授于 1982 ~ 1983 年获此奖章。

从 1979 年起以色列的沃尔夫基金设一奖金。每年一次，金额巨大。有六个项目，包括数学。因为没有年龄限制，所以给奖标准是一个数学家的全部工作。一共给过 14 人。得奖者年龄都在 60 岁以上。1983 ~ 1984 年我是得奖者之一。

先后获两次奖的有两人，一是阿尔福斯，原籍芬兰，现美籍。一是日本的小平邦彦。

他们工作的范围是什么呢？这些人都是很广的，很难说是哪一方面的专家。我统计了一下，大多数与拓扑、分析或数论有关联。总括来说，他们继承了从高斯

以来的伟大传统,不分纯粹的与应用的数学,熔各门于一炉。我们可以叫它做"核心数学(core mathematics)"。数学是有连续性的,几千年来,从欧几里得到高斯,再到以上41位得奖者及他们的朋友们,精神是一致的。

但是范围却大大地扩充了。18、19世纪数学的基本问题是了解无穷:无穷小及无穷大。所以分析是数学的核心,变数只有一个。数学上的一个奇迹是复数的存在;一个复数相当于两个实数。因之复函数论的研究牵涉到二维空间,以及高维空间。拓扑的发展便势不可止。上面所说阿尔福斯教授的工作在单复变函数论,而小平邦彦教授的工作则在超越代数几何。两者都以复数为基础,显然是近代数学的一个重要因素。

19世纪的数学是一维的,而20世纪的数学是高维的,并且空间不止一个。因之拓扑便成基础。它所发展的整体性观念可以用于其他数学。

数论是最深刻的应用数学。整数论固然美丽,代数数论才是堂奥。它与代数几何不可分割。一切都是上乘的核心数学。

我也应提到应用数学方面的奖。最近的一个是日本的京都奖,奖额甚巨。获奖的两个数学家是信息论的奠基人香农和系统科学的奠基人卡尔曼。因为科技的进步和计算机的发展,应用数学产生了许多新领域。从另一方面讲,数学的传统应用在物理,两者的关系仍旧是异常密切。规范场论与纤维丛的联络,弦论与卡茨-穆迪代数都是显著的例子。至于进化方程的孤立子解先从计算机测得则更是惊人的事实。

核心数学和应用数学都在不断地推进和深入,也不断地打成一片。近代数学是充满着活力的。

诸位同志:我们今天庆祝前50年的成就,我们更应为今后50年作计划。年来看到许多年轻有为的数学工作者,深信今天是中国数学黄金时代的开始,我也深信今后50年内(或更短期内)必然有数学家基于在中国本土的工作获得国际上的最高荣誉。中国数学同世界数学是分不开的。

最后我愿引苏先生的几句话结束我这个讲话:"我们要坚持严谨治学与团结奋斗这两条……我们一定要发扬民主,集思广益,互相尊重,合作共事,把学会事业办得更好。"

36. 争取中国数学在国际上的平等和独立

1988年8月，中国自然科学基金会等单位，在南开大学举行“21世纪中国数学展望”的学术讨论会。这是在会议开幕式上的讲话，由张洪光整理成文，收入《陈省身文选》，科学出版社，1989年。标题为本书编者所加。

诸位同志：

我们今天在这里讨论21世纪的中国数学。目的是预测一下21世纪中国数学界是何情状，策划如何应付新时代的来临。我是不应该讲话的，因为我不会参加21世纪的工作。(众笑)但是我充满信心地看到中国数学的前途是非常光明的。我所伤心的就是，这个光明时代的到来，自己顶多能看见一点曙光。

今年是美国数学会的一百周年纪念，他们也开了一个庆祝会，讨论21世纪的数学。这个会是8月5日至12日在美国的普罗维登斯城举行的，我去了。主要的节目，是邀请了23位年青的数学家作综合报告。报告的目的是结论过去，计划将来。报告人条件之一是要在21世纪仍旧可以活动的，所以都是年纪比较轻的人。

会中，我去介绍了一位演讲的人。这位演讲的数学家的名字叫卡仁·乌伦贝克，她是得克萨斯大学教授，恐怕是当代最有名的女数学家了。她的讲题是Instantons and Their Relatives。前者我们翻译成“瞬息子”，它是杨-米尔斯方程的某种解。她讲“瞬息子”及其有关的现象。杨振宁先生这个贡献是历史性的。杨-米尔斯方程的来源是物理，但是，最近它在数学上有重要的作用。有一个结果是说，四维空间有一个微分结构，它同原来的微分结构不一样。这讲起来相当神妙，它牵涉到拓扑、微分方程和微分几何。英国的年青数学家西蒙·唐纳森在这方面作了重要的贡献，他现在是牛津大学教授。年纪很轻，约30岁左右。我们南开的王蜀光同学现在就是跟唐纳森学习。他在牛津已经有两年了，很高兴今天看见他在场。

讲到数学的将来，大家就会想一想以后数学的发展是在哪些方面？我们搞数学的人，特别是搞几何、拓扑的人都知道：近几年来，最时髦的一个题目是低维(即三维及四维)拓扑，例如唐纳森的工作，代表了数学上最重要的一项进展。不过，向远看一点，可能搞低维拓扑的时代也有个限度。那么搞完之后，以后的发展可能在哪些方面呢？同许多人谈，我们也许到了变化的时候了。我个人感觉，许多迹象，

指示无穷维空间的丰富现象。可能10年以后大家会搞无穷维的几何了。高维的尤其是无穷维的空间在物理上是非常基本的。我想,有一个现象一定是会继续维持的,这就是数学与物理的关系。近若干年来,这个关系越来越加深。可以预料,这个关系会继续维持。今天讲到21世纪的数学,我们当然是要想到将来。不一定现在时髦的东西在21世纪仍旧时髦,因为到那个时候,相当于一个油井油开完了,主要的问题、可以解决的问题解决了,所以就需要改变方向了。我们要赶在前头,不再追随。

从这次会议可以看出,数学仍旧是整体的,纯粹数学跟应用数学的分界很少,它们不能分开。因为应用数学到相当的阶段往往非常地复杂,需要引进基本的观念把它综合起来,把它简单化。纯粹数学引进基本的观念会使得你可以有下一步的进展。但是纯粹数学不能空虚,它需要实践,需要应用数学来指示正确的方向。我刚才讲过,数学同物理的关系尤其是深刻的。近几年来,数学跟生物的关系也非常之要紧。我们都知道DNA的结构是个双螺旋。这个双螺旋的几何性质,是生物科学中的一个基本的现象。因此,生物学家也需要学相当多的数学。

近几年来,大批的中国青年出国学习,有许多位今天在场。就整体说,成绩是特别地优秀的。我随便举几个具体的例子,不能代表整个。例如,浙江大学的林芳华同学受聘为芝加哥大学的正教授,普林斯顿大学今年请年轻的数学教师,一共聘了6位,有2位是中国学生:一个是田刚,一个是李岩岩。田刚是北京大学的,李岩岩是系统所的。这次我在美国数学会开会的时候,遇到麻省理工大学的维克多·卡茨教授。卡茨先生以卡茨-穆迪代数出名。他见了我第一句话就说,我最好的学生是中国人。他的口气表示不但这个中国学生是最好的,而且比他的其他学生高一大截。前些时候我在瑞士开会,看到瑞典的数学家卡尔森。卡尔森先生是国际数学联盟的前主席,他在加州大学洛杉矶分校开了一个课,他说开了一个课的结果发现最后的考试前四名的学生都是中国学生。其他的例子还很多。所以,至少在美国,中国学生的成绩是非常优秀的。

由此看来,我们可以结论,20年后必然有大批的中国数学家成为数学各方面的国际上的领袖。我当然也应该讲到中国国内的数学家也有很多优秀的工作。现在的问题是,如何使得中国在国外的数学家能够回国来对于中国的数学发展起作用。从基本上讲,我想中国数学的目的是要求中国数学的平等和独立。中国的数学要能够跟西洋的数学平等。我们不一定说一定要优秀,或者跟赛跑似的,非要是第一、第二不可。但是,一切东西都要实质上能够平等。我们也要求独立。就是说,中国数学不一定跟西洋数学做同一方向,但是要有同样的水平。因此非常要紧的是在中国建立基地。今天,我们来讨论这个问题,时间是适当的。基本的因素是要在中国的基地有同样的工作条件,即在中国能够有工作的场所,有研究所,有大学,使得它的工作条件跟西洋完全是一样的。我想,在这方面的条件讲起来大概是两

个部分：一个是设备，一个是政策。要使得中国的数学基地有良好的设备，使得在中国工作跟在国外工作完全一样。这个设备除了图书以外，还包括人才的交流，有机会互相讨论，也包括待遇方面。中国数学家的待遇要有一定的标准，要跟西洋数学家的待遇相差不太大，使得爱国心可以克服国内外待遇的差异，吸引他们愿意回国来参加重要的工作。政策要灵活。允许不同的安排，使得交流不要限制在某些条件之下，以便我们能够充分利用中国的人才资源。具体地讲，我最近有几个建议，也已经有些成效。比如说，我们要克服刚才李克正同学讲的“中国人的自卑感”。有人觉得中国的博士不如外国的博士。这其实是不对的。所以，我们现在开始一种“联合培养”的政策，慢慢地有中国的博士生到国外去工作，他回到中国来，在中国得博士。我想这是一个具体的手续，使得中外慢慢就可以平等。香港有些实业家，如王宽诚先生、霍英东先生、邵逸夫先生，他们对于祖国的教育有很大的支持。刚巧，我也是霍英东基金委员会的一个委员。以往大家要支持中国的教育的话，就派留学生。我说，这几年改变了，我们中国在国外的留学生已经有五万人，现在应该请他们回来，不一定要再派人出去。对这五万人，要吸引他们回来，尤其是要吸引最优秀的人回来。所以，霍英东基金委员会下月 2 号要宣布“霍英东奖金”，奖励青年科学家，包括从国外回来和国内培养的，这样至少加一点吸引力。我希望这方面将来还可以扩大地做。希望政府同民间团体(如霍英东或其他基金委员会)都可以用灵活的方法使得有些人在某些条件之下能够回来参加“四化”建设的工作。大家能够起劲地去做，那么到了 21 世纪，中国的科学的确是能够平等和独立的。

我个人觉得，数学还是一个个人的学问。交流固然要紧，真正的创见还是出自一人。由于这个原因，数学在中国、在一个开发中的国家是特别容易发展的。我希望同志们有充分的信心，国家和社会全力地支持，使得人类历史上中国数学在 21 世纪的发展能够有新的一章。

谢谢大家。(众鼓掌)

37. 中华民族的数学能力不再需要证明

这是作者在第二届“陈省身奖”颁奖仪式上的讲话，标题为本书编者所加。原载《中国数学会通讯》1989 年 11 月。

首先我要谢谢吴文俊先生的精彩的报告。在短短的一个小时时间，大家学到了很多关于拓扑学，它的历史，它的基本观念，我们也学到姜伯驹教授、李邦河教授对于拓扑上的重要贡献。稍微有一点点补充，吴文俊先生讲起梅花结，就是空间这个结没法子打开，他画了一个图。这个梅花结好像是很简单的一个几何的问题，现在在物理上有很重要的发展。这个结论在统计力学，尤其是在杨振宁的方程里是一个重要因素。因此我也许可以提到杨先生在南开数学所办理论物理组，最近他和葛墨林先生编了一本书，关于统计力学的。那本书里最后的一篇文章是威腾的文章，我想威腾是现代最了不起的理论物理学家和数学家，威腾的文章是要建立一个统一场论，把所有的场都包括在里头，而它的基础是拓扑和微分几何。他是一个物理学家，他写的这篇文章，对于数学家讲非常难懂，他随便说几句话但没有数学上严格的证明。现在世界上最有名的几何学家、拓扑学家，都在拼命念威腾的文章，拿他的一句话两句话想法子证明它，往往都是对的，但证明有时很困难，至少现在没法子完全证明，我自己个人现在就花大部分时间，想法子死啃威腾的文章。这个情形就像当年庞加莱一样，吴先生讲，当年搞拓扑学一个主要的态度就是苦念庞加莱的论文，庞加莱说的简简单单的话，你需要很多时间去了解它，更多的时间证明它。威腾的这篇文章是在杨振宁和葛墨林所编的统计力学书里的最后一篇。

我还有一点补充，讲到不动点理论，也是一点数学史。不动点理论的一个结果，就是所谓代数的基本定理，任何代数方程式一定有复数解。大家不一定知道，这是一个很难的问题，当年高斯给了很多的证明。但在高斯以前一个很伟大的数学家叫欧拉就证明不了，欧拉想法子只证明特殊的情形，一般的情况一直到高斯用到拓扑的观念才把它完全证明。

今天给这个奖，我先说一说它的过程。有一天我在加州的家里，杨振宁先生给我打电话，他说香港有位刘永龄先生要跟我讲话。我就跟永龄谈，他就提议设这个奖，对于我讲这是一个无上的荣誉。也是刘先生对祖国的数学愿意出力，作这样贡献，也是值得我非常大的敬佩。我说当然可以。事情觉得是突如其来，向来没有奖

用过我的名字。这次是第二次颁奖。这两次来,我们从刚才吴先生的报告中可以知道,人选的选择非常适当。得奖的人,这次他们两位(李邦河和姜伯驹)和上次两位(不幸钟家庆教授去世了),都达到了国际水平,在国际上得同样性质的奖也毫无愧色。所以中国的数学已经不必再有自卑感了,已经达到国际水平,不过可以做得更好一点。

在此我想提到一个事情,今年一个重要的消息是,在国际数学竞赛上中国得了第一名,在两年前中国参加是第四,去年是达到了第二名,今年是第一名。这是很不容易的事情。参加的有四五十个国家。这次我知道发表消息之中举了考试的一道题目,至少这道题目我不会做。题目是很难的。而中国的年轻小孩子,能够得到这样的成就,面对强的国家,像苏联、罗马尼亚、东西德、美国这样很强的国家,得到第一名,这是很光荣的一件事情。我想我们应该继续培养这些年轻人,使得他们其中有一部分能够成为数学家。也许十年后,在数学上中国因为在中国本土的工作可以得菲尔兹奖。我们知道丘成桐教授得菲尔兹奖,不过他的工作是在美国做的。这是一件兴奋的事情。

再举一件事情。今年夏天美国数学会在加利福尼亚开一个多复变函数讨论会,一共三个星期。如果你参加多复变函数讨论会,你可以了解到,中国的华裔数学家是领袖,肖荫堂、丘成桐,年纪轻一点的莫毅明、田刚这些人,他们的工作是完全受开会的注意,是这个会议中最重要的工作。除了我刚才提到的以外,还有很多年轻的中国人是他们的学生。所以在那个星期去参加这个会的话,差不多等于是在中国开会似的,参加的多半是中国人,表示在多复变函数领域,中国是领袖全世界的。这是很大的成就。另外这几年来因为教委的支持,我们继续派留学生到美国去,这些留学生之中优秀的非常之多。很多最好的学校、最好的研究院,普林斯顿、哈佛等,数学系里最好的研究生是中国去的。稍微中等的学校,他们招不到美国的研究生,就更不得了了,一进去的话,就像今天这样子,做个报告,坐的都是中国学生。

我喜欢说要把中国变成一个数学大国。如果广义地讲,把全世界的华裔都算中国,假使中国统一了世界,已经是数学大国。现在已经有些成就。刚才王元同志讲到他年轻的时候,尤其是我年轻的时候,我们的自卑感,他看到我的论文在斯廷罗德的书里头。我记得当时在富比尼的书里头看到中国的唯一的一篇论文是我的老师孙镛先生的,还不是什么了不得的文章只是在文献里头引到的论文没有中国的名字,只有孙镛先生有一篇。那种情形之下也许有点自卑感。现在我想不是自卑感,中华民族的数学能力不需要再证明了,完全明显了。现在就是如何再继续发扬。我有几点具体的建议,刚才我讲国际数学竞赛,证明有许多中国年轻人数学能力很高。并且裘宗沪先生跟我讲不仅是出去这一队,中国可以再出一队,也都是很有能力的。在另外一方面讲,我想也应该说,不一定把这种竞赛看得太重要。英国

当年牛津剑桥的数学比赛，也是有很难的题目。据统计，以后有成就的数学家，很少是数学竞赛考第一的，唯一的例外是麦克斯韦尔。据我的了解现在全世界的人都不愿念数学，美国人不愿念数学，所以研究院不得不收中国学生，苏联的学生也不愿念数学。大家不念数学，我想刘永龄先生一定同意，这个时候你就要念数学，将来数学就值钱了。我们要想法子努力培养年轻有能力的人继续念数学，不仅是中国的光荣，恐怕对于他们将来的事业也是很有意义的一件事情。我们并不希望所有的人都来念数学，念数学的人太多了也并不好，但要有相当一部分有能力的人念数学。第二点我想到的是，中国数学要独立。既然有了自信心了，不一定要跟其他的国家，或者其他的大师同样的方向去做。要独立的话，最主要一点，大家要对数学有一个深切的了解。为什么要念数学，当前数学的问题是哪些问题，大致看将来的数学，十年、二十年甚至于五十年的发展应该是哪些地方。观念往往不是固定的，今天是这样想，也许明天你可以改变。不过你允许这种改变，就要对数学本身要有一个整体的看法。我觉得中国有一个方向可以发展，就是数学史。因为数学史这个方向西方国家现在不够重视。这是我个人觉得。什么东西的发展都有历史的程序，了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤。据我知道中国有很多位对数学史有兴趣，我觉得应鼓励他们在这方面的工作。数学史很难搞，是很花功夫的事情。并且老的西方数学史不大好搞。你要搞老的——中古，甚至于近代一点的，19 世纪的数学史都很困难，需要很多年拉丁文的训练。不过我想近代的可以。我记得有一种建议，中国开放之后，许多第一流的科学家到中国来访问，其中包括许多第一流的数学家。为什么不趁机会写一个访问记。他们在这里访问，我们轮流的有几位，尤其是对数学史有兴趣的人写一些访问记。我想 50 年后这是有价值的材料。数学其他的发展，现在工作很多的是离散数学。我们这些岁数大的人有这个训练——拓扑学。拓扑学念好很不容易，拓扑学要念进去，或者数论要念进去，十年苦功也许才能入门。离散数学问题就比较多了，尤其因为最近计算机的发展，产生很多有意思新的离散数学的问题。总而言之，我的意思是说，从此不要再跟着人家。想法子找到新的有意义的方向，在这个方向中国的数学家领头地作一些工作，不再跟了。

其次有些实际的问题，我觉得在中国这个情形之下也许可以做的。我觉得中国应该多一些地域性的数学会议。因为国家太大了，开一个全国性的会要花很多钱。地域性或从其他地方邀请几个人来做几个报告，比较来说用钱用得不多。去年我们开一个 21 世纪的数学会议，李铁映同志特别拨了一点点钱，他还跟我讲我们有希望以后可拿到更多的钱。为什么要注意地域性的呢？吴文俊先生给我们的报告是个模范。怎样能够在短时间内把一个重要的方面讲一个大概。很要紧的是全国对数学有兴趣的人要有一个水平。刚才我讲搞新的方面，搞不同的方面，我们一定要维持一个水平。没有这个水平，普通一个人对数学有兴趣，有些老先生可以

花很多时间，作一些费马问题、哥德巴赫问题。我们要不断努力，最重要是工作，因为这些人缺乏数学训练，根本不了解什么叫作数学的证明。像这类基本的训练，基本的了解，了解数学有个水平，我想大家也都应该作的。

最后我想到，最近几年来，也许交流的机会会减少一些，我就想到毛主席讲的自力更生，我想什么事情最后都要靠自己，尤其是年轻的人，今天可惜年轻的人不多，不过大家回去可以转告。年纪轻的人应该联合起来搞自己的工作，不一定靠外国专家，甚至不一定靠中国专家。一个很有名的例子，是法国的布尔巴基学派，布尔巴基成了一个重要的学派。这些人就是因为巴黎的数学领袖人物，巴黎大学教授大部分都搞函数论。对于后来发展的新的数学，老教授们不知道，所以年轻有为有志的法国数学家，他们自己成立一个学派，自己闯。我深切地了解科学家稍微有点虚名就忙得不得了。虚名涨高，数学退步，精力又差，没有什么用处，越来越没用处。所以年轻人要靠自己，自己来组织，自己来找题目，自己来讨论。不要靠国外的专家，也可以少靠国内的老师的帮助，自动地去做，我记得从前看法国有名的小说家罗曼·罗兰的一本书，这本书讲德国无名音乐家的历史，当年德国一些年轻的音乐家到罗马去学音乐，罗马人说这些人是野蛮人，他怎么能懂音乐。可是没有多少年，德国出瓦格纳，出贝多芬，出巴赫一大群伟大的音乐家。所以一切都靠努力，有志气，尤其是搞数学，现在这个情况下，即使有困难也都是可以克服的，有些物质上的困难我们就靠刘永龄先生。

大家要了解，数学是很有希望的，两千年来历史，现在成为伟大的学科，跟应用的关系，计算机理论甚至生物学工程各方面的关系多得不得了。这是一个奇怪极了的事情。你在解一个方程式 $x^2+1=0$ 的根，结果，像这种样子的讨论会有应用，不能想像。这个方程式要有意思，就需要有复数，结果，复数是会有应用，真是神妙极了的一件事情。所以数学的前途是非常有希望的。在中国这个环境下有很多很多的事情要做。

我的话就到此结束。

38.21 世纪中国数学是中国四化的一部分

这是作者在第三届“陈省身奖”颁奖仪式上的讲话，标题为本书编者所加。原载《中国数学会通讯》1991 年 6 月。

主席、各位同志：

三年以前在这里开会，我就说过，21 世纪和我没关系，我不应该说话，没想到三年以后又讲了，我想我希望我还有机会参加第三次会、第四次会、第 n 次会，但是不再讲话了。

上礼拜我们几个朋友到西安去，看见西安的发展，想像当年大唐帝国的伟大。唐朝很大的贡献是唐朝的诗，诗到了晚唐慢慢衰落，慢慢没有新的气象、新的活力。因此我们想到数学是不是有同样的现象，数学在 19 到 20 世纪有很大的发展，一般讲起来，它是有连续性的，有一个主要的主题，然后由这个主题向各方面的推展，有的是基础方面的澄清，有的是向各方面的应用。这个活力是不是可以保持下去？天下的任何东西都不见得永远有生机、永远可以发展。我个人随便看一看，维持到 21 世纪大概没有问题。最近数学和理论物理的关系，在数论方面的重大发展，计算机的引进在数学上引出新的问题，对老的问题有很多帮助。这种种表明数学是有很多活力的，所以 21 世纪是有很多事情要留给大家做的。

刚才听程先生的报告和王先生的谈话，这三年来中国的数学有很大进展，怎样再根据这个进展，再向前推一步。讲几个故事，国内一般的感觉就是跟国外交流不太多，或者是缺少能够指导的人才，往往感觉到研究生甚至于年青教师们缺少指导，我想这不应该很要紧。比方说，王元先生的谈话中说，科学院数学所有 7 万多册书，根据这样的设备，中国数学家要自己发展自己的中国的数学，自己找到研究的方向。一个很好的例子是法国布尔巴基、李群，20 年代法国有很伟大的数学家，如皮卡、阿达马、蒙泰尔，那时他们都老了，他们的工作方向都是在复变函数论，对于近代的数学，像抽象代数、拓扑都失掉了联络。那时候法国一些年青的数学家，觉得不一定要跟这些老先生学，我们来念书，自己来想发展，这就是后来有名的布尔巴基学派，在数学的发展史上起了很大作用。我的一个合作人，也是我的学生，J. 西蒙斯，当年我们的工作是在理论物理上的应用，他进伯克利做研究生时，伯克利还是一个小的数学系，很多近代数学的科目没有代表性，没有教授能开这些课。

西蒙斯自己念书，念了一个东西，念懂的话，他出一个布告，今天我要讲某某题目，是莫尔斯理论、对称黎曼空间，他的兴趣是在微分几何，他讲得好的地方，同学们去听，后来教授也去听。

这些例子说明，数学的研究靠自己的主动、自己的努力。当然有人指导最好，指导不是很重要的因素，重要的是要造成一个空气一个潮流。数学的研究是需要努力的，一个人为什么要努力呢？不努力舒服多了，一个人为什么要念书呢？都是有一点点目的。我当年看数学杂志论文，到了一定地步，就觉得我也可以写出论文，至少和这个一样好，当然给你一个理由可以去努力。假使我们造成一个相当的环境，有这个设备，使在中国有一个数学的潮流，有些自己的朋友，有些年青的朋友互相讨论互相探讨。国外的影响是非常需要，慢慢地自己想法子把这个需要渐渐地减少。具体的，我有一个看法，最近到西安去，也到别的地方去，交流对中国数学的发展是很必要的，交流是分两方面的，一种是全国性的，一种是国际的是世界性的，全国性的就是我们在这里，我们有这种幸福，有很多的机会和最近的潮流接触，有很好的设备。很要紧的是想法子帮助中国其他内地的地方，它的设备，它的环境不能够和这里比较。是不是可以制度化，设立访问的学者、访问的讲座、访问的奖学金，使内地的可以到条件优越的地方做相当一个时间。我到过太原，现在还不多，最好能制度化。我们了解有一批年青很有为的数学家在国外，中国政府当局已经放松了对科学家的限制，听说可以出境自由，要有具体办法，不只可以出境自由，要让他们到各处跑一跑，看一看国家的情形，了解他们当年生长的中国，怎样尽个人的力量帮助中国科学的发展。最要紧的是，不要用太固定的办法，能用灵活的办法，使大家自己从内心发出这个思想，愿意帮助中国的科学发展。

我的看法，21 世纪中国数学的讨论是中国四化的一部分，中国的数学家要参加四化的运动，讨论一下数学在四化中如何作出贡献。我讲一个事实，前几年美国罗素基金会有一个报告，他们调查了一下发展中国家跟已发展国家的距离，这个距离并没有接近，而是越差越远了。中国的高科技的建设，包括在数学方面做的工作，不是一个奢侈的事情，是求生存。科学在进步，世界在变化，一切东西都有高科技在侵入我们的生活，要生存，不管你喜欢不喜欢，我想我不喜欢，没有高科技，用不着这么一下子万里往来，呆在家里要舒服多了，但是维持国家、社会的生存，非要这样发展不可。

要我讲一讲，我就随便讲一点意见，谢谢大家。

39. 在清华大学(台湾新竹)论学

1992年4月24日,陈省身、杨振宁、李政道、李远哲应台湾清华大学(新竹)校长刘兆玄的邀请,参加清华大学80周年校庆,并在《杰出校友座谈会》上回答师生的问题。本文是座谈会的谈话记录。转载自《杨振宁文集》,华东师范大学出版社,1998年。

刘校长:今天藉着清华大学建校80周年的机会,非常荣幸能邀请到四位杰出的校友,来校作学术演讲。承蒙他们在时间上的帮忙与配合,四位今能共聚一堂。对清华庆祝校庆而言,没有比这样更具意义了。由于时间宝贵,我现简单介绍四位在数学、物理、化学界各有顶尖成就的杰出校友:

陈省身院士,清华34级校友,1983年沃尔夫奖得主,是国际闻名的数学大师;杨振宁院士,清华42级校友,1957年诺贝尔物理学奖得主,目前担任纽约大学石溪分部教授;李政道院士,清华45年到46年校友,1957年与杨院士共同获得诺贝尔奖,现任哥伦比亚大学教授;李远哲院士,清华61级校友,1986年诺贝尔化学奖得主,目前担任加州大学伯克利分校化学系教授。

在座谈会之前,我与他们作简单意见交换,决定采取非正式,不指定课题的方式进行,但焦点仍放在下列几项:一是四院士求学历程中的可贵经验,足供后学者借镜之处,二是中国未来的前途,三是科学未来发展的展望,四是对清华大学未来的建议与期许,包括对我们青年学子的期许。围绕着这些相关题目,请他们先提出看法,再将时间交给大家,与诸位教授、同学讨论。

首先,请陈省身教授先为我们说几句话。

我想,一百年的清华应该可以达到
全世界第一流大学的水平

陈省身:让我先讲一个小故事。我是1930年至1931年间,在清大数学系担任助教。当时学校的大事是招考——没有联招,由各校自行招生。记得那时清华全校连研究生在内有一千二三百人。招考对我这个年轻助教而言是件大事,因为能在工字厅内阅卷,并且有一顿丰盛的饭吃,所以内心很高兴。大家共聚在厅内阅卷,一些有趣的试卷可以传观。有一年是陈寅恪先生出国文试题,他认为中文很重

要的训练之一是对对子,因此第一题就出了对对子题目——"孙行者"给学生对。有些学生觉得很困难,有人则以"胡适之"对,很好的对子。但对学数学的人而言,更好的答案应是"祖冲之",他是南北朝时一位伟大的数学家。

陈先生那年出的国文试题是"梦游清华园记"。我今天也出一题供大家思考——"百岁清华"。清华今天80周年,再20年就100岁了,我们希望届时的清华是何种面貌呢?这20年中我们可做些什么事来达成这些愿望?我思考了一下,清华在80年前是留美预备学校,约在1930年左右,留美学生回到国内,把学术风气提高不少,成效显著。如今我们又达到了另一新的阶段,我想,100年的清华应该可以达到全世界第一流大学的水平。如何能达到这个目标呢?首先要充实研究院,继续加强。其次,学校最初是希望将西洋科技移转到中国来,但不久之后,就发现到西方社会在物质方面虽有进步,但也充满了矛盾、冲突,因此,如何把西洋文化与中国传统文化思想相结合,创造出更新更完美的文化,应是当务之急。新竹人文社会学院的建立,这是很重要的。

当然,在此我也不禁想到北京的清华大学,两所学校应该多来往,加强合作,才能对中国未来发展起更大的影响。

在西南联大与研究院那六年时间,
可以说是奠定了自己后来研究工作的基础

杨振宁: 去年年底,我收到刘校长邀请参加清华建校80周年活动的信,我很快就答应了,因为我个人与清华有极密切的关系。我父亲在1929年,我7岁时,到清华担任数学系教授,于是父亲、母亲与我就在那一年的秋天搬到清华园,因此清华园是我童年熟悉之地,留下许多美好回忆。抗战开始后,清华先迁到长沙,再迁到昆明,在昆明与北京大学、南开大学合并成立了西南联合大学。我在西南联大读了四年书,毕业后又考进清华的研究院念了两年书,获得硕士学位,然后又考取最后一届的留美公费,赴美念书,所以我与清华实有深厚的渊源。

回想我这一生,对这些多重关系,怀有非常感激的心情,尤其在西南联大与研究院那六年时间,可以说是奠定了自己后来研究工作的基础,当时写的学士、硕士论文,是我后来工作主体的开端。西南联大那时教学、研究的风气非常浓厚,我深受其影响,学习了很多。各位同学在美好的新竹清华园内,也一定可以学习很多,希望大家能利用这美好的环境,创造自己美好的前途。

经济的发展与生活的享受是相对的,
而文化的进步与科学的成就是比较绝对的

李政道: 我这几十年来,常回台北,发觉台湾的经济情况进步飞速,尤其是这十年之间。因此,我想跟各位谈谈,经济的发展与生活的享受是相对的,而文化的进步与科学的成就是比较绝对的。刚才杨先生提到西南联大,我是1945年进西南

联大,那也是最后一届,我 1946 年就到美国了。

各位恐怕很难想像西南联大当时恶劣的物质条件,念书的教室是草屋,外面下大雨,里面下小雨。宿舍都是双层床,紧密相连成排,吸血的臭虫很多,因此每两个月,就要把床轮流放进一个大锅子中煮一下,拿回来晒干一天,然后可以有两天没有臭虫,两天后,臭虫就从隔壁床铺爬过来了。生活的条件十分不良,最高的生活享受就是每两个月有两天没有臭虫,可以舒服睡上一觉,可是这些并未阻扰我们求知作学问的精神。所以说,经济的发展与生活的享受是相对的。

至于在科学、文化进步方面,从 19 世纪开始,量子力学、原子物理、原子能、核物理、核能、分子、镭激光,再到超导体,一切近代文化、高技术,都是在前人基础上逐渐发展的。文化是人所创造,而近代文化与基础科学有绝大的关系,而这些之产生可能是在很困难之阶段。所以物质享受是暂时的,科学文化则比较永久。我们在 20 世纪末,21 世纪即将开始,应该要有什么样的发展与贡献,这将来的文化抱负就落在你们大家的身上。

把握生命,克服知识上的不美满

李远哲: 首先我要欢迎这几位远道而来的朋友,我是在新竹长大的,也算是"地头蛇"。在日据时代,清华大学的现址是一高尔夫球场,记得念幼稚园时,我们做飞机模型,老师带我们到此竞赛。当时幼稚园学生只能用纸折飞机,但我父亲善于工艺,就帮我用竹子做了一个模型,很大型的 747,要跟其他同学的纸飞机比赛。老师说不准,只好换成纸做的。不过,我的纸飞机一样飞得很远。

我高中毕业后就去读台大,回来念清华是 1959 年,清华在新竹复校不久。由于庚子赔款累积了很多钱,因此清大有了原子炉及加速器,这在那时是新鲜的东西,很多人来此念书,都满怀着热忱在此工作。当时校舍很少,山上有很多蛇,晚上到实验室必须带手电筒及竹棒子,以免遭到蛇咬。因为物质条件不佳,大家生活都很朴素,但校内的设备则很完善。我是念化学的,来此读的是"原子科学研究所",倒是念了不少原子物理、近代物理实验方面的书,这对我后来发展有很大的帮助。

有一件事也可一提。那时学校刚创办,除了第一届的吴大猷院长回来讲学,讲"量子力学"很精彩以外,其他的师资并非很理想,我不是叛逆,说的是老实话。我们是土生土长,但是也希望不丢脸,如日本教授上课,我们总是特别认真,希望他们了解台湾小孩比起日本小孩是聪明一些,果然后来很多日本的老师都有同感,认为台湾长大的学生都做得不错。不过,也有很多不理想的地方,如当时很多人想考清华研究所,优秀的学生考上第一、二届,很多人没考上。过了两个月,国际原子能委员会招考一些科学家,送到国外受训八个月,回来后,开了记者招待会,变成原子能专家,被聘为清大的副教授。所以高我两届的同学就常觉得奇怪,某位教授似曾相见,原来是一起参加考试坐在旁边的,他没考上,我考上了,但是他回来却成了教授,我们还必须去修他的课。

上“量子力学”的课也不是很理想。记得第一次考试完后,老师骂我们笨,因为没有一个人考50分,他就叫我们晚上回去,重新再教我们。结果全班都回去上课,发现原来是老师做错了百分之五十,所以我们最高分数只有50分。我说这些,倒不是批评当时清华如何不好,而是指出我们学生满怀热忱,却看到许多的不美满,包括社会上与知识上的现象。我们也知道,知识的不美满,一半源自老师,一半则是人类社会累积的知识并非很完美。因此,我们就逐渐学会了自力更生,靠自己的努力慢慢学。我后来到了美国伯克利做研究,跟一位老师学,可是讨论很多问题时,他总是说“我怎么晓得！要是晓得,何必要你去做研究！”我很能适应,因为我在清华两年就已学会了自力更生。所以,我们固然要满怀热忱,但不要太相信老师,“尽信书不如无书”,对老师教学也是一样。

我以自己切身的体验奉劝各位,要好好把握自己的生命,社会上很多事、人类很多知识都不是美满的,我们应该要努力奋斗,克服这些不美满,创造更完美的知识。

刘校长: 谢谢四位先生的引言,把他们的想法告诉我们。接下来的时间,欢迎各位同学提问题,大家交换意见。

数学中很多思想的泉源是从物理现象来的

数学系林同学: 在科学研究的领域中,存在很多问题,这些问题有大有小,我们研究应该从大问题着手较好,还是从小问题着手?

杨振宁: 我念书时,有一位教授是当时世界著名的物理学家之一,常跟研究生座谈,有一次同学问他:应该做大题目,还是小题目?他说:多半的时间应该做小题目,大题目不是不能做,只是成功机会较小,若能透过做小题目的训练,则更能掌握解决大题目的精神。几十年来,我仍觉得他的劝告是正确的。

陈省身: 科学工作的好与坏、大与小,都很难说,要看各人不同的判断。像爱因斯坦当年在瑞士联邦工学院做学生时,数学、物理是同一系,二者不分,据他的自传中说,他可能学物理,也可能学数学,但数学都是搞小问题,物理则是大问题,而他要研究大问题。爱因斯坦是成功了,但我还是希望大家先选小问题来研究比较有把握一些(哄堂一笑)。

物理系同学: 数学对科学而言是一相当严谨而有用的工具,但不知诸位在研究过程中,会不会觉得数学限制了你的思考路径,发现数学并非十全十美,有些问题并非数学能解决的?有时在研究问题时,若能以数学以外的方法去看待,反而会变得很简单?

陈省身: 有很多问题数学家的确不能解决。当年我在芝加哥大学教书,有一位哈密先生就认为,学物理的人不要念太多数学。这话不知是否正确?他说,一个物理学家所需要的数学,他自己就可以发现,用不着去念太多书。

李政道：物理跟数学的确有很密切的关系，可是数学不是物理，物理的目的是解释自然界的现象，解释要用到数学，可是关键在自然界本身。有一个故事说：有个人拿脏衣服要去洗，看到有家店外面，写着“洗衣店”，于是他就提着那包脏衣服进店里。里面的人问他：“你干什么？”他说：“我来送洗衣服。”“我们店不洗衣服！”“那为什么外面牌子写着‘洗衣店’？”“我们是卖那牌子的！”这故事是说：物理是真正洗衣服的，而数学是那牌子，不过牌子也很重要。（这时陈省身院士不疾不徐接过话）

陈省身：奇怪的是，这牌子会有用！（又是哄堂大笑）

杨振宁：我有一点补充意见。物理和数学有很微妙的关系。在十八九世纪，数学和物理发展的时候，两者的关系十分密切。牛顿之所以发展出微积分，是因为他想知道行星的轨道与万有引力，以及牛顿的三大定律。可以说直到19世纪的上半叶，数学中很多思想的泉源是从物理现象来的。可是后来数学的价值观逐渐独立，20世纪一位重要的数学家，也是陈教授从前在芝加哥大学的同事，他在30年前说：20世纪数学最大的成就，是从物理的约束中自我解放出来。这句话以现在来说并不完全正确，物理学者通过他们的价值观念，研究了自然现象，发现其中有很奥妙的数学结构，这些结构不是物理学家本来所学过的，而数学家已从不同的价值观独立研究过，这情形已屡见不鲜，最有名的例子是爱因斯坦的广义相对论。

爱因斯坦在1908年开始，想推广他1905年的狭义相对论，使其在引力场中也可运用相对的观念，这其中所需要的数学是爱因斯坦所不知的，可是他有了一个思考的方向。后来他的一位数学朋友告诉他，这在上世纪黎曼已经开始，是19世纪数学的一个重要发展方向。这使他在1915年完成了他的广义相对论。所以，一个物理学家如果不了解数学可能在他的研究范围里所能发生的作用，往往不易成功。

走对路，左右逢源；走错路，再努力也难有大成

物理系同学：很抱歉再提一问题，刚才谈的是物理跟数学的关系，现在能否谈一谈物理和哲学的关系？

李远哲：虽然是学物理化学的，但主席说我名字有“哲”，故要我来回答。我们在谈哲学时，常会谈到对宇宙世界、客观世界的看法，而哲学观点与自然界现象的关系是很深刻的。譬如说，以前的人以为地球是宇宙的中心，太阳、月球都绕着地球走，因此产生君主、帝王是中心，我们围绕着他走的观念。但后来大家知道原来是我们围绕着太阳走，社会上遂有了平等观念，帝王、君主不再是中心。所以我们对客观世界的了解，会影响到社会上很多事情。

杨振宁：如果观察一下全世界各地方的哲学、科学发展的历史，就会得到以下的结论：近代自然科学在萌芽时，如哥白尼、牛顿时候，与哲学是有密切关系的。我们看牛顿的东西可知，他的自然科学与哲学思想是同一起源，不过，牛顿以后，到今天20世纪，很明显地，自然科学受哲学的影响程度已逐渐降低。目前是物理学

的发展大大影响了哲学,反之则日益减少,我觉得这也是自然的规律。

电机系黄教授: 我有两个问题想请教诸位院士。第一,如何选取研究的方向与领域? 刚才几位先生谈到,即使在西南联大物质贫乏的时代,如杨教授说,他的学士论文就能奠定他日后研究的基础。不过,若从另一观点来看,诸位所遭逢的正是近代物理学蓬勃发展的阶段,时也? 命也? 运也? 我们到底要如何选择? 第二,清华师资的基干大概在四十岁左右,很多教员很努力,也愿意努力,不过有一点困难,即不知如何做学术生涯的规划,关于这一点,想请教各位。

杨振宁: 我想把这个问题用另一个方式说明。大学中有很多优秀的研究生,他们自己和老师都不能预测未来的成就有多大,可是二三十年后,成就却可能悬殊。回想一下,成功的同学在当时并不见得比不成功者优秀许多,这其中有一基本的道理,即有人走对了路,左右逢源;有人走错了路,再努力也不能有大成。那么将来有大发展的方向是什么呢? 这无法有一定的答案。一个研究生对自己前途最重要的责任,是必须掌握自己所念的学科中哪些部分是比较有前途发展的,还要掌握住整个领域发展的大方向。如何做到呢? 我的建议是,把"天线"放长些,多方浏览,不只是浏览本身学科狭窄范围的文献,更要随时留意其他的学科,透过广泛接触,才能找出这门领域的大方向。

陈省身: 选择科目与方向是很难决定的,中间有很多是靠机会。我的建议是,要有广博的知识,不要只念自己本身科目的东西,不管有无相关,都能尽量吸收,了解的范围愈广,做正确决定的可能性就愈增加。

李政道: 这个问题即使是我们自己也必须面对,物理可能比数学容易些,因为物理是要解决自然界基本的构造,这构造较清楚,有许多大问题在那里,因此,第一步是要了解有哪些大问题,第二步是考虑要不要做这些大问题。一个大问题,其困难常在观念,而非数学。每个人对自己本身的优缺点也必须知道,估计自己能力多寡,看看哪些路别人走过,而自己也能走,能走的原因在哪里? 很多问题之所以成为问题,是因为看不清楚,而没有花足够时间,也很难一下子看得准。

抓住"大题小作"、"小题大作"的原则

李远哲: 我们做科学研究工作的人,花了很多心血、时间,总希望能有些创新与成果,但往往达不到目的。我喜欢打棒球,现在依然常跟研究生去打棒球,虽然我年纪大了,但偶尔还会击出全垒打,打到界外。有一次,我打到电线杆的右边,篱笆外面,球赛必须停止,因为要把球捡回来才能继续打。而通常学生都会说:李教授,你坐着,我们去捡球。于是 10 个学生就一起去找。他们看到我打到球场外、电线杆的右边,于是他们都去那里找,但找了 20 分钟,还没有把球找回来。我就去帮忙捡球,那时我就不去电线杆右边,而跑到左边,学生都说我跑错地方,结果我在左边 20 米处找到那个球。这件事恰好说明,我们做科学研究工作,常常根据自己的观察下判断,但这观察不一定正确,判断也不一定对。

一个老师，必须把自己知道多少告诉学生，同时也要让学生知道哪些是我们不懂的，年轻人才知道哪些地方有待克服。至于大、小题目孰优孰劣，我觉得都无妨，只要抓住"大题小作"、"小题大作"，是指在研究一个小题目时，也要观照到这个题目背后所反映出来的普遍性；有的人则喜欢"大题小作"，例如分子结构与化学反应的关系，分子有数百万个，如此普遍、庞大的研究要如何着手？必须从小处开始，先挑几种分子，研究跟它的化学反应有何关系。小题目处理得好，才有能力解决大题目。所以，做化学研究者是没有一定的方向、规律，只要努力知道哪些题目尚未解决，做小题目者能注意其普遍性，而做大题者应从小处着手，这样或许就能找到自己的路。

数学系王同学：我有两个问题。第一个问题想请教李远哲教授，当您获得诺贝尔奖之后，在台湾的声望便直线上升，尤其是一句"教授治校"，让教育部长、大学校长们面临一阵混乱，也是在声望正隆时，您参加了国统会，可否请您谈谈参加国统会的理由？第二个问题则想请教四位，你们都是在获奖之后，就一直留在美国研究，事实上也都归化为美国籍，这是否说明了你们的研究生命必须在美国才得以开展、延续？西方世界是否有比华人世界更优越的科学研究潜力？诸位是否曾考虑在未来的日子里回到华人世界，在大陆、台湾或香港，从事科学研究或教育下一代？

李远哲：今天在座的还有一位国统会的研究委员沈君山博士，如果我的回答不够清楚，我想他可以补充一下。

看海峡两岸的现状，我觉有许多不完满的地方，还要再努力，才能使中国社会趋于理想。台湾这几十年来，民主步伐在加速，但积累的很多问题，使步伐无法走快。大陆上也有很多问题。现在，两岸交往日益频繁，我住在海外，也感到高兴。但忧心的是，有些人只想赚钱，有些则想维护既得利益，这都是不正常的，因此希望两岸在未来交流时，能走正规、好的方向，并且是对人民有利的。

另外，若从长久来看，两岸都进步，中国的统一对中国人是有利的，国统会若能做好该做的事，民主化的步伐或许会快些，正是基于这样的希望与期待，我接受了国统会的邀请。

李政道：研究的环境是不断在变的，陈省身、杨振宁与我当时的中国环境跟今天又有不同，我大部分的工作是在美国。但很多新的成功科学家，如高温超导体的朱经武、吴茂昆、赵忠贤等人，赵忠贤可说完全是在大陆进行，而吴茂昆则是在新竹。我们是一代传一代，尽自己的努力帮助下一代人成长，我相信不久，两岸中国人与海外可以联合起来，届时中国科学的发展一定可以获致极大的成功。

陈省身：我个人一向对中国数学有热忱，因此希望能为中国数学做些事，1948年我在南京，在现今南港中研院数学研究所做事，也是那一年我到了美国。一部分工作在国内进行，一部分在美国。至于谈到将来，我是"与校同寿"，1911年生的，所以没什么"将来"好谈了。

下一世纪,中国人将走向每一科技的最前端

杨振宁: 我想提两点补充意见。首先,我的研究工作若不在美国的环境中是否做得出来？我曾经思考过,有一大部分工作,若我在50年代初回到大陆,是不可能做的,而这些都是和物理现象比较发生关系的,因为这些现象发生的地方,主要是在美国,美国有很多人才、财富、大型加速器、新资讯,若当时回大陆,恐怕就不会朝这些方向发展了。

但是也有一些另外的工作是可以不在美国做的,一些不与立刻发生的事情有紧密关系的工作,我也做过很多,而且很重要,如果我回到大陆,这些工作恐怕不仅能做出来,甚至会提早,因为我的精力只好用在这上面。

杨振宁: 刚才那问题背后或许还有一层涵义,即中国的传统文化,是否与目前政治、社会、经济发展的条件,与对个人科技研究的前途是不利的。关于这一点,我觉得眼光应该放远。19世纪末,中国文化受西方文化冲击,发生激烈辩论,产生如"中学为体,西学为用"这种说法。从近距离看,觉得中国在近代科学发展上很缓慢,但从远距离看,其实不慢。第一次两个中国人得到物理学博士学位,都是在1910年代于美国获得的,他们回到中国,教育了一批人,当我于1938至1942年间在西南联大读书时,其课程跟当时世界第一流的大学相比,完全是有过之而无不及,"有过之",是因为我们良好的教育传统。西南联大得天独厚,有强大的师资阵容,我得到很大益处。这是因为1910年那少数的几个人,通过我父亲那一辈,再到陈省身那一辈,等到了我念书时,已经可以在国内接触到国外最前卫的学问,从这个角度看,那时间其实是很短的。

再举一例。中国大陆一直给人落后的印象,这是错误的,大陆的科技其实相当进步。在1948年、1949年时,中国根本不知何处有铀矿,更不用谈开采了,但到了1964年,他们不仅试爆第一颗原子弹,两年八个月后,又试爆了氢弹。这足以说明他们培养了千千万万的科学家,所以中华民族与中国传统,在有组织的情况下,从科技上进军,是完全可以跟西方社会抗衡的,西方人也很清楚这一点。因此,他们对中国人能做科技工作不仅非常之佩服,而且害怕,这害怕也不是自今日始,而是从19世纪末就开始了,当时中国人所做之事补偿了几百年之落后。对于在下一世纪,中国人将走向每一科技的最前端,我深表乐观。

抛开面子之争,人与人平等相待

李远哲: 杨教授的意见我同意。如果毕业后,我一直留在台湾,大概以后的成就完全不一样。我做的实验固然所需物质上的条件较好,但这并不是主要原因,而是到了美国之后,看了不少科学家,学了不少东西,做过多次讨论,慢慢培养出不管任何事,只要想完成就可做到的自信心,这是美国社会给我的。

1961年我得硕士学位后赴美,当时台湾的科研设备、经费与国外相比,差得很

多。但现在看到清华教授的设备、经费比起国外已经相当不错了。不过,你若问在目前台湾的科研情况下,我们是否能作出大贡献呢?我觉得时间仍未成熟,原因有二:第一,年轻人从事科研、学术工作的热忱不够,低迷很多,台湾的功利社会迫使这些年轻人走向容易找工作、追求安逸生活的道路,而任何事情若缺少有心人去全力以赴,是无法开创新局面的。第二,在科学探讨中,面对真理,大家应该平心静气讨论问题,来提高学术气氛。但我回台后发现,也许是历史包袱过于沉重,或是封建社会留下的遗毒,或是士大夫思想,使得我们还没学会"人与人平等"的观念。我在美国30年,学会很多事情,其中最重要的一点是人与人的平等相待,所以,我与学生讨论问题也是完全平等。但这里似乎讨论不容易,谁也不服谁,有些是面子问题作祟,这是不健康的,不正常的。因此,虽然物质条件改善了,仍使我的一些合作计划进行得不很顺利。我希望大家能平等相待,不要因为面子问题阻碍了我们的进步。

用热忱、奉献的心创造更完美的知识领域

化学系同学: 能否请李远哲教授给我们大学部还在建构基本化学知识的学生一些建议?

李远哲: 我只能提供一点经验。我到台大念书时,满怀热忱,但我没有想成为伟大科学家的野心、抱负,只想成为一名不错的科学家。我初进台大就问学长学姐,如果往后四年,我好好努力,会成为一名很好的科学家吗?他们都对我说:不会。他们说,二次大战后,许多新兴的科学,如量子力学、统计力学等,都对化学很重要,但系里既无此课程,也无人教,因此,若想好好学,就到物理系多选几门课吧!我就去选了几门课作实验,念量子,果然收获不少。也是在那时,我明白了即使修课程、拿学分,考试90分,毕业后也不一定能成为好的科学家。我跟物理系同学利用晚上念量子力学。跟年轻讲师一起读书,一起做研究。所以,没有一条路是必须的,只要大学四年能掌握生命,有目的地培养自己,按阶段去学习,这样就可以做得很好。

刘校长: 非常谢谢四位杰出的校友在此与大家交换意见,四位对我们做学问、选题目的建议,都很有启发性。此外,四位也告诉我们,经济、物质的成长是比较相对、短暂的,学术、文化、科学的成就是比较绝对、永久的。更希望同学们能用很大热忱、奉献的心,去努力求取心得,获致自信,届时不必管老师是好是坏,也不必尽信书中所言,也不必抱怨知识的领域不够完美,在创造更完美的知识领域时,我们要有舍我其谁的胸襟抱负。也许有一天,透过大家的努力,两岸都能加速改革的步伐,创造出对两岸人民都有利的条件,更进一步,把中西文化融合、创造成新的中华文化。在这样大的潮流、大的题目之下,清华愿尽其一份努力,从自身努力与两岸清华的合作开始,朝此一方向迈进,到"百年清华"时,能更有一番新的气象,诚如四

位的勉励,希望那时清华真正是在学术上有世界地位的一流学府。在此我谨代表全校师生,再次感谢四位的抽空莅临与热忱指导。

“四位杰出校友座谈会”历时两个小时,却欲罢不能,同学们反应热烈。会后,刘校长代表校方致赠四位校友“清华之光”盾牌纪念,与会师生均报以热烈掌声。四位院士于校庆期间,皆各有数场学术研讨会,亦皆场场爆满,盛况空前。

40. 21世纪的数学

本文是1992年5月31日在“纪念国家自然科学基金十周年学术报告会”上的讲话。原载《中国数学会通讯》1992年6月。

今天我很荣幸能有这个机会同大家讲话。我先讲两个故事。

我们都知道欧几里得的《几何原本》，这是一本数学方面的论著。完成于两千多年以前。它对于人类是一个很伟大的贡献。书中包括了分析和代数，不限于几何，目的是用推理的方法得到几何的结论。其中，第13章的内容讲的是正多面体的面数。正多面体就是这样一个多面体：它的面互相重合，同时通过一个顶点和每面的边数是相同的。正多面体在平面上的情形是正多边形。正多边形很多，有正三角形、正四边形……等等。当时发现，到了空间，讨论正多面体就不这么简单了。空间的正多面体少得多，一共有五种正多面体：四面体、六面体、八面体、十二面体，最大的一个是正二十面体。有个朋友写了一本书，把这些漂亮的几何图形都收进去了，我这里有一份彩色的拷贝。

有些人可能会想，数学家们一天到晚没有事情可做，无中生有，搞这些多面体有什么意思？不过我跟张存浩先生讲，现在化学里的钛化合物就跟正多面体有关系。这就是说，经过2000年之后，正多面体居然会在化学里有用，有些数学家正在研究正多面体和分子结构间的关系。我们也知道，生物学上的病毒也具有正多面体的形状。这表明，当年数学家的一种“空想”，经历了这么长的时间之后，竟然是很“实用”的。

我再讲一个许多人都在讲的故事。有两个中学时代的朋友，多年未见了，一天忽然碰到。甲对乙说：“你这些年在做什么事？”乙说：“我在研究人口问题。”甲当然很想看看老朋友的工作，于是拿来乙的人口学论文一读，发现论文出现很多π。他觉得好奇怪：π是圆周率，圆周与直径之比，这怎么会和人口学扯上关系？这个问题与上面的正多面体问题说明了同样的一点，即基础科学，特别是纯粹数学很难说将来会在什么时候会有用，并且起到很重要的作用。如果要求基础科学立刻就要有应用，那是太短视了。

数学家经常在家里想问题，想出来的东西为什么会有用？我想，主要的原因就是它的基础非常简单，又十分坚固，它的结果是根据逻辑推理得出来的，所以完全

可靠。逻辑推理比实验证实所获的结果要更为可靠些。数学由于它的逻辑可靠性,因而是一门有坚实根底的学问,这是数学有用的一种解释。

还有一个问题是,为什么许多不同的学科往往会用到相同的数学?这也是弄不清楚的问题。一种解释是好的数学太少。天下的高山就那么几座,天下漂亮的东西总是不太多。你到了北京,去玩漂亮的地方,无非是长城、天坛、故宫,总之是不太多。数学要讲应用,就往往归结到那几种特别好的数学,这种好数学也不多。

我的题目是讲 21 世纪的数学,也就是要讲中国的数学该怎么发展,如何使中国数学在 21 世纪占有若干方面的优势。这个办法说来很简单,就是要培养人才,找有能力的人来做数学。找到优秀的年轻人在数学上获得发展。具体一些讲,就是要在国内办十个够世界水平的第一流的数学研究院。中国这么大,不仅北京要有,别的地方也应该办,一般说来,也许应该办十个。

至于什么叫够水平,第一流,这并没有严格的定义。我只能说南开数学所不够水平,南开要达到世界水平还需要很多的努力。

中国科学的根子必须在中国。中国科学技术在本土上生根,然后才能长上去。可是要请有能力的人来做数学很不容易。我从 1984 年开始组建南开数学所。开始想请有能力的人来所工作就是了。可是由于种种原因,很难做到这一点。我们办第一流的研究所就是要有第一流的数学家。有了第一流的数学家,房子破一点,设备差一点,书也找不到,研究所仍是第一流。不然的话,房子造得很漂亮,书很多,也有很贵的计算机,如果没有人来做第一流的工作,又有什么用处?我看到这种情形,就改变想法,努力训练自己的年轻人,培养自己的数学家,送他们出国学习,到世界各地,请最好的数学家给予指导。

我很高兴地告诉大家,这些措施已经开始出现成效。比方说贺正需,他到美国加州大学圣地亚哥分校跟弗里德曼学,弗里德曼得过菲尔兹奖,是年轻的领袖人物。他亲自对我说,贺正需是他最好的学生。贺正需现在在普林斯顿。再比方说,王蜀光。他是王宽诚基金会资助出国的,在选拔考试中获第一名。我介绍他到英国牛津大学,跟唐纳森。唐纳森是英国当代最不得了的年轻数学家。我想他大概还不到 30 岁,现已成为牛津大学的教授。王蜀光一年前已完成了他的博士论文。另一位王荣光(不是兄弟)也是王宽诚基金会资助出国的,他到美国哈佛大学跟陶布斯读博士学位,今年也做完了论文。还有一位是张伟平,他的老师是别斯缪,是法国最有名的年轻数学家(另一位是孔涅)。张伟平在巴黎只用两年时间完成了博士论文,现在在巴黎的高级研究所做博士后。我还可以提到一些人,这里不能一一列举了。

上述四人中,张伟平已答应明年回国,回到南开来。明年张伟平如果回来的话,我希望政府能给一些方便,像这样的人才,希望能留住他。留学生能否回来,主要是国内的环境:待遇问题,对有成就的科学家要给予相应的待遇,今天我不准备

谈这个问题。我只是说，世界上的人才应该是流动的，欧洲回来的人可以再到美国去，当前政策比较宽松，要出国也容易。所以必须想法子留住人，有适当的政策。当然我只会处理数学，政策问题不是我所能处理的。

下面谈谈主流数学与非主流数学的问题。大家知道，数学有很多特点。比如做数学不需要很多设备，现在有电子邮件(E-mail)，要的资料很容易拿到。做数学是个人的学问，不像别的学科，必须依赖于设备，大家争分夺秒在一些最主要的方向上工作，在主流方向作出你自己的贡献。而数学则不同。由于数学的方向很多，又是个人的学问，不一定大家都集中做主流数学。我倒觉得可以鼓励人们不一定在主流数学上做。常有的情形是现在不是主流，过几年却成为主流了。这里我想讲讲我个人的经验。1943 年，我在西南联大教书，杨振宁先生在学校里做研究生。那年我应邀从昆明到普林斯顿高级研究所去，杨先生后来在那里做教授。靠近普林斯顿有一个小城叫新不伦瑞克，是新泽西州立大学所在地。我 8 月到普林斯顿不久，就在新不伦瑞克参加美国数学会的暑期年会。由于近，我也去听听演讲，会会朋友。有一次我和一位美国非常有地位的数学家聊天，他问我做什么，我说微分几何，他立刻说“It is dead(它已死了)”。这是 1943 年的事，但战后的情形是微分几何成了主流数学。

因此，我觉得做数学的人，有可能找到现在并非主流，但很有意义、将来很有希望的方向。主流方向上集中了世界上许多优秀人物，投入了大量的经费，你抢不过他们，赶不上，不如做其他同样很有意义的工作。我希望中国数学在某些方面能够生根，搞得特别好，具有自己的特色。这在历史上也有先例。例如：第二次世界大战以前，波兰就搞逻辑、点集拓扑。他们根据一些简单公设推出许多结论，成就不小。另外如芬兰，在复变函数论上取得成功，一直到现在。例如在拟共形映照上的推广一直在世界上领先。因为他们做的工作，别的国家不做，他们就拥有该领域内世界上最强的人物，我还可以举出更多的例子。

我刚才提到要办十个够水平的研究院，怎样才会够水平呢？

第一，应当开一些基本的先进课程。学生来了，要给他们基本训练，就要为他们开高水平的课。所谓的基本训练有两方面。一是培养推理能力，一个学生应该知道什么是正确的推理，什么是不正确的推理。你必须保证每步都正确。不能急于得结果就马马虎虎，最后一定出毛病。二是要知道一些数学，对整个数学有个判断。从前是分析有关的学科较重要。20 世纪以来是代数较时髦，群论、群表示论，后来是拓扑学等等。总之，好的研究中心应该能开这些基本课程。如不每年开，也可以两年开一次。在我看来，中国要做到这一点是不困难的。无非是两条：一是讲授研究院的某些课程，给予奖金。二是另外也可请几个国外的人来教。请的人如果不是最活跃的，甚至请退休的人来，花费并不大，他们在国外已有退休金，请到中国来只要安排好生活，少量的旅游也就可以了。这样，数学研究院会有一个完整

的课程系统。

第二，我想必须要有好的学生。我们每年派去参加国际奥林匹克数学竞赛的中学生都很不错。虽然中学里数学念得好将来不一定都研究数学，不过希望有一部分人搞数学，而且能有成就。昨天，我和在北京的一些数学竞赛中获奖的学生见面，谈了话。我对他们说，搞数学的人将来会有大的前途，十年、二十年之后，世界上一定会缺乏数学人才。现在的年轻人不愿念数学，势必造成人才短缺。学生不想念数学也难怪。因为数学很难，又没有把握。苦读多年之后，往往离成为数学家还很远。同时，又有许多因素在争夺数学家，例如计算机。做一个好的计算机软件，需要很高的才能，很不容易。不过它与数学相比，需要的准备知识很少。搞数学的人不知要念多少书，好像一直念不完。这样，有能力的人就转到计算机领域去了。也有一些数学博士，毕业后到股票市场做生意。例如预测股票市场的变化，写个计算机程序，以供决策。这样做，虽然还是别人的雇员，并非自己当老板，但这比大学教授的薪水高得多了。因此，数学人才的流失，是世界性的问题。

相比之下，中国的情况反而较为乐观，因为中国的人才多，流失一些还可以再培养。流失的人如真能赚钱，发财之后会回来帮助盖数学楼。总之，我们应取一个态度：中国变成一个输送数学家的工厂。出去的人希望能回来，如果不回来，建议我们仍然继续送。中国有的是人才，送出去一部分在世界上发挥影响也是值得的。我们要做的事是花不多的钱，打好基础，开出好的课。基础搞得好了，至于出去的人回来不回来可以变得次要些。这是我的初步想法。

比方说，参加国际奥林匹克数学竞赛的人，数学都是很好的，如果他们进大学数学系，我建议立刻给奖学金。这点钱恐怕很有限，但效果很大，对别人也是一种鼓励。中国的孩子比较听家长、老师的话。孩子有数学才能，经过家长、老师一劝，他就念数学了。

对好的数学系学生来说，到国外去只是时间问题。你只要在国内把数学做好，出国很容易。国内做得很好的话，到了国外不必做研究生，可以直接当教授。中国已有条件产生第一流的数学家，大家要有信心。

培养学生我主张流动。19世纪的德国数学，当然是世界第一。德国的大学生可以到任何大学去注册。这学期在柏林听魏尔斯特拉斯的课，下学期到格丁根听施瓦兹的课，随便流动。教授也可以流动。例如柏林大学已有普朗克、爱因斯坦，一个理论物理学家在柏林大学自然没有发展的希望，就不妨到别的学校去创业。我希望中国的学生、教授都能流动。教授可以到别的学校去教课，教上半年。各个数学研究院的教授也能互相交换。

我想再稍微讲点数学。刚才说过，选择数学研究方向并不一定要跟主流，可以选自己特别喜欢的那些分支。不过，一个数学家应当了解什么是好的数学，什么是不好的或不大好的数学。有些数学是具有开创性的，有发展的，这就是好的数学。

还有一些数学也蛮有意思，但渐渐变成一种游戏了。所以选择好的数学研究方向是很要紧的。

让我举例来谈谈。大家是否知道有个拿破仑定理？这个定理也许和拿破仑并没有关系，却也蛮有意思。定理是说任给一个三角形，各边上各作等边三角形，然后将这三个等边三角形的重心连起来，又是一个等边三角形。各边上的等边三角形也可朝里面做，得到两个解，等等。这个数学就不是好的数学。因为它难有进一步的发展。当然，如果你感到累了，愿意想想这些问题，也蛮有意思，这好像一种游戏。那么什么是好的数学？比方说解方程就是。搞数学都要解方程。

一次方程易解。二次方程就不同。$x^2-1=0$有实数解。$x^2+1=0$就没有实数解。后来就加进复数，讨论方程的复数解。大家知道的代数基本定理就是 n 次代数方程必有复数解。这一问题有长的历史。当年的有名数学家欧拉就考虑过这个问题。欧拉的名望很高，但当时没有教授的职位，生活上也很困难。那时的德国皇帝认为皇宫中一定要有世界上最好的数学家，所以就把欧拉请去了。欧拉就曾研究过代数基本定理，结果一直没有证出来。后来还是高斯发现了复数与拓扑有关系，有了新的理解。因为模等于1的复数表示一个圆周，在这圆周上就会有很多花样。第一个会证明代数基本定理的是高斯，而且给了不止一个证明。

如果从解 $f(x)=0$ 到 $f(x,y)=0$，那就进到研究曲线，当然也可能没有解，一个零点也没有。于是花样就来了，假使你在 $f(x,y)=0$ 中把 x,y 都理解为复数，则两个复数相当于四维实空间，这就很麻烦，出现了复变函数论中的黎曼曲面。你要用黎曼曲面来表示这个函数，求解原来的方程 $f(x,y)=0$，那就要用很多的数学知识。其中最要紧的概念是亏格(Genus)g。你把 $f(x,y)=0$ 的解看成曲面之后，那么曲面有多少个圈，球面、环面等等的花样就很多，都和 g 有关。

此外，你也可以有另外的花样。比如假定 $f(x,y)=0$ 的系数都是整数，你也可以讨论这一方程的整数解，这个问题就很难了。直到前几年才发现这一方程是否有整数解和亏格 g 有密切关系。当 $g=0$ 时，有无穷多个整数解。$g=1$ 则有些特别的性质。当 $g>1$ 时，德国的法尔廷斯在1984～1985年间证明了 $f(x,y)=0$ 的整数解至多为有限个。这一结果和费马定理有关。那是说 $x^n+y^n=z^n(n\geqslant 3)$ 没有正整数解。这还没有解决费马问题，但是前进了一大步。

确实，数学可以引导出很深的观念。数学中我愿把数论看作应用数学。数论就是把数学应用于整数性质的研究。我想数学中有两个很重要的数学部门，一个是数论，另一个是理论物理。理论物理也是用很多数学的部门。

在这一小时里我无法讲很多的数学。我还想讲一点，比方说最近一个时期最热闹的数学是什么，即当前的主流数学。刚才我说过我并不喜欢大家都去搞主流数学，不过主流数学毕竟是重要的。所谓主流数学，是指一个伟大的数学贡献，深刻的定理，含义很广证明也很不简单。如果在当前选一个这样的贡献，我想那就是

阿蒂亚-辛格指数定理。阿蒂亚是英国皇家学会会长。上个月他来北京,还作过报告。这个指数定理可看成是上面所谈问题的近代发展,即将代数方程、黎曼曲面、亏格理论等等从低维推广到高维和无穷维。

因此,我觉得数学研究不但是很深很难很强,而且做到一定的地步仍然维持一个整体,到现在为止,数学没有分裂为好几块,依旧是完整的。尽管现代数学的研究范围在不断扩大,有些观念看来比较次要,慢慢就被丢掉了,但基本的观念始终在维持着。

我想今天就这样结束,谢谢大家。

41. 抽象的数学会有奇妙的应用

这是作者在第四届“陈省身奖”颁奖仪式上的讲话，标题为本书编者所加。原载《中国数学会通讯》1993 年 6 月。

这个奖是由刘永龄先生倡议的，当时我与刘先生还不认识。刘先生是香港的实业家，他是 1972 年从内地到香港去的，他跟我讲，他刚到香港的时候口袋里只有五元钱。1972 年 8 月，我从美国到国内来提倡“双微”(微分几何与微分方程)的研究，今天能有这样的机会，这个是由刘先生捐助而设立的奖，给予数学是很难得的事情。

我们对刘先生对国内的数学的热心和大力支持表示最大的感谢。我想这个奖使得我们有一个最重要的认识，就是我们这是第四次，但在这四次以来，我们对于得奖的人选可以说没有什么困难。刚才讲起今年这次评奖候选人有 10 个之多，以往曾有成就很好的数学家我们没有能够给奖，这个表示中国的数学多少年来已有长足的进步。刚才两位报告两位得奖人——丁伟岳先生和忻元龙先生的贡献，表示中国的数学研究是达到国际的水平，他们两位的工作在国际上讲丝毫没有逊色。

我们现在需要做的努力，当然是希望这种人这样的工作会更多起来，年纪轻的人能够继承这个传统。

刘先生当然跟我很不一样，他有很多钱，我的显然只有他的不知道多少分之一。不过他对我们的工作很感兴趣。我个人在数学上做了几十年的工作，我觉得我是希望大家能继续做下去，我想做数学是很有意思的。刘先生的钱我想即使有机会拿到的话，我仍宁愿做自己的数学。数学是很奇怪的东西，好像是非常之抽象，好像是有许多事情是大家脑筋里头想这些抽象的问题，不过从几千年的历史看起来，这种抽象的思想是很有用处的，很多的抽象结果在其他方面上是有很深刻的应用。比方说我们讲拓扑上的打结理论，这个理论到现在在国际上也没有完全解决，在拓扑上什么时候两个结是一样的。不过很奇怪的是，这种理论在物理的统一场论中起重要的作用，在生物学上 DNA 的结构也起很重要的作用，在不同的科学方面我们这种抽象的想法这样奇妙地可以起作用，这个是差不多不大能够解释的。我想我们大部分在座的人都是搞数学的，用不着我多说的，我们这个很有意思，也容易使我们得到满足。

最后我愿意代表大家向刘永龄先生对中国数学的支持表示衷心的感谢。

42. 关于“恢复中国数学会”的回忆

1993年6月3日作者接受任南衡、袁向东的访谈，张友余根据录音整理成文。原文收入《中国数学会史料》，江苏教育出版社，1995年。

问： 您是否知道新中国数学会理事会的改选情况和1948年上半年在南京召开的数学会？

陈： 1943年7月我就出国去了，1946年4月回国后直接到上海，后到南京。新中国数学会改选过没有，我不知道。成立时，姜立夫是会长。熊庆来什么时候当选为会长，以及成立成都分会、重庆分会，这些我都不知道，因为当时我不在国内。如果说1948年上半年在南京召开过一次数学讨论会，参加者主要是中央研究院的人，那我应该是参加的，但是我不记得有这么一个会。

问： 请您重点谈谈1948年10月在南京召开的10学术团体联合年会及中国数学会的改选情况。

陈： 1948年10月在南京召开的10学术团体联合年会，我是清楚的。这次会胡敦复也来了，大家讨论的事，是恢复中国数学会，而不是合并。我请胡敦复、姜立夫等到我家吃饭，吃过饭后，大家在一块拟定数学会会员的名单，不知道谁是会员，就把各学校的数学教授都写上，副教授、教员适当写了一些。会员名单和候选人名单都是我写的。那时我的主导思想就是如何把“新”字去掉。恢复中国数学会，就是一个数学会。此时的南京已经相当乱了，乱得很，开完年会之后，时局就不行了。至于以后改选了没有，选举结果怎样，我都不记得了。可能没有选成，但是从此“新”字就取消了，统一为一个中国数学会。不久我就出国去了。

43. 做“好”的数学

1994年1月6日应上海市数学会之邀，在上海科学会堂对青年数学家演讲，标题为本书编者所加。原文载于华东师范大学数学系编辑的《数学教学》1995年1期。

很高兴有机会和大家见面。我想我们共同关心的问题是如何发展中国的数学。我觉得其中最关键的一点是如何培养中国自己的高级数学人才。就目前的情形来说，中国训练自己的年轻数学人才，应该不难做到。因为中国现在已经有了一批优秀的数学家，许多中国大学培养的数学博士，学术水平不亚于国外的博士。我所在的南开数学所，就有一位吉林大学毕业的数学博士，能力很强。我将他介绍到德国的美因兹大学，随克雷克教授做研究。克雷克是后起的拓扑学家。这位博士工作一年以后，于今年春节回国。由于工作出色，他已接到两项邀请，再去国外合作研究。我们鼓励他多到各地去访问。几年来，我们派了一些年青人出去，现在陆续回来了，人数还不太多，但已开始起作用。美国这几年经济不好，找数学的职位很难。这一情况恐怕还得继续一个时期。到国外去，不必去读博士，做博士后最好。多一些人留在中国，最终目的还是提高大学、研究院的数学水准。

当前中国数学发展的主要问题是经费不足。虽说国家设立了专项支持数学研究的天元基金，相当重视。但数量毕竟不多，分到下面就没有多少了。我更关心研究生的待遇。一些特别优秀的研究生可否给以特级奖学金？假如上海每年资助20名优秀生，每月津贴500元的话，一年所需经费不过十来万。许多有力量的企业家资助这点钱，设立专门的奖学金，应该不太困难。问题是我们的工作做得不够，人家不了解。

现在读数学的人少了，许多人都想去做生意。美国也是如此，国际性的。这倒没什么可怕。对数学没有兴趣的人何必来读数学？不真心念数学的学生不来也好。人少些，但精些，更易出人才。我们要帮助的是那些热爱数学的优秀人才。我们搞数学的生活要改善，但也不能太舒服。住在上海的宾馆、饭店，舒服得很，菜烧得非常好吃，可我觉得那不必是做数学的地方。做数学的人是另外一种享受，大家聚在一起，互相谈谈。一旦有了一个得意的想法(Idea)，无论简单的还是重大的，都是一种最高的享受。数学这个职业，生活相对比较清苦，发不了财，但有一个好处，

就是比较保险。做一个数学家至少得下十年苦功,不是什么人都能来顶替的。别人很难来抢你的饭碗,所以说“保险”。我个人觉得,读数学的人不必太多。“大家不想读数学”,在某种意义上说,反倒可能支持真正的数学研究者。国外读数学的人少,也许正是中国成为“数学大国”的机会。当然,我们希望中国数学家的待遇能逐渐追上国际水平。

以下我想说怎样做数学。中国人应该搞中国自己的数学,不要老是跟着人家走。前些年刚开放,请一些国际上最好的数学家来,了解人家的工作,欣赏他们的成果,那是很必要的。但是中国数学应该有自己的问题,即中国数学家在中国本土上提出,而且加以解决的问题。数学不像其他学科,几乎全世界都必须同时攻一两个大问题,而是有很大的选择自由。我们可以根据自己的情况,挑选自己的数学研究课题。题目不必都选热门的。我过去做微分几何时,在当时是冷门。有些东西似乎很老,过时了。其实未必。索菲斯·李引进连续群理论,写了三卷本的《变换群理论》,里面还有许多思想可以进一步挖掘和发展,仍有现实意义。

那么应该选择怎样的课题呢？哪些是“好”的问题？哪些是不大好的问题？这没有一定的挑选方法,各人的标准也不同。有些人总把自己做出来的东西说成是最好的,那往往不对。在香港时我们有机会谈到过这一点,我提议看看公认的大数学家提出的、研究的是什么问题。

20世纪开始的那一年,1900年,希尔伯特在巴黎举行的国际数学家大会上提出了23个数学问题,对本世纪的数学发展有重大影响,可以说影响了20世纪数学的各个方面。希尔伯特关于好的问题提出了两个标准。一个是清晰易懂。他在那次演讲中引用法国拉格朗日(当时活着的最伟大的数学家)的话:“一种数学理论应该能向在大街上遇到的第一个人解释清楚。”清楚的易于理解的问题会吸引人们的兴趣,而繁复的问题却使我们望而却步。另一个标准:问题应是困难的,但又不能无法解决以致使人们白费气力。

希尔伯特在演讲中曾提到两个好的数学问题。第一个是费马问题,即

$$x^n + y^n = z^n \ (n \geqslant 3)$$

没有正整数解。这一问题去年盛传已解决,后来发现还有一条鸿沟没有填没。最近又听说这个困难可以克服。费马问题引发了代数数论的研究。高斯年青时写过《算术研究》,非常重要。他的工作都是开创性的。微分几何也是高斯奠基的。后来希尔伯特也研究数论,使他出名的最早工作就是《数论报告》,非常深刻,至今仍有影响。第二个问题是著名的“三体问题”,它是天体力学中一个十分自然的问题,涉及许多分析、几何、拓扑的分支,具有重要的应用。庞加莱写了两大本书加以讨论。最近项武义教授对此问题有新的见解。总之,希尔伯特的这一讲演值得一看。美国数学会曾在1976年专门开会讨论希尔伯特的23个问题的进展情况。

说到好的数学问题,我想起数学奥林匹克竞赛。中国中学生在国际竞赛中获

奖，的确是中国青年的光荣，我曾经多次表示赞赏和鼓励。但是我认为那些数学竞赛题都不是好的数学题。一个孩子在几小时里能作出来的，一定缺乏深刻的含义。有些题的解决当然需要技巧，但这种技巧不是好的研究课题。今年得诺贝尔经济学奖的约翰·纳什是数学家，也是我的朋友。他会提出各种希奇古怪的问题，如他发现在欧洲地图上有四个城市恰构成正方形。这当然是新发现，却没有多大意思。

我无法非常明确地说出什么是好的数学问题，但总要自己先选有较大意义的问题去做，要有自己的观念。大家都注意做好的问题，提出新观念，我想我们一定会成功的。

最后，我想说，数学研究不能集中在一两个地方，要全国各地都搞起来。小地方往往会出现很好的数学家。但是他们要受过严格的训练，许多读了新闻报道而思考数学问题的人，往往还不知道什么是“一个数学的证明”就动手做起数学来，那是不成的。研究数学还是要踏踏实实地打好基础。

44.《数学百科全书》序

由苏联 I.M. 维诺格拉多夫院士主编的《数学百科全书》于1986年出版，不久荷兰又组织180位西方数学家，编印增订的英文本。中译本由科学出版社刊行，共5卷，1994年出版第一卷。苏步青题字，陈省身作序。

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数，希腊的几何，中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外"数"与"形"，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想像。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种"活"的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在50年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

45. 在数学上，中国是统一了

1995年，在北京举行中国数学会成立60周年年会，这是作者在开幕式上的讲话。标题为本书编者所加。原文见《中国数学会通讯》1995年6月，后收入《中国数学会60年》，湖南教育出版社，1996年。

今天很荣幸能参加这个庆祝会，而且可以致词。对我讲呢，是有特别意义的。因为我们大家都知道，中国数学会是1935年成立的，数学会前前后后我差不多都参加了，例如说10年前在上海的50周年庆祝会，我也有机会参加。

1935年是中国困难的一年，那时候日本侵略是非常厉害，迫在眉睫的。我们都知道1937年发生卢沟桥事变，中日两个国家正式冲突了。这是中国历史上非常艰苦的时期，中国死的人，按最近的报导有三四千万人。那么，讲到数学，那时数学会成立是在上海，上海是在租界的保护之下。国内的几个重要大学，如西南联合大学、清华大学、北京大学、南开大学，或者数学很有地位的大学，如浙江大学都是在沿海、在战区的地方，数学的工作没法进行。我们几个朋友，包括华罗庚先生，在昆明西南联合大学，我们觉得数学的工作不能停顿，所以我们成立了一个"新中国数学会"。因为不能再成立一个，很麻烦，我们也没有这个意思，我们对政治一点经验也没有，也不知道怎么搞法好。就用一个新名字，叫做"新中国数学会"，姜立夫先生是会长，华先生是会计，我是文书。信就是由我来写，这样我们几个就把事情给做了。在昆明有一次开年会，陈建功先生从贵州湄潭(那时浙江大学在湄潭)到昆明来，来参加我们这个会。当时新中国数学会也有出版，出版了好几期中国数学会的杂志。我希望这个杂志国内还能够找得到，有些还是过得去的论文。

我给你们讲讲我所知道的一部分中国数学会和新中国数学会的历史，现在这方面的历史记载还没有，也许有一天我会把这些，把我的经历写下来。

国家胜利了，不能有两个数学会。数学家解决这个问题非常简单，因为谁都不愿做会长，做会长显然就是要取消新中国数学会的"新"。我们这些搞新中国数学会的人要是从政治眼光上讲，"新"字取消是很大的事情。我们和华罗庚同志想，取消就取消吧，就变成了一个，当然是中国数学会。那么然后很明显，就是改选，全国的人(包括台湾在内)，一起改选，成立一个新组织。问题完全就解决了，没有什么

问题的。有很巧的一件事情，就是刚才我讲新中国数学会的会长是姜立夫先生，原来中国数学会的会长是胡敦复先生，当年他是上海大同大学的校长，姜先生的夫人就是胡先生的妹妹。有一天，我请他们到我家吃饭，大家这么一来，我弄了一个名单（就是从教育部拿到的），包括所有大学的教职员在内，请大家选举。选举完了以后新的组织就产生了，我们这几个人的事情就没有了。我个人是觉得人生最好的事情就是没有职务，什么都不要管。这个，我想跟诸位多年来所受的教育很不一样。

总而言之，虽然中间有这么一段插曲，我不敢说有多么完全可靠，可能完全是我个人的观点。这个观点，如果有人对中国数学会的历史有兴趣的话，有机会我要跟他们谈谈，把它们弄得准确一些。

还有一个事情，我要跟诸位报告的，就是中国数学会在国际数学组织中的地位。我们知道数学会的国际组织是国际数学联盟（International Mathematical Union，简称 IMU）。台湾是这个组织的成员。你们诸位有国际交往经验的话，都知道这种问题，这个结是不太容易打开的。1990 年国际数学家大会在美国加州伯克利开会，我在那里。中国大陆和台湾地区都有代表去，我都认识，都是熟人。不但如此，IMU 的主席 J.莫泽是瑞士苏黎世工业大学的教授，我跟他不但熟得很，而且还一同写过文章，我想我们把中国统一问题解决了，我跟他谈了半天。也许你们有兴趣，IMU 的会员分五级，最高的是第五级，最低的是第一级，每个会员交的会费与你的级数有关，要五级就是五倍。台湾，因为它地方小，它这会员就是第一级。中国当时有个问题，中国要加入这个国际数学联盟应该是第几级。美国、苏联当时是第五级，后来法国要把它放在第四级，因此大家有些争论。结果呢，把中国算第五级，那次在伯克利讨论中国参加 IMU 是第五级，中国大陆出三位代表，台湾出两位代表，由 IMU 分别通知他们到会，可是代表的正式名字是“CHINA”，是“中国”。到那时，住在一起，都是朋友嘛，完了之后呢，到我家吃了一顿饭，大家都很融洽。所以我就很有意思地向大家报告一下，数学上中国是统一了。

46. 最近数学的若干发展和中国的数学

原载《科学》第 49 卷第 1 期,上海,1997 年。

数学是一门演绎的学问,从一组公设,经过逻辑的推理,获得结论。因此结果是十分坚强的。它会有用,是可以想像的。但应用的广泛与深刻,则到了神妙的地步,非常理可以预料的了。以下就最近数学的发展,举若干故事为谈助。

有限单群

数学的发展中有一个突出的观念叫做“群”。要研究群的结构,自然应研究群的子群,即在同一运算下成群的子集。命 G 为群, $H \subset G$ 为一子群。如对任何 $g \in G$, $g^{-1}Hg \subset H$, 则 H 称为正则(normal)的。正则子群的存在,可使群 G 的研究变为子群 H 及商群 G/H 的研究,而因此简单化。

大致说来,没有正则子群的群叫做单群(simple group)。这名词有点滑稽;显然单群并不简单。关于单群,有限群论中有一个深刻的定理,叫做费特-汤普森定理:单群的级(order,即元素的个数)是偶数。

有限群论的一个奇特现象,是除了一些传统群外,有某些零星的单群。现在所知最大零星单群的级是

$$808\,017\cdots000\,000,$$

共有 54 位数。这是费希尔与格里斯发现的。数学家叫它为“怪物”(monster)。这当然是一个十分奇怪的群。有专家说,所有的有限单群都在这里了。这结果的证明,听说需 1 000 页,也没有人完全写下来。千页的证明,含有错误的可能性是很大的。

这样,数学就起了疑问:长证明算不算证明?计算机检验到某一高度算不算证明?这是目前的一个聚讼的问题。

椭圆曲线

所谓费马的最后定理说,方程式

$$x^n + y^n = z^n,\ n > 2,\ xyz \neq 0$$

没有整数解(x,y,z)。

这个传说了300多年的结果,最近由英国数学家怀尔斯及泰勒证明了。这当然是近几年来数学界的一件大事。全文见1995年的《数学纪事》[1,2]。

证明中使用的一个基本工具,叫做"椭圆曲线"。这是代数数论的一支。有以下一则故事:英国的大数学家哈代有一天去医院探望他的朋友、印度天才数学家拉马努金。哈代的汽车号是1729。他向拉马努金说,这数目没有意思。拉马努金回答说,不然,这是最小的数,可用两种不同方法,写为两个立方数的和的,如

$$1\,729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3,$$

这结果可用椭圆曲线来证明。

椭圆曲线是一门深刻而美妙的数论。一个系数是整数的多项式方程

$$P(x,y) = 0,$$

通常叫做丢番图方程。它有无整数解(即x,y都是整数),这是数论的基本问题。

需要了解的是,这问题与代数几何有关。若上述方程式的x,y是实数,它确定一代数曲线。若x,y是复数,则方程可释为把y定为x的多值函数;复变函数论有黎曼曲面的观念,用来表示这个关系(但此理论较复杂)。两种情形都有一个重要数量,叫做亏格(genus)。亏格是1的曲线$P(x,y)=0$叫做椭圆曲线。椭圆曲线上有一种奇怪的加法,成一可交换群,这是代数数论的一个十分有趣的结果。

日本数学家谷山丰推测,我的同事伯克利加州大学教授里贝证明:费马定理可由一个椭圆曲线的定理导出。怀尔斯就证明了这条定理。

从这定理我们应认识,高深数学是必要的。费马定理的结论虽然简单,但它蕴藏着许多数学的关系,远超出结论中的数学观念。这些关系,日新月异,十分神妙。学问之奥,令人拜赏。

我相信,费马定理不能用初等方法证明。这种努力,会是徒劳的。数学是一个整体,一定要吸收几千年的所有进步。

拓扑与量子场论

1995年初的一天晚上,我和内人看睡前的电视新闻。忽然听到我的名字,大吃一惊。原来加利福尼亚发行一种彩票,头彩300万元,可以累积。我从前的一个学生,名叫乌米尼,中了头彩,获美金2 200万元。他并且说,将以100万元捐赠加州大学,设立"陈省身讲座"。

学校决定,以此讲座邀请名学者为访问教授。第一位应邀的为英国数学家阿蒂亚爵士。他是剑桥大学三一学院的院长,曾任伦敦皇家学会会长。他作了八讲,

讲题是“拓扑与量子场论”。

这是当前一个热门的课题,把最高深的数学和物理联起来了,导出了深刻的结果。

物理学的一个基本观念是“场”。电磁场尤为近代生活的一部分。电磁场的势(potential)适合麦克斯韦方程,但它不是一个函数。这种场叫做规范场。

物理上有四种场:电磁场、引力场、强场和弱场。现在知道,这些场都是规范场,即数学上是一组矢量空间,用线性群结合起来的。电磁场的重要推广,是杨-米尔斯的规范场论。它把群从旋转群推广到 SU(2)——一个非交换的群。

这自是科学上一个伟大的发展。数学家可以自豪的是所需的几何观念和工具,在数学上已经发展了。

杨-米尔斯方程反过来影响到拓扑。这个方面的一个主要工作者是英国年轻的数学家唐纳森。利用杨-米尔斯方程可以证明,四维欧氏空间 $\mathbf{R}^4$ 有无数微分结构,与基本的不同。这结果最近又由塞伯格-威腾的新方程大大地简化了。

二维流形的发展有一段光荣的历史。现在看来,三、四维流形恐将更为丰富和神妙。它将在数学和物理上开出美丽的花朵是可以断言的。

球装问题

在一定空间中如何能装得最紧,这显然是一个实际而重要的问题。为使问题数学化,我们假定所装物体为半径为 1 的球。一个立刻产生的问题是:围着一球,可放几个同样大的球?

在二维的平面,绕一单位圆我们显然可放 6 个单位圆。在三维的空间,我们如把单位球绕单位球,则可以证明,12 个球是放得进的。剩下还有许多空间,但不能放进第 13 个球。

这定理并不容易证。关于空间装球的密度,有一个开普勒假设,已经 400 多年了。最近,项武义教授对这个问题又作了巨大的贡献。[3]关于这问题的各个方面,请参阅项武义最近的文章。

立体几何是一个重要而困难的方面。近年来 C_{60}的研究显示了几何在化学上的应用。它当然对固态物理也有重大作用。球装不过是立体几何中的一个问题,前途却是大有发展的。

芬斯勒几何

最近经我的鼓励,芬斯勒几何有重大的发展,作简略报告如次。

在(x,y)平面上设积分:

$$s = \int_a^b F(x, y, \mathrm{d}y/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x,$$

其中 y 为 x 的未知函数。求这个积分的极小值,就是第一个变分学的问题。称 s 为弧长,把观念几何化,即得芬斯勒几何。

高斯看出,在特别情形,

$$F^2 = E + 2Fy' + Gy'^2, \ y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x,$$

其中 E, F, G 为 x, y 的函数,几何性质特别简单。1854 年黎曼的演讲讨论了整个情形,创立了黎曼-芬斯勒几何。百余年来黎曼几何在物理学有重要的应用,而整体黎曼几何的发展更是近代数学的核心部分。

黎曼的几何基础包含芬斯勒几何。我们最近几年的工作,把黎曼几何的发展,局部的和整体的,完全推广到芬斯勒几何。这将是微分几何的一块新园地,预料前景无限。1995 年夏,在美国的西雅图有一个芬斯勒几何的国际会议,其报告已于 1996 年由美国数学会出版。

芬斯勒几何,在著名的 1900 年的希尔伯特演讲中,是第 23 个问题。

结论:关于中国的数学

中国人的数学能力是不容怀疑的。中国将成数学大国,我觉得也是不争的事实,可能时间会有迟早而已。我希望注意下列几点:

(1) 要发展中国自己的数学。数学千头万绪,无法尽包。集中在几个方向是自然的选择。当年芬兰的复变函数论和波兰的分析都是成功的例子。但我个人喜欢低维拓扑,希望有人注意。

(2) 19 世纪的挪威,是一个僻远的国家,但她产生了两个大数学家:阿贝尔和李。中国的数学发展,必须普遍化;穷乡僻壤,何地无才。几年前我曾提议强化十个重点大学的数学所。这个计划当为目前发展数学最重要的措施,但个数可能要添加三五个。

中国的中小学数学教育,不低于欧美。我们到了攀登的时候了。

参考文献

[1] Wiles A. *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*. Annals of Mathematics, 1995, **141**:443

[2] Taylor R, Wiles A. *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*. Annals of Mathematics, 1995, **141**:553

[3] Hsiang W Y. *A rejoinder to Haler's article*, Mathematical Intelligence, 1995, **17**:35

47. 记几位中国的女数学家

本文与康润芳合作。原载《传记文学》第 66 卷第 5 期，1995 年。

引　言

中国对于近代数学的研究开始较晚，第一个在国外获得博士学位的是胡明复先生，他于 1916 年获得哈佛大学博士。自此，70 年来，中国数学家人才辈出，成就辉煌。本文拟报告若干位女数学家。她们都生于 1950 年前后，原籍大陆，在台湾生长，受小、中、大学教育，赴美受高深的训练，现在都是知名的数学家。台湾在这短短的三四十年内产生了多位杰出的女数学家，我认为是中国历史上的奇迹，当然也是中华民族的光荣。

究竟数学是什么？数学家做些什么？大致说来，数学把自然现象抽象化，用逻辑推理获得结论。因为对象和方法都“简单”，便成为一门有力和有用的学问。例如：以一条狗、两条狗到 1、2、3，从 1、2、3 到 x、y、z，便看出代数的力量。又如方程式 $x^2+1=0$ 当然没有解。因为任意正或负的数的平方必然是正数。但是如果引进理想数，使它有解，便得复数。复数系统在科学上的作用可大了。没有复数，便没有电磁学，便没有量子力学，便没有近代文明！数学的伟大是不可想像的。

再举欧几里得的《几何原本》为例。这本伟大的书把空间的性质建在少数公理上，从公理用逻辑推论获得空间的性质。如三角形里三角的和等于 180°的定理，或直角三角形勾股弦定理（勾^2 + 股^2 = 弦^2）都可有漂亮的几何证明。欧氏空间的推广，可以用到爱因斯坦的相对论和杨振宁-米尔斯的规范场论，真是人类智慧的结晶。

我们欢迎以下各位来到这块充满奇迹的数学园地。介绍这几位女数学家的资料是她们自己供给，由康润芳负责编写及结论。

张圣容

1948 年生于陕西长安，父张范，湖南长沙人；母陈里育，浙江宁波人。1950 年举家由长安迁至香港，1953 年由香港迁台湾，在台湾长大。父亲从事建筑业，母亲任会计。小时台湾环境十分艰难，但父母以她和弟弟学业为重，一直顺利地求学。

她从小喜欢读书，尤好文学，但始终觉得数学最简单明了。1960 年入台北二女

中,印象中最深刻的是在炎炎夏日中阅读中外名著小说,及反复斟酌解析三角题目,其乐无穷。到高三要决定大学方向时,正值杨振宁先生来台讲学,他说"现在数学正呈放射性发展,为年轻人研究科学最好方向",影响了她选择数学为大学第一志愿。1966 年保送入台湾大学数学系。4 年中受到谨严的教诲,尤其和同班几位女同学互相切磋,彼此同游共进退,生活热闹愉快(刘小咏、胡守仁、李文卿、金芳蓉、吴徵眉、梁美,皆为同班同学)。

1970 年到美国加州大学伯克利分校入数学研究所。伯克利名数学家云集,大开数学眼界。1973 年和同学杨建平结婚,1974 年得博士学位。其后,曾在纽约大学水牛城分校、马里兰大学及加大伯克利、洛杉矶分校任教。并在美国、中国大陆、台湾,及欧洲各数学研究所访问。1981 年到加大洛杉矶分校(UCLA)长期任教至今。这些年来,1979 年得斯隆奖,1986 年曾应邀在 4 年一度的国际数学学会上专业报告。1989 年到 1991 年曾任美国数学学会副会长。1995 年得美国数学学会的萨特奖(女数学家杰出成就奖)。

在加大时,她的指导教授为多纳德·沙拉松博士。论文的研究方面为调和分析。主题为引入当时实变分析上重大突破有关有界平均动率函数的性质,去研究复变分析上的一些问题。毕业后多年,仍持续此一研究方向。曾和马歇尔合解了复变上关于有界解析函数的道格拉斯问题。

1981 年后,部分受到杨建平(几何学家)的影响,她的研究方向逐渐转到实变分析在偏微分方程及几何上的应用。由于偏微分方程研究几何渊源根深,近年来更在陈省身、丘成桐等人提倡下,发扬成主流。她的研究方向是其中一小支。主要为:

(1) 用索伯列夫嵌入定理中极值函数性质去研究几何上的山路问题及相关的"何种函数可成为流形上的曲率山路函数"的问题。

(2) 有名的"闻鼓猜形"问题(Can You Hear the Shape of A Drum?)。即是由鼓声可以猜出此鼓的大小、形状。此一问题可由各种角度研究。目前在研究紧流形上同一鼓声流形的紧致性。

除科研、教学外,她育有一男一女。生活上常觉得学海渊博,育儿任重,时间感不够用。但数学发展日新月异,身处学术界,常遇各方面睿智之士。她在不断的学习成长中,觉得人生很丰富。回顾大学数学系前后女同学,有许多都在工作岗位上卓然有成。长江后浪逐前浪,希望见到更多的中国女数学家进到这研究的领域来。

李文卿

1948 年 12 月 25 日生于台湾嘉义县。父母均为武汉人。父李宗万在 1946 年奉派来台工作,任职制盐总厂工程师,母亲刘咏华是家庭主妇,于 1947 年来台。他们是台湾光复后较早由大陆来台定居的。她是个迟来的独生女儿,父母对她爱护备

至;但管教严谨,限制也多。他们十分注重女儿的教育,总是设法给她最好的读书环境。小时家住台南郊区,父母唯恐当地小学不好,有碍升学,于是三番两次迁移户口,换学校,最后终于进了台南城里最好的永福国小。那时她每天早晨6时出门搭车上学,晚上8时回家。住处简陋,为了让她能安心做功课,不受蚊虫干扰,她父亲别出心裁,在家里客厅的一角,用铁纱及木条围出一块笼状的"书房",供她念书。亲友们戏称此笼为"状元笼"。在盐厂宿舍里传为佳话。

她初中进台南女中,此后直升高中,保送台大数学系。求学过程十分顺利。当初选择数学,颇令家长及老师们感到失望。一来南台湾的风气崇尚学医,二来台大数学系既属冷门科学,又是出名的难念,声誉不是很好。而她却决定进数学系,一方面是为了兴趣,另一方面是自信不足。原来,当时物理系乃系理学院最热门的科系,各方高手聚集之所。她自忖难以与人竞争,不如去个冷门系,慢慢修行。孰料1966那年,台大数学系收了很多以第一志愿进来的高材生。这是该系罕见的现象,也成为系里资深教授们一直津津乐道之事。她能和这些人同窗四载,也是深感幸运的。1970年台大毕业后,留在母校念了一年研究生,1971年获加州大学伯克利分校奖学金赴美深造。1974年得数学博士学位。

加大毕业后,她在哈佛大学担任了三年半助理教授,然后去普林斯顿高级研究所做研究员半年。1978年秋在伊利诺斯大学芝加哥校区任助理教授。翌年转赴宾州州立大学任副教授。1984年升正教授。这些年里,她曾多次在中、美、英、德、法、新加坡等国访问、开会、演讲,及做学术研究。1981年获斯隆奖,在1990~1993年期间曾任美国数学学会人权委员会及会员委员会委员。

她的研究工作是在数论及离散数学方面。毕业论文在加大安德鲁·欧格指导下,介绍了经典模型式同余子群的新型式及其判别法。到哈佛时,正值自守函数及群表示理论走红之际,受了塔特教授(她的祖师爷)的影响,开始学习朗兰兹猜想中二阶局部群表示的对应,作出一个直接的证明。寒暑假里她常去贝尔实验室当顾问,是以有机会接触一些较实际的问题。和那里的数学家合作研究通讯网络及编码上的一些问题。近来她的工作注重于数论在实际问题上的应用,譬如利用特征和估计的结果来构做有好性质的通讯网络。

回溯以往,她觉得念台南女中的6年是她成长期的黄金时代。当时的校长景生然先生极注重生活教育,让学生们体验了丰富的生活经验,同学们之间培养了极深厚的友谊。直到今日,她最好的朋友仍是中学时代的同窗。到台北上大学,第一次离家,没有父母在身边管教,精神上感到十分舒畅,也培养了她的独立性。同时在初进台大时,即受教于系里名师们,如施拱星教授的数学导论、王九逵教授的微积分,使她对数学眼界大开。台大数学系的训练相当严谨。其一贯作风是用书艰深,出题困难。由同学间的相互切磋来弥补师资之不足。学的时候多半囫囵吞枣,若干年后才逐渐领悟。偶尔系里也请由美国回来的客座教授像项武义、苏竞存、郭

子南等开课。让学子如沐春风。当时虽然国科会办了暑期学人归国讲学课,但对象是研究生,大学部的学生受益不彰。

在伯克利念书这三年,她受到陈省身教授的照顾与指导,受益良多。记得到伯克利第二年的暑假,指导教授不在,论文又碰壁,在徬徨愁苦之余,遂想也去修个电脑硕士,或能裨益将来谋职之用。当她将这主意告诉陈先生后,陈先生鼓励她说:“你要是有个数学博士就不需要电脑硕士了,若想学电脑方面的知识,只要教那方面的课程就行了,不必现在去学,发明电脑的冯·诺伊曼,本人就是极杰出的数学家。你还是专心做论文吧!”听了这番话后,她的心安定下来,两个月内博士论文就完成了。

70 年代初期,伯克利数学系盛况空前。系里有四百名研究生,新来的学生每二人共用一张书桌。华裔学生亦为数不少。逢年过节时,中国师生相聚陈家,享受陈师母准备的美味佳肴,尽情欢笑玩乐,久久不散。如今忆起,犹感温馨。

金芳蓉

1949 年生于台湾,祖籍安徽全椒,父为工程师,母为中学教师。高雄女中毕业保送台大。1970 年台大毕业赴美,进宾夕法尼亚大学,甚得她指导教授维尔夫欣赏,介绍与贝尔实验室合作,甚为胜任,1974 年得博士学位,进贝尔实验室工作。

她的数学之旅与别人有许多不同,一则主修组合学,是比较新的一门,系传统数学和电脑理论的桥梁。入门虽易,欲深入则必须对数学各门有足够的了解,能灵活应用于各种以“0、1”方式表达的信息时代的数学问题。再则贝尔实验室的数学中心,没有数学各门的界限。电脑、通讯都有和数学互通之处。因而接触面广,有些在数学方面的研究与电脑、通讯、化学、物理都有关系。

刚进贝尔公司工作时,同事中诸多高手,不免有点畏惧。但数学脉理分明,层次清晰。必其研究所里外,好题目很多,研究也容易顺利。她在贝尔实验室九年后,逢 AT & T 和地方电话公司分家。转入贝尔通讯研究所新建立的数学研究所主管数学部门,后升为主管数学、资讯和运筹研究。七年后觉得离做研究愈来愈远,适时,得到所谓之“贝尔院士”,可离职两年(1990 ~ 1993)到哈佛大学数学系任访问教授。1994 年回母校宾州大学为正教授以及荣誉教授。她在数学学会里相当活跃,担任许多委员会的负责人或主编等,此处不多介绍。

她当初选读数学原因很多,主要的是因她父亲说:“数学是科学的根本,学了数学后容易学别科。但学了别门却难转数学。”此言对她有多次印证。

当年台大同班和前后期的多位女同学同聚一堂,共同讨论切磋。台大毕业后又大都赴美继续研习,得博士学位时,正是工作机会很困难的时期,各人经历多不相同。幸得在台大数学系打下良好基础,体验所学须活用的重要,十几年来在数学领域里或生活上受益良多,因此她有些精辟的见解供给愿学数学的青年学子们。

“治学”：数学各门各式，既深也繁，表面上好似不同，其根本道理相互通运。如今作论文，通常讲究专精而有独到之见。如果此专精之见能与多处相关的数学领域有类似的效力，则影响力大，如果专精之区，走上死角，很少人关心，岂不可惜？故专攻精研之时，要多留心和其他数学的关联，事实上，数学分门虽多，但其根源都纠缠一起，学得精和学得深且宽(Depth and Breadth)互辅互成。

数学一门难免崇拜天才，青年学子时有气馁，但从另一个角度来看，数学循序而进，条理分明，各人思路不尽相同，第一篇博士论文，可说是独立研究的起步。作研究如何选题，如何适时而止，虽是靠自己摸索，只要有一个立足点，可往附近推展，并非无迹可循，天分固然重要，常见许多聪明者不见得成功。勤能补拙，大多数成功的数学家不见得特别聪明，持之以恒才是最重要的。

“广交”：既然数学深广，文献极多。一人力量有限，多结交数学朋友极为重要。通常数学文章在杂志上发表时，可能两年已经过去了。目前找题目的状况和大势，多凭口传。朋友可以互相学习、帮助，可更增兴趣，许多诀窍都是从一起合作的朋友处学来的，此外或写文章，或升迁，或换工作都需经过数学界评论或推荐。如何增加交友和合作的机会呢？要在辞汇语言不尽相同处，找出彼此相同的兴趣及共同语言。再者，不要计较得失或成绩的划分。其实，慷慨不藏私，从长远看来得多失少。数学知识经交换而增长，并未虞缺。多给别人一分，自己收获更多。与别人合作常对自己独做时带来灵感。

旅行、演讲、参加数学会议，短期或长期的访问都可增加见闻，放宽研究的范围及交游。经由数学爱好，建立起持久的友谊，只要有数学的地方，就有朋友，真是“四海若比邻”矣！

“理论及实用”：亨利·多拉曾说：“数学没有理论与应用的分野，只有好数学和坏数学的分别。”如果一个定理可以把握住基本原则，化繁复为简单，可以用在许多不同的情形下，则必是好数学。从另一方向来说，很多几何理论与物理极相近，不断的由物理的真实世界指出正确的方向。她在贝尔研究所时，很多应用的题目在许多情况下出现，把技术引到正确的方向。近来，所有科技受电脑强烈的影响，电脑上许多大而繁的问题，更需数学提纲挈领作确实的分析，带来许多基本电脑的问题，不仅对组合学，也对整个数学有极大的冲击。

“两体问题”：所谓“两体问题”(Two Body Problem)是指夫妻同是数学家，因而有的种种问题，女数学家尤其有这方面的困扰，大致说来，两体问题有长处，也有短处。两人有相同的兴趣，可以互相讨论，彼此扶助，明白数学研究的心路历程和职业上的需要。给予精神支持。更有机会多结交数学朋友，增加对数学的了解。比如说如果不是她先生全力赞许，她大概不会下决心在三年前离职，去访问哈佛大学。离家二百五十里更不方便。但对研究方面，裨益至巨。得以跨越好些区域和数学大家们如丘成桐、芒福德、斯腾伯格、科斯坦特及迪亚考尼斯等分别有突破性

的合作。

两体问题有些困扰的地方，比如找工作受地点限制等，大体说来，可以设法处理，而两人因彼此扶持，增加效力和影响良多，精神愉快，负面的影响自然逐渐消失，如果两人加起来却只有一个人之力，在大团体里形成小圈子，则正面的影响减少了。

吴徵眉

1948 年生于杭州，四个月大时随父母到台湾定居。父亲吴泽永担任铁路局工程师，母亲舒嘉宝负责家事、教育。受父亲影响，对数理一直比对其他科目有兴趣。受母亲对生活宁静淡泊的影响，考大学时没有追求时尚，而选择了并不热门的数学系。

求学过程中一直有很好的数学老师。铁路小学的赵尚仁老师，北一女的杨宽满、周宗桦老师，台大的施拱星教授。他们不只作知识上的传导，也很会启发学生。尤其是施教授的数学导论，真正引导她进入数学的殿堂，一窥其中的奥妙。

1970 年来到伊利诺斯大学，曾在几何与分析之间犹疑了一阵。最后决定和毛里斯·海姆斯学复变函数论。博士后曾去印第安那大学、普度大学任教。1979 年重回伊大任教至今。1985 年升正教授，其间曾在法国、纽西兰任访问教授。此外在美、英、中、日、芬等国多次作学术性的专题演讲。曾任美国数学学会议程委员。现在是伊利诺斯大学数学期刊编辑之一。

吴徵眉的研究领域是复变函数论和势理论。用势学的方法解决了许多调和函数和偏微分方程的解的边界值的问题，和许多几何函数论中调和量度计算上的问题。

1981 年，她和英国数学家瓦尔特·海曼合证了平面区域经过某种保角函数的作用后，直线的长度不会变得任意大。10 多年来一直有数学家继续将这定理推广到高度空间中的曲面和类似保角函数上。1987 年，她和约翰·路易斯证明了一个 1952 年英国大数学家 J. E. 李特尔伍德关于“全函数的值分析和多项式的球面积分”的推测。证明中他们用到 J. 布甘在调合量度上的定理。

她的先生罗伯特·考夫曼也是伊大教授，在或然率和富氏分析、调和分析方面很有心得。他们一人用概率观点，一人用几何观点，合作发现一连串热势学和普通势学上很不类同的性质。

吴徵眉觉得从事数学研究，才智并不重要。重要的是无悔的兴趣和对工作的执著，并有能耐得住没有成果时的失望。身为女性，更需要先生的支持、了解和包容自己在日常琐事上的疏忽。她自觉有幸，先生对她的研究结果比对她烧的菜更能欣赏。

她有一个女儿，在伊大附中念书。

工作之余，她喜爱园艺。一家人都爱侦探小说、影片和旅行。

滕楚莲

1949年2月28日生于台湾花莲。父亲滕巽三、母亲郭瑞梅均为湖南常宁人。1948年由湖南迁到台湾，父亲在荣民工程处任职。母亲主持家务。有子女4人，楚莲是长女。

她小时候在家附近的中正国小上学，觉得数学容易而喜欢数学。1961年入台北市立女子中学，1964年入台北一女中，1967年保送台湾大学数学系。1971年入台大数学研究所。1972年得奖学金入美国布兰岱斯大学数学研究所。四年后得博士学位，指导教授是理查德·帕莱斯。1976年任加州大学伯克利分校讲师两年。研究方面受陈省身影响，转为微分几何里的分子流形。1978年起任普林斯顿大学助理教授四年，1982年任东北大学副教授，1986年升正教授。并曾任普林斯顿高级研究所、德国马克斯·普朗克研究所研究员。多次在美、中、德、英、法各国多所大学做短期访问及演讲，1980年得斯隆奖，1986年当选为美国数学会会员代表，任期三年。1986～1989年任美国国科会 Advisory Board，1995～1997年任女数学家学会会长。

她的研究工作可分为三个方向：第一方向是她的论文，将在坐标变换下不变的向量丛及微分、算子分类。许多苏联及欧洲数学家仍继续对此问题做更深的探讨。

第二方向是子流形与发展方程。三度空间里曲率为负一的曲面给正弦-戈登(SG)方程一解，此类曲面的贝克隆德转换也给SG方程的解一个变换。陈省身和她将此理论推广到仿射极小曲面上，她和K.特南布莱特又将此推广到高维子流形上。最近她并发现这些子流形上的结果和调合映射及卡茨-穆迪数有密切的关系。

第三方向是对称空间里的等参子流形。等参子流形的每个焦距均为常数，有很精致的几何及拓扑性质。嘉当首先研究常曲率空间里的等参超曲面。他将其推广到子流形。在1988年，她与帕莱斯将这些结果写成书（书名：*Critical Point Theory and Submanifold Geometry*，由Springer-Verlag出版）。

楚莲在农村长大，家境清寒，但家庭温暖，父母管教严，又一直有良师教导，求学过程顺利。小学五年级时虽因家贫无法参加课外补习，有时学杂费也无法定时缴。但导师周贤耕先生仍然鼓励与夸奖。初高中时数学老师刘贵美及蔡长庚先生都把数学教得很有趣。大一时赖东升教授开了一门有趣的数学导论。施拱星及缪龙骥教授的课，习题多且难。皆为学生们打下良好的基础。大三时郭子南教授（芝加哥大学博士）自美回台大当客座教授，开了一门伽罗瓦理论，郭教授教得非常好，又是楚莲在台大唯一女教授开的课，大三时她就已经决定将来要当大学教授，回台大开课，开得和郭子南一般好。

得博士后第一个工作是在伯克利加大分校任讲师。又得到陈省身先生的教导。陈先生说做数学最重要的是有恒心,不间断的一直继续做。毕业后最初六七年压力极大,但也是个好训练。以后可较自立,能够体会做研究过程中的乐趣。她父母都希望她长大后能当老师,但并不需要是大学老师。他们对她喜欢数学觉得很有趣,父亲常说他求学时最差的是数学,没想到女儿却最好。

记得大学时,每逢女学生功课好时,总会听到男学生说,这是因为女生会背,其实力不如好的男学生,但多年以后可以肯定这个论点是错的。

她到美国是第一次离家,没有亲人,不会做菜,不会开车,生活上不易适应。课业方面倒是很顺利。

1981 年她与帕莱斯结婚,1982 年定居麻州波士顿西城。除了研究及教书外,她喜欢园艺、陶艺、听古典音乐、看小说、散步及骑自行车。

萧美琪

1955 年出生于台湾台北市。父亲任职空军,1949 年随国民政府迁台,住空军总部旁正义新村,母亲主持家务。上有三兄一姊,下有一弟。眷村中玩伴众多,童年时就是天天游玩。五岁时被送去进幼稚园。去了一天就再也不肯去了,所以在七岁进空军小学以前,连自己的名字也不会写。小学前四年成绩平平。到四年级下学期,因家中修房子,调皮爬楼梯玩耍,结果楼梯倒下,跌破下巴,进医院缝了几针。在家休养两天,因而念了两天书。之后突然考了第一名,老师同学们都非常惊讶。从此以后就变成所谓“模范生”了。好像那一跌把她跌醒了。她母亲常口中念说“有意栽花花不开,无心插柳柳成荫”。

初中进入台北市女中,高中是北一女。那时虽然很喜欢数学,却从未想要念数学或做一个数学家。到高三时,数学老师为杨宽满先生。常被杨先生夸奖为他所教过的最好的学生。鼓励她应该去念数学。因此她选了台大数学系为联考第一志愿。也开始了她的数学生涯。

大学四年过得很容易。印象最深的是:黄武雄教授的初微、几何,缪龙骥教授的高微、复变,和林一鹏教授的代数。由这些课她才知道近代数学是什么。也知道持业余数学家的态度是不行的。但她仍然不太用功,大三时被选任为数学学会会长,更浪费很多时间在课外活动上。大四时申请出国念研究生,喜获得进普林斯顿大学,才决心用功念数学。

她在台大时,已经知道自己比较喜欢分析,尤其是偏微分方程。到了普大就很自然地选择 J.科恩教授作指导教授。科恩教授是多复变方面的权威,第一个用偏微分方程来解决多复变问题的人。科恩教授一向给学生很难的论文题目。他给萧美琪的那个问题到现在都还未解决。研究所四年,她觉得压力很大。

毕业后先任教普度大学,并开始找新的题目做研究。恰好那时普度的巴欧恩

迪和张清辉正在研究一组复向量场的解析正规性，于是她也从有关问题着手，后来的研究方向是关于柯西-黎曼方程的解存在性和正则性。十多年来，稍有收获。

刚开始教书的几年，换了四所大学，原因是想和她的先生张学嘉在同一学校。他们是在普大念研究所时认识的，张是学化工的，住在同一宿舍。他虽然也出生于台湾，8 岁随父母迁到新加坡再转马来西亚。16 岁时只身来美。他们于 1983 年结婚，因为要找两个人同在一地方教书的工作十分不易，所以刚开始几年辗转奔波，直到 1987 年一起到圣母大学才安定下来。1992 年升为正教授。萧美琪觉得当年若没有杨宽满老师的鼓励，不会去念数学，后来又能跻身于一流学府，跟从名师。数学的路途虽然折腾很多，但每解决一个问题时，那种开辟新境的乐趣，也难以形容。更幸得以结识三五同好，互相切磋学问，一同探讨数学的奥妙。又得结识数位当代数学大家，自己常以“虽不能至，然心向往之”自勉。

后记

一个人的成长中，幼少年的环境影响最大。等到进大学，再毕业成青年时，基本的才华已形成。由于这几位女数学家们，都是在台湾生长，受到良好的爱护。在小、中、大学的教育中受到严谨的基本训练。可见台湾的教育发展相当平等，各地相等的女中和男中的成绩不相上下。女生们可以没有限制地自由选择，发展自己才能的方向。很多学科如数学、物理、工程，也不全是男生冠盖的天下。一般在亚洲各国中如日本、韩国、新加坡等地的女生，犹被困在传统的观念中，念世俗认为女子该念的科系。

台北一女中固然是个名校，可是看看这几位，有半数从其他女中来的。这表示到 20 世纪 60 年代，台湾各地师资逐趋平衡。父母们不必像以往将孩子们送去台北进名校作“小留学生”。这不能不归功于台湾师范大学师资的培训。

时代不断地前进，她们的事业心也较早年的女生强烈得多。60 年代郭子南那班，也是女生权倾一时，也大都赴美进修，在名校获博士学位。惜婚后都退居二线，研究停顿，不能持恒，全力以赴。要等子女长大后再投入工作，事业也都不错。谚言：“每一个成功的男人，后面都有一个女人。”反之亦然。这几位大多和数学家们结婚，或同事，或同学。得到不少鼓励及切磋。在研究工作上更上一层楼。

这几位女数学家中，有三位曾在加州伯克利分校学习或工作过。无论在研究方面、进取途径及做学问之道都深受数学大师陈省身的影响。陈先生不但是数学界的权威，他对后辈的提挈也是可钦佩的。这篇几可说是介绍陈先生门下女弟子传，作者有幸得以窥知她们成就的过程。

她们又多为长女或独生女。父母一代年轻时来台湾为异乡客。小家庭单纯温暖，对自己的结晶自然特别关怀。她们可说是二次世界大战后的新生儿。从 1945 年到 1963 年也是台湾生活最艰苦时期。1963 年美援取消后，反而自力更生，欣欣

向荣，造成今日台湾的经济奇迹。在那段时间，无论是台湾籍或迁来者都经过困苦的日子。但得见曙光，鼓舞了她(他)父母对子女们的希望及栽培。看孩子们开花结果，就像当年赴美的留学生们看自己的第二代一样。如今台湾的政界、文化界，美国的科学界各行都有优越华裔的第二代子女，令人羡煞。但我曾听美国人酸葡萄地说："你们第一代移民工作努力，第二代成绩辉煌，到第三、第四代时，就和我们一样了。"近年来台湾学子们挟巨资而来，能持恒苦读者寥寥。就像在美华裔的第三代(他们是台湾发展中的第三代)在父荫下成长，饱受呵护，努力苦读的精神差了，做学问的人少了。颇为之扼腕。希望今日台湾父母们不要让自己的成就阻掩了儿女们的视线。让他们能继往开来地在学术或事业各界发挥潜力，达到"青出于蓝而胜于蓝"的境界，就像这些父母们当年一样。

大陆上的读书人正渐从"臭老九"的噩梦中解脱出来。1949 年后出生的第二代也幸运地望见曙光，能有一展雄才的前景。但一般家庭仍以男孩进学第一，并不是凭能力。多少有才华的女孩为家境而失学，至为可惜。愿大陆各地多几个像周贤耕先生一样的老师，鼓励与夸奖有才华、家境困难的子弟，不论男女，让他们能随班正常补习，得"小灶"的裨益。

48. 从"数学诺贝尔奖"谈起

原载《数学传播》第 23 卷第 2 期,1999 年。

读《传播》第 21 卷第 4 期黄文璋先生的大文,油然有感。简述于下,供大家一笑。

1. 为什么数学没有诺贝尔奖

理由是很简单的:诺奖奖励对人类幸福有贡献的人。所以它包括和平、医学和文学。设奖者高瞻远瞩,知道物理、化学将有大发展,是一个不得了的先见。初奖在 1901 年。第一个得物理奖的是伦琴,因为他的 X 光的发现。

数学不可能有这样的贡献。数学的作用是间接的,但是没有复数,就没有电磁学;没有黎曼几何,就没有广义相对论;没有纤维丛的几何,就没有规范场论……物质现象的深刻研究,与高深数学有密切的联系,实在是学问上一个神秘的现象。

科学需要实验。但实验不能绝对精确。如有数学理论,则全靠推论,就完全正确了。这是科学不能离开数学的原因。许多科学的基本观念,往往需要数学观念来表示。所以数学家有饭吃了,但不能得诺贝尔奖,是自然的。

2. 没有诺贝尔奖是幸事

数学是一门伟大的学问。它的发展能同其他科学联系,是人类思想的奇迹。

数学的一个特点,是有许多简单而困难的问题。这些问题使人废寝忘食,多日或经年不决。但一旦发现了光明,其快乐是不可形容的。试举三例:

例一,费马的"最后定理",论方程式

$$x^n + y^n = z^n,$$

其中 $n > 0$, x, y, z 都是整数。熟知当 $n = 2$ 时,此方程有无数个解。但是费马说,当 $n \geqslant 3$,此方程无解,除非 $xyz = 0$。这样简单的问题,几百年未决。最近普林斯顿的安德鲁·怀尔斯教授证明了,可谓数学史上的一大事。

例二,球装问题(开普勒问题)n 维空间内有同一直径的球,如何能装得最紧?一个更简单的问题:有这样一球,最多能放多少球同它相切?在 $n = 2$ 时球是圆面,这数显然是 6(请读者作图自明)。但在三维空间,能证明可放 12 个球。还剩不

少空间,可是第 13 个球放不进。当年对此问题,牛顿同格雷果里有过争论。事实上第 13 个球是放不进的。最近的简单证明,请看项武义的工作。

例三, 方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

其中 a_i 是实数或复数,必有复数解。

以上都是重要的问题。例三叫做代数的基本定理。

数学上这样简单而困人的问题很多。生活其中,乐趣无穷。这是一片安静的天地;没有大奖,也是一个平等的世界。整个说来,诺贝尔奖不来,我觉得是数学的幸事。

49.《数学中的沃尔夫奖》序言

2000年，陈省身和F.希策布鲁赫合作编写了《数学中的沃尔夫奖》一书，由新加坡世界科学出版社出版。这是作者为该书所写的序言。原文为英文，王善平译。

数学中没有诺贝尔奖，这也许是件好事。诺贝尔奖太引人注目，会使数学家无法专注于自己的研究。

其他有奖发给数学家。一是菲尔兹奖章(专门发给数学家)。它由国际数学家大会颁发，奖励当年不超过40岁的数学家。用于表彰杰出的工作并鼓励进一步取得成就。菲尔兹奖章的名声也许最大，被称为是数学中的诺贝尔奖。世界科学出版社已经出版了菲尔兹奖章获得者的演讲集。

再是沃尔夫奖。沃尔夫基金会如此描述该奖："沃尔夫基金会1976年开始活动，首期10万美元的基金全部由沃尔夫家族捐赠。基金会的主要创立者是里卡多·苏比拉纳·罗博·沃尔夫和他的夫人弗朗西莎。……1978年以来，已有5至6个年奖授给那些为人类的利益和人民的友好相处作出贡献的杰出科学家和艺术家，不论他们的国籍、种族、肤色、宗教、性别或政见。科学中奖励的领域是：农业、化学、数学、医学、物理学；艺术的奖励则每年在音乐、绘画、雕塑和建筑领域中轮流。……正式的颁奖在以色列议会大厦举行，并由以色列国总统在专门的仪式上向获奖者授奖……"

菲尔兹奖章授予年青人，因为确实许多数学家是在他们一生的早期作出最好的工作的。沃尔夫奖通常表彰一生的成就。但它也表彰年青人的工作。

首届数学的沃尔夫奖获得者是依兹拉依尔·莫伊塞维奇·盖尔范德和卡尔·路德维希·西格尔(1978年)。西格尔生于1896年，盖尔范德生于1913年。盖尔范德仍在罗格斯大学工作。一些获奖者生于1910年以前。因此获奖者的成就覆盖了20世纪的大部分。

这套两卷集的书所收的文献，以一种前所未有的方式来刻画沃尔夫奖获得者：论著目录与简历，自传，早期论文或特别重要的论文、演讲或发言，例如在国际数学家大会上的发言，以及他人所做的关于获奖者工作的报告。由于沃尔夫奖获得者的工作范围广泛，现代数学的一大部分将在这套书中得到生动展现。

数学奖的获得者通常都很谦虚。他们知道评奖委员会必须在一大批优秀的候选人中作出选择,并知道获奖不仅需要有成绩而且需要有更多的运气。换一批完全不同的数学家也可以用他们的工作来描绘沃尔夫奖所覆盖那段时期的数学发展。

这套书也是向那些使沃尔夫基金成为可能的捐赠者、以及那些曾为和正在为基金的成功而工作的人们表示感谢的象征。编者还要感谢为那些已故的沃尔夫奖获得者准备材料的数学家们。没有他们慷慨相助,这两本书会很不完整。

编者对世界科学出版公司提供的大量合作表示感谢。特别是世界科学出版公司驻美国办事处的 Sen Hu 博士的工作和有价值的指导使他们受益匪浅,在此对他表示衷心的感谢。

陈省身
F.希莱布鲁赫

50. 2002年国际数学家大会

2002年将在中国北京举行国际数学家大会,陈省身为此撰文介绍中国数学并邀请国外数学家参加。原文为英文,刊于《Notices of AMS》第48卷8期,2001年;王善平译,张奠宙校。

国际数学家大会将于2002年8月在中国北京举行。我们借此机会可以了解已有3 000年历史的中国数学。在中国古代,数学长期以来一直是普通教育的一部分,通常强调应用的一面。那时有一些逻辑推理,但不存在公理基础。不过,在中国的漫长历史中,数学曾有许多重要的发展。我想在此提一些主要的事实。

1. 古代最重要的数学著作是《九章算术》。它由一些问题及其解答组成,其出现肯定早于基督的时代。公元263年,中国大数学家刘徽为该书作了注解,其中包含有许多他自己的思想。关于刘徽本人生平并无准确资料。

2. 刘徽知道,圆的周长与其直径之比 π 是一个常数。或许他的前人也已经知道这一点。计算 π 的值自然成为一个基本问题。刘徽得到 $\pi = 3.14 \approx 22/7$。进一步的计算结果由祖冲之(420~500)得到,他的结果是

$$3.141\,592\,6 < \pi < 3.141\,592\,7$$

以及

$$\pi \approx \frac{355}{113}。$$

3. 中国剩余定理被广泛研究。有许多关于它的计算的著作。

4. 在13~14世纪时期,代数在中国得到发展。发明了"分立系数法"①。尽管这个方法很繁琐,但它在方程论及代数其他领域中的成就是令人瞩目的。

现代数学由那些在西方学习的中国留学生带给中国。第一个得到数学博士学位的是胡明复,他在1917年获哈佛大学的博士学位。我的老师姜立夫1919年获哈佛大学博士学位,他的导师是朱里安·库里奇。我的另一位老师是孙镛,他在E.P.莱恩的指导下获得芝加哥大学的博士学位。有趣的是,我于1949年在芝加哥大学

---

① 原文为"detached coefficients"。当指我国在宋元时代发明的解多元高次方程的"天元术"和"四元术"。——译注

成了莱恩的接班人。

一般来说,中国数学的水平可以与其他国家相提并论。民众对数学也很感兴趣。近年来中国在国际数学奥林匹克竞赛中成绩优异。中国人民非常渴望与外面的世界接触。国际数学家大会在中国召开,定会受到友好的招待。

如果您打算参加大会,我建议您借此机会游览一下中国,这不失为聪明之举。那里的人民很友好,并且费用低廉。如果您担心语言不通,那不妨考虑找一个中国人做伴。

我现在已在我的母校天津南开大学舒适地安顿下来。我于1930年在南开大学获学士学位,1934年在北京的清华大学获硕士学位。后者是用泰迪·罗斯福时期退回的庚子赔款建立的。它现在是中国一流的大学,每年通过全国考试接纳最优秀的学生。北京与天津相距只有两三百千米,京津地区有着很好的数学氛围。

我代表中国的数学界,欢迎世界各地的同行前来参加北京的国际数学家大会。

SXPJ

四、数学评介

这一部分是作者的“高级数学科普作品”。数学家在如何思考?原始的几何思辨是如何进行的?作者历史地、整体地作了深刻的阐述。后学者可以从中获得研究数学的成功规律。高屋建瓴的评论,即使对于数学专家来说,仍然具有新鲜感。

51. 闭黎曼流形高斯-博内公式的一个简单的内蕴证明

陈省身发表了大量的数学论文，但在这本文集中只收录这一篇（全部学术专著和论文的目录见附录）。原因是，陈省身把这篇论文作为他的代表作收入了《数学中的沃尔夫奖》一书。原文发表于美国《Annals of Mathematics》第45卷第9期，1944年。现由王善平译出，以供读者研究。

引　言

C.B.艾伦多弗[1]与W.芬切尔[2]独立地把经典的高斯-博内公式推广到一个可嵌于欧几里得空间的闭可定向黎曼流形。最近，艾伦多弗与韦伊[3]又把该公式推广到闭黎曼多面体，并特别证明了它对于一般闭黎曼流形的有效性。在他们的证明中仍然使用了把黎曼胞腔嵌入欧几里得空间的方法。本文的目的是，利用微分流形的向量场理论，给出该公式的一个直接的内蕴的证明。

本证明的基本思想十分简单，因此概要的说明会有帮助。令 R^n 是偶数 n 维的闭可定向黎曼流形。按照将详叙于后的方法，我们在 R^n 中定义一个内蕴的 n 阶外微分形式 Ω，它当然等于 R^n 的不变标量乘以体积元素。高斯-博内公式断言，这一微分形式在 R^n 上的积分等于 R^n 的欧拉-庞加莱示性数 χ。为证明这一点，我们从流形 R^n 转到由 R^n 的单位向量构成的 $2n-1$ 维流形 M^{2n-1}[4]。在 M^{2n-1} 中我们证明 Ω 等于一 $n-1$ 阶微分形式 Π 的外导数。通过定义 R^n 上一个带有孤立奇点的连续的单位向量场，我们得到它在 M^{2n-1} 中的像：n 维子流形 V^n，而 Ω 在 R^n 上的积分就等于 V^n 上同样的积分。利用斯托克斯定理证明，后者等于 Π 在 V^n 的边界上的积分。现在，V^n 的边界正好对应于定义在 R^n 中的向量场的奇点，一个著名的定理指出它们的指标和等于 χ。经过如此解释，就可以计算 Π 在 V^n 的边界上的积分，并很容易证明它等于 χ。

此方法当然可以用来导出同样类型的其他公式，并可以经过适当修改，推出黎曼多面体的高斯-博内公式。我们发表此证明，是因为我们方法的主要思想在这里是最为清晰的。进一步的结果会在以后的论文中给出。

§1 黎曼几何基本公式概要

令 R^n 是闭可定向的、偶数 $n = 2p$ 维、$r \geq 4$ 阶的微分流形[5]。假设在 R^n 中定义了黎曼度量，其基本张量是 g_{ij}，各分量假设是3阶可微的。既然我们与多重积分打交道，使用嘉当处理黎曼几何的方法[6]看来是方便的，该方法主要使用外微分形式的理论，而不是通常的张量分析。下面出现的微分形式都是外微分形式。

按照嘉当的方法，我们对 R^n 的每一点 P 给出一组相互垂直的单位向量 $e_1, \cdots, e_n$，它们具有方向性。这样一组数 $Pe_1 \cdots e_n$，称为标架(frame)。R^n 在 P 上的切向量空间中的向量 v 可以由 P 上的标架表出。于是

$$v = u_i e_i, \tag{1}$$

这里指标 i 从1到 n，重复的指标隐含求和。由列维-齐维塔平移所定义的切向量空间无限小位移法则，给出如下形式的方程组

$$\begin{cases} \mathrm{d}P = \omega_i e_i, \\ \mathrm{d}e_i = \omega_{ij} e_j, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

这里 ω_i, ω_{ij} 是普法夫形式。它们满足以下的“结构方程”：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_i = \omega_j \omega_{ji}, \\ \mathrm{d}\omega_{ij} = -\omega_{ik}\omega_{jk} + \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0。 \end{cases} \tag{3}$$

在(3)中，Ω_{ij} 是外二次微分形式，它给出了空间的曲率性质。

(3)中等式左边项的外导数为0，根据这一结果得到 Ω_{ij} 满足以下方程组

$$\begin{cases} \omega_j \Omega_{ji} = 0, \\ \mathrm{d}\Omega_{ij} - \omega_{jk}\Omega_{ik} + \omega_{ik}\Omega_{jk} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

叫做比安基恒等式。

为了以后的计算，要了解当标架 $e_1 \cdots e_n$ 作特征正交变换时，Ω_{ij} 如何变化。在 P 的一个使同一的坐标系保持有效的邻域里，令 $e_1 \cdots e_n$ 通过特征正交变换变成 $e_1^* \cdots e_n^*$：

$$e_i^* = a_{ij} e_j \tag{5}$$

或

$$e_i = a_{ji} e_j^*, \tag{5'}$$

这里 (a_{ij}) 是特征正交矩阵，其元素 a_{ij} 是坐标的函数。假设 Ω_{ij}^* 由标架 $Pe_1^* \cdots e_n^*$ 形成，就如同 Ω_{ij} 由 $Pe_1 \cdots e_n$ 形成一样。于是我们容易发现

$$\Omega_{ij}^{*} = a_{ik}a_{jl}\Omega_{kl}。\tag{6}$$

由(6)我们直接推出下面的结果。令 $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ 是一个符号，它根据 $i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$的偶置换还是奇置换而取 $+1$ 或 -1 值，其他情况下就为0。由于我们的空间 R^n 是偶数维 $n=2p$，所以可构造如下的和

$$\Omega = (-1)^{p-1}\frac{1}{2^{2p}\pi^{p}p!}\varepsilon_{i_1\cdots i_{2p}}\Omega_{i_1i_2}\Omega_{i_3i_4}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}},\tag{7}$$

这里每一指标都从1到 n。利用(6)我们可以看到 Ω 在标架变换(5)下是不变的，所以它是内蕴的。这一内蕴的微分形式 Ω 是 n 阶的，所以它是 $\omega_1\cdots\omega_n$ 的倍数。由于后者的乘积(为该空间的体积元素)也是内蕴的，因此我们可以写

$$\Omega = I\omega_1\cdots\omega_n,\tag{8}$$

这里系数 I 是该黎曼流形的不变标量。

根据这些结果，我们就可以把高斯-博内公式写成如下形式

$$\int_{R^n}\Omega = \chi,\tag{9}$$

其中 χ 是 R^n 的欧拉-庞加莱特征。

§2 单位向量空间与关于 Ω 的一个公式

现在我们要从黎曼流形 R^n 转到由其单位向量构成的 $2n-1$ 维流形 M^{2n-1}。它是 $r-1$ 阶的闭微分流形。我们当然可以把 R^n 的局部坐标以及(1)中向量 v 的分量 u_i 作为的 M^{2n-1}局部坐标，它们满足条件

$$u_iu_i = 1。\tag{1'}$$

如果 θ_i 是 $\mathrm{d}v$ 的关于标架 $e_1\cdots e_n$ 的分量，我们有

$$\mathrm{d}v = \theta_ie_i,\tag{10}$$

这里

$$\theta_i = \mathrm{d}u_i + u_j\omega_{ji}\tag{11}$$

及

$$u_i\theta_i = 0。\tag{12}$$

对(11)微分，我们得到

$$\mathrm{d}\theta_i = \theta_j\omega_{ji} + u_j\Omega_{ji}。\tag{13}$$

至于标架变换(5)对分量 u_i,θ_i 的影响，显然由以下方程给出

(14) $$u_i^* = a_{ij}u_j, \qquad \theta_i^* = a_{ij}\theta_j。$$

现在我们建构以下两组微分形式：

(15) $$\Phi_k = \varepsilon_{i_1\cdots i_{2p}} u_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}, \quad k = 0,1,\cdots,p-1,$$

(16) $$\Psi_k = \varepsilon_{i_1\cdots i_{2p}}\Omega_{i_1i_2}\theta_{i_3}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}, \quad k = 0,1,\cdots,p-1。$$

形式 Φ_k 是 $2p-1$ 阶，Ψ_k 是 $2p$ 阶的，同时我们注意到 Ψ_{p-1} 与 Ω 只相差一个常数因子。利用(6)与(14)我们发现 Φ_k 和 Ψ_k 都是内蕴的，从而定义在整个黎曼流形 R^n 上。

我们要证明以下的回归关系：

(17) $$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + \frac{2p-2k-1}{2(k+1)}\Psi_k, \qquad k = 0,1,\cdots,p-1,$$

这里定义 $\Psi_{-1} = 0$。利用符号 $\varepsilon_{i_1\cdots i_{2p}}$ 关于其指标的斜对称性质，我们可以得到

$$\begin{aligned} d\Phi_k = {} & \varepsilon_{(i)}du_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}} + \\ & (2p-2k-1)\varepsilon_{(i)}u_{i_1}d\theta_{i_2}\theta_{i_3}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}} - \\ & k\varepsilon_{(i)}u_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}d\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\Omega_{i_{2p-2k+3}i_{2p-2k+4}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}, \end{aligned}$$

这里 $\varepsilon_{(i)}$ 是 $\varepsilon_{i_1\cdots i_{2p}}$ 的缩写。导数 $du_i, d\theta_i, d\Omega_{ij}$ 可以用它们在(11)，(13)和(4)中的表达式代替。得到的 $d\Phi_k$ 的表达式由两类项组成：一类包含 ω_{ij}，另一类不包含。我们把不包含 ω_{ij} 的项集中起来，得到

(18) $$\Psi_{k-1} + (2p-2k-1)\varepsilon_{(i)}u_{i_1}u_j\Omega_{ji_2}\theta_{i_3}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}。$$

这一表达式显然是内蕴的。它与 $d\Phi_k$ 的差是由那些包含 ω_{ij} 的项组成的表达式。

我们要证明这个差等于0，事实上，令 P 是 R^n 上任一固定点。在 P 的某一邻域内，我们选择一组标架，使得在 P 上，

$$\omega_{ij} = 0。$$

(这一过程“等价于”在张量分析中利用测地线坐标。)于是对于这组特定的标架来说，表达式(18)与 $d\Phi_k$ 在 P 上相等。由于它们都是内蕴的，并且 P 是任意的，所以它们恒等。

为了对(18)作变换，我们引进以下缩写

(19) $$\begin{cases} P_k = \varepsilon_{(i)}u_{i_1}^2\Omega_{i_1i_2}\theta_{i_3}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}, \\ \Sigma_k = \varepsilon_{(i)}u_{i_1}u_{i_3}\Omega_{i_3i_2}\theta_{i_3}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}, \\ T_k = \varepsilon_{(i)}u_{i_3}^2\Omega_{i_1i_2}\theta_{i_3}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}, \end{cases}$$

它们都是 $2p$ 阶形式。借助于关系式(1′)与(12),可以确定这些形式与 Ψ_k 之间有简单关系。事实上我们可以有

$$P_k = \varepsilon_{(i)}(1 - u_{i_2}^2 - u_{i_3}^2 - \cdots - u_{i_{2p}}^2)\Omega_{i_1 i_2}\theta_{i_3}\cdots\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}$$
$$= \Psi_k - P_k - 2(p-k-1)T_k - 2kP_k,$$

它给出

$$\Psi_k = 2(k+1)P_k + 2(p-k-1)T_k。\tag{20}$$

再有

$$\Sigma_k = \varepsilon_{(i)}u_{i_1}\Omega_{i_3 i_2}(-u_{i_1}\theta_{i_1} - u_{i_2}\theta_{i_2} - u_{i_4}\theta_{i_4} - \cdots - u_{i_{2p}}\theta_{i_{2p}})\theta_{i_4}\cdots$$
$$\theta_{i_{2p-2k}}\Omega_{i_{2p-2k+1}i_{2p-2k+2}}\cdots\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}}$$
$$= T_k - (2k+1)\Sigma_k,$$

于是

$$T_k = 2(k+1)\Sigma_k。\tag{21}$$

$d\Phi_k$ 的表达式(18)于是成了

$$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + (2p-2k-1)\{P_k + 2(p-k-1)\Sigma_k\}, \quad k = 0,1,\cdots,p-1。$$

利用(20)与(21),我们就得到了所要的公式(17)。

从(17)式我们就可以用 $d\Phi_0, d\Phi_1, \cdots, d\Phi_k$ 把 Ψ_k 解出。很容易得到结果

$$\Psi_k = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{2^{m+1}(k+1)k\cdots(k-m+1)}{(2p-2k-1)(2p-2k+1)\cdots(2p-2k+2m-1)}d\Phi_{k-m}, \quad k = 0,1,\cdots,p-1。\tag{22}$$

特别地,我们推出 Ω 是形式 Π 的外导数:

$$\Omega = (-1)^{p-1}\frac{1}{2^{2p}\pi^p p!}\Psi_{p-1} = d\Pi,\tag{23}$$

这里

$$\Pi = \frac{1}{\pi^p}\sum_{m=0}^{p-1}(-1)^m \frac{1}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2p-2m-1)m!2^{p+m}}\Phi_m。\tag{24}$$

§3 高斯-博内公式的证明

在 R^n 是闭的可定向黎曼流形的假设下,我们根据(24)式来给出(9)式的证明。

我们在 R^n 中定义一个在 R^n 的点 0 上有唯一奇点的连续单位向量场[7]。一个著名的定理指出该场在 0 点的指标等于 R^n 的欧拉-庞加莱示性数 χ。这一向量场在 M^{2n-1}中定义了一个子流形 V^n,该子流形带有边界 χZ,这里 Z 是由所有通过 0 点的单位向量组成的 $(n-1)$ 维圆周面。Ω 在 R^n 上的积分显然等于 V^n 上同样的

积分。利用斯托克斯定理,从而得到

$$\int_{R^n}\Omega=\int_{V^n}\Omega=\chi\int_Z \Pi=\chi\frac{1}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2p-1)2^p\pi^p}\int_Z\Phi_0。\tag{25}$$

由 Φ_0 的定义,我们有

$$\Phi_0=(2p-1)!\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\theta_1\cdots\theta_{i-1}u_i\theta_{i+1}\cdots\theta_{2p}。\tag{26}$$

最后的求和显然就是 $(2p-1)$ 维单位球面的体积元素。于是

$$\int_Z\Phi_0=(2p-1)!\frac{2\pi^p}{(p-1)!}。$$

把它代入(25),我们就得到公式(9)。

参考文献

[1] Allendoerfer C B. *The Euler number of a Riemann manifold*. Amer. J. Math.,1940,**62**: 243 ~ 248
[2] Fenchel W. *On total curvatures of Riemannian manifolds I*. Jour. London Math. Soc., 1940, **15**: 15 ~ 22
[3] Allendoerfer C B and Weil A. *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*. Trans. Amer. Math. Soc., 1943,**53**: 101 ~ 129
[4] 有关它的定义和拓扑,例如可参看 Stiefel E. *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen mannigfaltigkeiten*. Comm. Math. Helv., 1936,**8**: 3 ~ 51
[5] Whitney H. *Differentiable manifolds*. Annals of Math., 1936,**37**: 645 ~ 680
[6] Cartan E. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris, 1928
[7] Alexandroff & Hopf. *Topologie I*. 550

52. 中国算学之过去与现在

原载《科学》第 25 卷第 5、6 期，上海，1941 年。

近十数年来中国算学的研究有了若干可喜的进步。为检讨过去，策励将来起见，笔者愿把中国算学家几千年来所做的工作加以历史的叙述，最后则略叙近年国人进行研究工作的大概情形，俾大家了然我们这个时代将在中国算学史上所占的地位。

根据几件重要的事实，中国算学的发展约可分为五个时期，兹分述于下：

一、第一时期

第一时期可从上古算至公元 263 年(即曹魏景元四年)。公元 263 年为刘徽注《九章算术》之年，中国古代最完全的一本算学经典，是这一年告成的。

讲到上古的算学，往往要提到伏羲，隶首，或《河图》，《洛书》，这些史实比较渺茫，我们姑置之不谈。今仅提出此时期中值得注意的两点。第一是《九章》和《周髀》两部算经的完成。这两书成书的确年已不易考。《九章》最迟当在秦火之前，因为刘徽的序里曾说张苍，耿寿昌各有删补，而张苍是秦末汉初的人，故《九章》之成书，在秦朝以前，当无疑义。汉时《九章》之名，几为算学之代表，大儒如郑玄，马续俱通《九章》，其重要可知。全书共分九章，其目录为：方田第一，粟米第二，差分第三，少广第四，商功第五，均输第六，盈不足第七，方程第八，勾股第九。其内容经刘徽注后，网罗甚广，所论问题有涉及二次方程式，联立方程式，及圆与球之面积体积者。另一部《周髀算经》是大家认为最古的算书，但内容远不及《九章》。其成书确年亦不可考，只知道扬雄，蔡邕都曾提到过。今本有汉赵君卿注，注比原书重要得多。书中最重要的一部分是几何问题，如以 3 为圆周率，以正三角形勾股弦之比为 3:4:5 等。后世中算里有所谓割圆术与勾股术，则皆以此书为嚆矢。

第二，从以上两书的内容可以看出中国算学的一个特点，即对于应用之注重。所谓应用指日常问题与造历二种。由于历代帝王的重视，中国古时的算学家无不兼治历算。汉初张苍，耿寿昌都以善历知名，以后大多均同此现象。这种注重应用的态度使中国算学不能产生一部有系统的著作，使中国算学只包括一群零星的结

果，不成为近代意义下的算学。在同一时期内，希腊的算学已在最光荣的阶段。毕达果拉斯(Pythagoras)的门人早就有了无理数的观念。欧几里得(Euclid)的《几何原本》则在公元前三百年已成书！希腊科学所产生的最末一个大算学家是丢番都(Diophantus)，他的时代约为公元250年左右，与刘徽同时，他的著作中已有三次方程式和二次不定方程式的讨论。

总之，第一时期的中国算学，虽比不上希腊，然与同时期的其他国家，如埃及、印度等相比，则决无逊色。在这个时期的后半期，继希腊而起的罗马帝国，在算学上可说毫无成就，反把希腊的文化遗忘了。我们的算学却由此入于一个光荣灿烂的时期。

二、第二时期

中国算学之第二时期，应自刘徽之注《九章》，算至王孝通之著《辑古算经》，约自260年至620年。这时算学的先进——希腊——已衰落了，欧洲转入黑暗时代，印度比不上我们。美索不达米亚平原上的报达(Bagdad)是一个中心，但阿喇伯人的工作，大多是留传希腊的算学。中国的算学家却在此时有几桩值得称道的工作。

为简短起见，我只举这时期三个代表的算学家说一说。第一个是刘徽，徽除《九章注》外，还有若干贡献。在徽以前，周三径一是公认为圆周率，徽以为疏，遂由圆之内容六边形起算，令边数倍进，而求得较密的圆周率。他所得的值为3.14，后人称为徽率。他的方法与亚几默德(Archimedes)的相同。此外徽另造重差术，又称海岛算，实际上是相似三角形的方法。

在此时期中第二个算学家为祖冲之，南朝宋齐间人(429至500)。许多人认他为中国最大的算学家，虽尚有人持异议，至少可见他在算学史上地位之重要。他最重要的贡献是求圆周率，得知π之值在3.141 592 6与3.141 592 7之间，并另得两近似值为$\frac{22}{7}$与$\frac{355}{113}$。这是一个超时代的贡献！以当时算学进展的情形，这种准确程度，甚为难能可贵。冲之圆率西洋方面直到1573年德人奥陶(Valentinus Otto)才得同样的结果，前后相差一千余年！

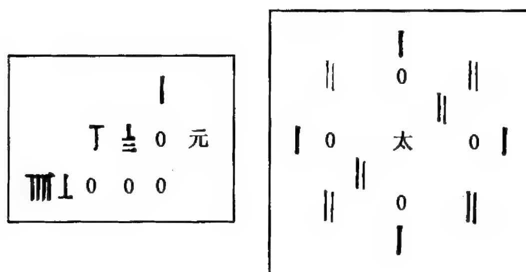
冲之在算学上的其他贡献，我们不大知道，原因是他所著的书《缀术》失传了。《缀术》的内容已不可知，史称“学官莫能究其深奥，是故废而不理”，可见必尚包括其他许多新结果在内。此外可知者，此书的内容必很丰富：唐代学官制度，《孙子算经》与《五曹算经》共习一年，《九章》与《海岛》共习三年，而《缀术》一书要读四年之久！

第三个算学家是王孝通，唐初算学博士(相当于现在的教授)，时代约在620年左右。他著的书叫做《辑古算经》，今尚有存本。《辑古算经》中的问题，应用到二次和三次的方程式，可惜书中没有解法，不知他的结果是怎样得的。

这是中国算学家在世界上称雄的一个时期。

三、第三时期

祖冲之,王孝通以后,欧洲固仍为黑暗时代,中国的算学也缺少新的进展。到了十三世纪大家都同时醒觉了。西洋开始了近数百年的文明,中国的算学因有天元,四元术的发现,造成了一项不可磨灭的贡献。所谓天元,四元术其实就是代数,元指未知数,天就是 x。不过照那时的写法,未知数不能在四个以上,所以天地人物四元并用,为最普通的情形。那时的代数算式的形状,可举例明之如次:



式中太即是常数,写成今式,当为:

$$x^2 + 680x + 96\,000$$

与 $$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw。$$

在此时期内杰出的算学家,当推李冶,秦九韶,其他如杨辉,郭守敬,朱世杰,亦都有重要的著作。这几个算学家的年代,都在十三世纪中叶到十三世纪末叶,约当南宋,金,元的时候。

这时期是中国算学的黄金时期,学者之多,贡献之广,超越前代。我们试随便举几点重要的说一说。第一,中国自己的代数学此时奠定了基础。正负数的观念,代数运算的规则,已为一般算学家所共习。进一步的方程式论自然成了中心的问题。杨辉《详解九章算法》已有巴斯噶三角形定理,比巴氏约早四百年。此外如霍纳(Horner)方法,已早为许多算学家所发现,至秦九韶著《数书九章》(注意此并非《九章算经》),其理遂大明,时间上比霍氏早了五百多年。

第二,秦九韶《数书九章》卷一"大衍类"论及联立一次同余式的解法。这问题在中国有悠久之历史,实起源于《孙子算经》(大约为后汉时人所著,为中国第三部古算书)"物不知数"之问。我先把这问题及其解答录下:

"今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?

"答曰:二十三。术曰:三三数之剩二,置一百四十,五五数之剩三,置六十三,七七数之剩二,置三十;并之,得二百三十三,以二百一十减之,即得。"

此问题俗称"韩信点兵法"(自然韩信不会只点二十几个兵),问题和解法都很

美妙可喜。所谓大衍就是这问题的推广。秦九韶的普通解法,与欧几里得算法实际上完全一致。在初等数论中这是一个比较“深”的定理。西洋近人所作数论教本中有称此定理为“中国余数定理(Chinese Remainder Theorem)”者。

第三,中算学家往往喜言堆垛与纵横图,前者即为有穷级数论,后者今称幻方。研究这类问题的算学家当以杨辉,朱世杰为最重要。他们的结果因图式太繁,兹从略。

以上所列举和选择的,自然杂有个人主观的成分,但即此已可见中国算学在此时期之光芒万丈了!

四、第四时期

中国算学经过第三时期的清醒以后,复入于一沉睡的时期。西洋的算学却从此长足进展,渐渐的使我们望尘莫及。一直到十六世纪末叶,利玛窦(Matteo Ricci)东来,才把我们唤醒,把西洋精神上的食粮喂给我们。于是我们遂入于一新时期,即接受西洋算学的时期。

利玛窦来华后,与徐光启,李之藻等合作,译了许多书,就中从算学方面讲,以《几何原本》前六卷与同文算指二书,为最重要。两书都是当时欧洲所通行的书,后者是一本算术,系德国算学家克拉维斯(Clavius)所著。克氏即为利氏之师,以善写课本出名。利氏译本序中所盛赞之丁先生,即指克氏。

利氏以后,西洋教士之东来者日众,译著亦渐多,几何学,天文学,对数术等渐渐的都输入中国。中国人虽尚有只习中算的,但渐渐都感到西洋方法之优越,不能墨守成规。所以清初著名的算学家,如梅文鼎(1633—1721),王锡阐(1628—1682)等都兼治西算。自利氏东来至民国初年前后三百余年,中国出的算学家很多,清时汉学家兼善算者尤不少。但其结果与并时的西洋算学家相比,就瞠乎其后了。

就译述方面讲,徐,李以后,工作较多者,有清末之李善兰(1811—1882),华蘅芳(1833—1902)。比较深一点的书如微积分等都是这时候译的。以当时译述情形的困难,此项译书工作,其价值正不亚于创作的贡献。比方说,伟烈亚力(Alexander Wylie)帮李善兰译书,李不懂西文,而伟不懂算学,困难可想。我们现在展开一本旧译的算书,观其译笔之雅而达,当对这几位古人致无限的景仰。惜自学校盛兴之后,我国中小学之课本,大都取自于日本。大学用书又直接采用英美原版。对于李,华诸人之译本,久已束置高阁,无人过问,不免可惜耳!

五、第五时期

这是最近的一个时期,它的前途一时还不容易估量,它的特色是研究精神的复

兴。四十年来的学校教育已替许多有志于算学的人开了路,从前需要十年才习毕的材料,现在或者一年就够了。同时还有一些始终受西洋教育的学者,他们的西文程度使他们与西洋学者能有差不多的方便与机会。才智志士,遂得进行同样的工作。1920年左右中国算学家已有将其在国外大学的论文发表于国际第一流算学杂志的。此后数年,即有若干人继起。到了现在,国人前后在有地位的国际算学杂志发表论文者,据个人的统计,约在三百篇左右,战事发生前数年,每年约有三十篇,在国内杂志发表的尚不在内。以工作者之人数比之,这些数目自然要算难得的了!

以上论及的工作,最初几年所产生的,大约是中国学生在国外导师指导下所做的。其中国内产生的部分,则随时间而增加。这自然要归功于国内算学研究机关的设立,与算学研究设备之充实。最先设立算学研究所的,是清华大学,从1930年起,前后毕业肄业者已有多人。此后浙江大学,中央大学,北京大学,都先后设研究所,成绩亦颇为一般人所称道。南开大学未设算学研究所,但最先注意算学的设备,其图书馆所藏算学图书之充实,国内迄今无出在右者。惜自战事发生以还,该项藏书,稍有分散,如何加以整理和充实,使永成国家之珍藏,当为该校当局与社会上热心科学的人士,所应熟为考量的。

民国二十五年中国数学会创办一个《数学学报》,专载有创作性的论文,已出两卷。这杂志已得国际的注意,所刊论文,质地不在一般先进国杂志之下。犹忆1937年的时候,编辑者虑此杂志或因战事不能续刊,把存留的稿件,分寄国外第一流杂志,结果都刊登了!

近代中国算学家工作的范围,代数方面着重于数论,几何则形势几何,微分几何,代数几何都有作者,分析则以函数论,微分方程论,级数论工作者较多。至于详细的结果及其价值,一则太涉专门,未易细述,二则这些专家大多是笔者的师友,批评起来,不免参加主观的成分,最好让他们的工作说明他们的成绩罢了!

六、结　论

在以上的叙述后,愿对未来的中国算学界及社会,提出两点希望:

一、希望中国算学界同志保留并发扬那点可贵的研究精神,使中国科学能渐渐不落人后。上节所说的工作实很有限,以之开始则可喜,从此自满便可悲了!同时近代的研究工作需要设备,希望政府及热心文化事业的机关予以充分的帮助。

二、在第一节中曾提及中国算学注重应用的特色。这也是应有的精神,值得加以培养的。希望有一部分算学家能多注意一点应用的问题,以发挥算学的效能。同时希望社会上遇着与算学有关的问题,肯予算学家以一个商讨的机会。

53. 大范围微分几何若干新观点[①]

本文系作者应美国数学会之邀，在 1945 年夏季大会上的演讲，发表于《Bulletin of American Mathematical Society》第 52 卷，1946 年。中译者：王善平。

1. 引言

大范围微分几何研究流形中给定的几何实在(geometric being)[②] 的局部性质与该流形的整体性质之间的关系。该流形在下述意义下是可微的：它被一组坐标邻域所覆盖，这些坐标邻域都有同样个数的坐标，并且每两个这样的不同的坐标系在它们的公共区域中用一个至少一阶可微的变换来联系。这后一假定使我们可以在局部几何的研究中使用微分，进而导致由欧拉、高斯和蒙日首先研究的那些几何性质。

作为这类研究课题的一个例子，我们考虑一个闭曲面 S，它(至少二阶)可微嵌入三维欧氏空间中。令 K 为 S 的高斯曲率，$\mathrm{d}A$ 为 S 的面积元素。则经典的高斯-博内公式断言：

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K\mathrm{d}A = 2(1-p), \tag{1}$$

这里 p 是 S 的亏格。这个公式用微分不变量来表示 S 的亏格 p 这一拓扑不变量。换句话说，p 完全由 S 的局部性质所决定。

另一个例子考虑嵌于欧氏平面的一条闭曲线 C。如果 C 可求长并有长度 l，以及 C 所围区域的面积为 A，那么

$$l^2 - 4\pi A \geqslant 0, \tag{2}$$

其中等号仅当 C 为圆周时成立。这就是所谓的等周不等式，它最近被意外地从积分几何导出，后者是研究微分不变量的积分的学科。

---

① 献给埃利·嘉当教授。

② 奥斯瓦尔德·维布伦教授首先建议使用术语几何对象(geometric object)，但他现在选择用 geometric being，这一词译自嘉当所创的法语词“être géométrique”。

这类研究问题有两个方面：局部方面和整体方面。经过几十年的大量工作，局部方面的问题得到了广泛研究和发展，这些成果集中体现在张量分析理论中。虽然张量分析为处理大多数局部问题提供了很好的工具，但是对整体问题的研究自然需要引入新的概念和改变人们迄今所遵循的经典处理方法。本文的主要目的是强调在对赋有几何实在的流形的整体研究中，考虑与该流形有关的新的拓扑空间的重要性。事实上这个想法对于微分几何的局部方面和整体方面的研究都很重要。关于局部问题，埃利·嘉当对此当然是很熟悉的，他为他的几何实在（仿射联络、射影联络、正则联络等等）的一般理论引进了切空间（"espace tangent"）的概念。嘉当意义下的切空间并不总是切向量空间，这构成了难以理解他的工作的原因之一。另一方面，近来关于拓扑学中纤维丛的工作（斯蒂弗尔、惠特尼、费尔德堡、埃雷斯曼、庞特里亚金、斯廷罗德等等）看来为建立嘉当思想的整体理论奠定了基础。作者认为，把这两部分工作结合起来会为大范围微分几何的研究提供比迄今为止所得到的更好的概念和工具。本文主要讨论由这一观点而引起的问题的不同方面。

在具体展开以前，我先简短总结一下讨论的要点。我们的问题是研究微分流形上以局部坐标系形式给出的几何实在，这些局部坐标系的分量在坐标变化时服从确定的变换规则。我们强调，这样的问题一般总有可能在某种意义下定义在与该流形关联的一个自然的纤维丛上。于是这个几何实在以唯一的方式在纤维丛中定义了一组线性微分形式，它给出了该几何实在的所有局部性质。对于黎曼几何来说，这个自然的纤维丛就是流形上全部标架所形成的空间，而相应的微分形式给出的实际上是列维-齐维塔平行。关联的纤维丛的性质由解决所谓等价问题而得到最佳的确定，这个等价问题对于黎曼几何来说就是形式问题。给定了纤维丛中的线性微分形式集合，就可以通过格拉斯曼分析运算得到更高阶的微分形式。这些微分形式定义了上链，并且当它们是恰当的时候定义了闭上链。研究由关联的纤维丛向给定流形的投射而产生的两者的上链和闭上链之间的相互关系，将会导致对几何实在整体理论的更深刻的理解。下面试图表明，在最简单的情况下这样的想法会导致怎样的结果。虽然这将是本文的主要内容，但这并不意味着纤维丛理论在微分几何只有这样的应用。事实上，有迹象表明它可能还有其他富有成果的应用。因此看来值得对这一领域做更彻底的研究。

2. 格拉斯曼代数

在嘉当方法以前有所谓的格拉斯曼代数。它可以用形式代数的方法定义如下：令 K 是特征 0 的域，令 $V(n,K)$ 是 K 上 n 维向量空间；那么 $V(n,K)$ 上的格拉斯曼代数 H 就是 K 上满足以下条件的超复系统：

1) H 含有单位元 1 和 $V(n,K)$ 的所有元素，并且由这些元素（通过超复系统运

算)生成。

2) 如 x、y 属于 $V(n,K)$,则它们的乘积满足以下交换规则:

$$xy = -yx。 \tag{3}$$

3) H 中的元素只满足从 1)和 2)导出的关系。

令 $e_1,\cdots,e_n$ 是 $V(n,K)$的一组基。根据以上条件可以得出以下结论:H 中每一元素都可以以唯一的方式表示成系数在 K 中的 $1,e_{i_1},\cdots,e_{i_m}$ 的线性组合,其中 $i_1<\cdots<i_m$ 以及 $i_1,\cdots,i_m=1,\cdots,n$。如 x 属于 H,我们就用符号表示:

$$x=\sum_{m=0}^{n}x^{(m)}, \tag{4}$$

这里

$$x^{(m)}=\sum_{i_1,\cdots,i_m=1;i_1<\cdots<i_m}^{n}a_{i_1\cdots i_m}e_{i_1}\cdots e_{i_m}。 \tag{5}$$

元素 x 是 m 次的,如果

$$x^{(m)}\neq 0,\ x^{(m+1)}=\cdots=x^{(n)}=0。$$

如果 $x^{(i)}=0,i\neq m$,则称为外形式,或简称形式。一个元素的次数与基的选择无关,它是否是形式也与基的选择无关。

令 W 是 $V(n,K)$的一个 m 维子空间。我们在 W 中取一组基向量 $f_1,\cdots,f_m$,并作乘积 $w=f_1\cdots f_m$。很容易证明,除了一个 K 中的非零系数外 w 由 W 唯一确定。这个形式 w 就称为 W 的相伴形式。如果 w_1 和 w_2 分别是具有维数 m 和 p 的子空间 W_1 和 W_2 的相伴形式,那么 W_1 和 W_2 有非零相交部分当且仅当 $w_1w_2=0$。并且如果 $w_1w_2\neq 0$,那么这就是维数为 $m+p$ 的 W_1 与 W_2 的和子空间的相伴形式。这就是格拉斯曼代数可用于研究向量空间中的几何的简单例子。

3. E. 嘉当的微分运算

格拉斯曼代数被弗罗贝尼乌斯和达布成功地用于解决普法夫问题。所谓双线性共变式就是二次外微分式。然而是 E. 嘉当首先系统地使用一种与格拉斯曼代数密切相关并涉及高次外微分形式的运算。

令 M^n 是一个至少二阶可微的 n 维微分流形。在 M^n 的点 P 上,反变向量与共变向量构成了两个(实域上的)向量空间,这两个空间在它们互为另一个的线性形式空间的意义下是对偶的。P 上线性微分形式的概念同于共变向量的线性形式的概念。因为令 $x^1,\cdots,x^n$ 为 P 的局部坐标,共变向量关于 x^i 坐标的分量是 X_i,则微分形式

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}X_i\mathrm{d}x^i, \tag{6}$$

在它独立于局部坐标系的选择的这个意义下是内蕴的。反之,内蕴形式 ω 在每个局部坐标系中都有一组构成共变向量的分量。

对于在 M^n 的点 P 上的线性微分形式向量空间,我们构造格拉斯曼代数。这种格拉斯曼代数的形式叫做外微分形式或简称微分式。在局部坐标系 x^i 中,外微分形式可以写成

$$(7)\qquad \omega = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} a_{i_1\cdots i_m}(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^{i_1}\cdots\mathrm{d}x^{i_m},$$

这里我们可以认定系数 $a_{i_1\cdots i_m}$ 是关于其指标反对称的。用张量分析的话来说,分量 $a_{i_1\cdots i_m}$ 是一个阶为 m 的交错共变张量的分量。

在局部坐标 x^i 保持有效的 P 的一个邻域内,设 $a_{i_1\cdots i_m}$ 至少二阶可微,我们通过以下关系式定义一个称作 ω 的外导数的 $m+1$ 次微分形式

$$(8)\qquad \mathrm{d}\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} \mathrm{d}a_{i_1\cdots i_m}\mathrm{d}x^{i_1}\cdots\mathrm{d}x^{i_m},$$

这里 $\mathrm{d}a_{i_1\cdots i_m}$ 是通常的微分。很容易证明,这一外微分过程具有以下性质:

1) 如果 ω,θ 是次数分别为 m 和 p 的两个不同的微分形式,那么

$$(9)\qquad \mathrm{d}(\omega\theta) = \mathrm{d}\omega\cdot\theta + (-1)^m\omega\mathrm{d}\theta。$$

2) 对任何 ω:

$$(10)\qquad \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0。$$

3) 外微分的过程在坐标变换下是不变的。这个意思是说:令 P 的某一邻域内的局部坐标 x^i 代表 n 维欧氏空间中的开集 D 中的一组点 S;令具有坐标 $y^1,\cdots,y^r$ 的 r 维欧氏空间中的开集 E,通过映射

$$(11)\qquad x^i = f^i(y^1,\cdots,y^r),\qquad i = 1,\cdots,n$$

映入 D,其中 f^i 至少二阶可微,并使得 S 是集合 $T\subset E$ 的映像。根据定义有

$$F(x^1,\cdots,x^n)\to F(x^1(y),\cdots,x^n(y)),\mathrm{d}x^i\to\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\mathrm{d}y^k;$$

这一映射以一种自然的方式(即保持格拉斯曼代数的乘法)诱导出从微分形式 ω 到空间$(y^1,\cdots,y^r)$中形式的一个映射,对此我们用$\widetilde{\omega}$表示。于是有

$$(12)\qquad \mathrm{d}\widetilde{\omega} = \widetilde{\mathrm{d}\omega}。$$

特别地,当 $r=n$ 时这就表明外微分过程是内蕴的,即它与在哪一个局部坐标系下进行无关。

外微分形式就是多重积分理论中积分号下的形式。事实上,令 ω 是定义在流形 M 上的 m 次形式;令 K^m 是 M^n 上(组合拓扑意义下的)维数为 m 的链,即它是一些系数是整数、有理数或实数的欧氏空间中的单纯形的像的和,这些像是通过至少二阶可微的映射得到的;则可以在 K^m 上定义 ω 的积分。令 ∂K^{m+1} 表示维数为 $m+1$ 的链 K^{m+1} 的边缘,则斯托克斯定理可以写成

$$\int_{\partial k^{m+1}} \omega = \int_{K^{m+1}} \mathrm{d}\omega。 \tag{13}$$

要看清斯托克斯定理的这种形式与通常形式之间的联系,只需注意到

$$\mathrm{d}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{14a}$$

$$\mathrm{d}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。 \tag{14b}$$

4. 纤维丛

纤维丛的一个简单例子就是三维欧氏空间中所有与某一球面相切的非零向量形成的流形。这是个拓扑流形,虽然很特殊。然而结果表明,具有类似性质的流形在拓扑学对微分几何的应用中发挥了重要的作用。在相切于球面的向量的例子中,以下三个事实值得注意:

1) 由同一点上的切向量形成的空间是相互同胚的,因而同胚于一个固定的空间,我们称作 F_0。

2) 邻域 U 中所有点上的[全体]切向量同胚于 U 与 F_0 的拓扑积。特别地,如果 $P\in U$,则有一个依赖于 P 和 U 的同胚 T,它把 P 上的切向量映到 F_0。

3) 在 2)的记号中,我们把 T 写成 $T(P,U)$。如果 P 属于另一个邻域 V,则映射 $T(P,V)T^{-1}(P,U)$ 是 F_0 自身上的同胚。可以证明 T 能够这样选择,使得 $T(P,V)T^{-1}(P,U)\in G$,这里 G 是 F_0 中的旋转群或仿射群。

最后一点可以证明如下:令邻域是这样的坐标邻域,使得 U 是由所有其局部坐标 u^1、u^2 满足不等式 $|u^i|<\varepsilon\ (i=1,2)$ 这样的点组成的集合。向量 ξ 在局部坐标系 u^1、u^2 下有分量 X^1、X^2。则 U 上的切向量以一种显然的方式分解为拓扑积。如果 V 有局部坐标 v^1、v^2,并且 ξ 在坐标系中的分量为 Y^1、Y^2,则众所周知有

$$Y^1 = \frac{\partial v^1}{\partial u^1}X^1 + \frac{\partial v^1}{\partial u^2}X^2, \quad Y^2 = \frac{\partial v^2}{\partial u^1}X^1 + \frac{\partial v^2}{\partial u^2}X^2,$$

这是仿射变换。

这一特例引导我们给出下面的一般纤维丛的定义。为了与后面要用的术语和记号一致,我们先给出参照表:

一般情况	特殊例子	记　　号
纤 维 丛	球面的切向量流形	$\mathscr{F}$
纤维丛的点	切 向 量	P
底 空 间	球　　面	M
纤　　维	同一基点上的向量	F
投　　射	把切向量映射到其基点	$\pi(P)\in M$
纤维中的变换群	同一基点的向量空间中的仿射或旋转群	G

我们把纤维丛$\mathscr{F}$定义为具有如下性质的拓扑空间：

1) 存在一个把$\mathscr{F}$映上另一拓扑空间 M 的(连续)映射 π: $\pi(\mathscr{F}) = M$。空间 M 称为底空间，映射 π 称为投射。点 $P\in M$ 的全逆像 $\pi^{-1}(P)$称为 P 上的纤维。根据后面的假设将会推出：所有的纤维相互同胚，从而同胚于一确定的拓扑空间 F_0。

2) 存在一族覆盖 M 的邻域。如果 U 是该族中的一个邻域，则逆像 $\pi^{-1}(U)$是拓扑积，即存在于一个依赖于 U 的同胚 ψ_U，使得

$$\psi_U\{\pi^{-1}(U)\} = U\times F_0,$$

以及对于每一 $P\in U$，有

$$\psi_U\{\pi^{-1}(P)\} = P\times F_0。$$

3) 令 U、V 是如上述的 M 的邻域，并令 $P\in U\cap V$。则映射 $\psi_V\{\psi_U^{-1}(P\times F_0)\}$ 是 $P\times F_0$ 的自身同胚，从而是 F_0 的自身同胚。这个同胚属于 F_0 中预先给定的群 G。

在我们感兴趣的情况中，M 和 $\mathscr{F}$都被假设成是至少一阶可微的流形，而群 G 是一个李群。

为说明纤维丛的概念的应用范围，我们进一步给出以下例子——都是关于一个至少一阶可微的 n 维流形 M 的例子：

1) M 的切向量构成以 M 为底空间的纤维丛。

2) 令 $e_1,\cdots,e_p(1\leqslant p\leqslant n)$ 为 M 的同一点 P 上的切向量。则元素$(P;e_1,\cdots,e_p)$构成 M 上的纤维丛。另一纤维丛则由满足 $e_1,\cdots,e_p$ 线性无关这样的条件的元素构成。斯蒂弗尔与惠特尼曾研究过这些纤维丛[26,33]。

3) 我们把这样的几何实在叫做权 k 标量密度：它在每个局部坐标系中都有分量，并且它在局部坐标系 x^i 和 x^{*i}中的分量 f 和 f^* 满足这样的关系式

(15) $$f^* = f \cdot J^k,$$

这里

(15a) $$J = \partial(x^1, \cdots, x^n)/\partial(x^{*1}, \cdots, x^{*n})。$$

M 中的标量密度或非零标量密度构成 M 上的纤维丛。

4) 一类重要的纤维丛的一般定义过程如下：设 M 嵌于 $n+N$ 维欧氏空间 E^{n+N} 中。在 E^{n+N} 的一点 O 上，令 $H(n,N)$ 是由通过 O 的所有 n 维定向线性子空间形成的格拉斯曼流形。映射 $T(M) \subset H(n,N)$ 定义了 M 上如此的纤维丛，它在 M 的各点 P 上的纤维是过 P 平行于 $T(P)$ 的 n 维子空间。

纤维丛理论的重要成果之一是引进了所谓示性闭上链。为给出其定义，我们假设 M 是一个可剖分空间，并令 K 是 M 的单纯分解。令 K^r 是 K 的 r 维骨架，即由所有维数不大于 r 的单形组成的子复形。我们假设纤维丛在斯廷罗德解释[24]的意义下是可定向的。令 F_0 是连通的，并有阿贝尔基本群。在这些假设下可以得到下面的定理：

定理 4.1. 令 $H^i(F_0)$ 是 F_0 的(具有整系数的)第 i 个同调群，如果

$$H^1(F_0) = \cdots = H^{r-1}(F_0) = 0,$$

则可以定义从 K^r 到 $\mathscr{F}$ 中的连续映射 ϕ，使得 $\pi\phi(P) = P, P \in K^r$。

定理 4.2. 符号同定理 4.1，如果

$$H^1(F_0) = \cdots = H^{r-1}(F_0) = 0, \quad H^r(F_0) \neq 0,$$

则存在 $r+1$ 维的(以 $H^r(F_0)$ 为系数群的)上同调类 γ^{r+1}，该类的消没是可以定义满足 $\pi\phi(P) = P \in K^{r+1}$ 的从 K^{r+1} 到 $\mathscr{F}$ 中的连续映射 ϕ 的充分和必要的条件。这个上同调类是 $\mathscr{F}$ 的拓扑不变量。

这个上同调类 γ^{r+1} 被叫做示性上同调类，而它的任何闭上链则被称作示性闭上链。如果 M 是个可定向流形，则 γ^{r+1} 的对偶是维数为 $n-r-1$ 的同调类，被称作示性同调类。特别地，如果 M 是可定向流形并且 $\mathscr{F}$ 是由 M 的非零切向量形成的纤维丛，则示性闭上链 γ 是 n 维的并且它的关于 M 的基本闭链的值就是 M 的欧拉-庞加莱示性数。这样我们就看到，示性类理论推广了经典的可定向流形上的向量场理论。

5. 黎曼几何

上几节勾勒出建立一个几何实在的理论所需要的预备知识。作为演示我们将把上面的工具用于几何实在中“最简单”又是最重要的一种——黎曼几何。我们将看到，得到的结果实际上就是嘉当所给出的，我们也会指明这些结果与现在经典的张量分析处理方法的关系；然而我们采用更一般的观点，这些观点将导致更进一步的研究。

令 M 是至少 4 阶可微的流形。设 M 中给出了一个黎曼度量，它在局部坐标系

x^i 中可以用正定的微分形式① 给出

(16) $$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x^k)(dx^i dx^j), \qquad g_{ij} = g_{ji},$$

则流形 M 就叫做黎曼流形。

考虑 M 上的一点 P,以及 M 在 P 上的反变切向量。根据(16)的微分形式(或张量 g_{ij})可以定义两个向量 e、f 的标量积,记为 $e\cdot f$。向量 e 如果满足 $e^2=1$ 则称作单位向量。称 n 个向量的有序集 $e_1,\cdots,e_n$ 构成标架,如果它们满足

(17) $$e_ie_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \quad i,j=1,\cdots,n。$$

过 P 的可微曲线由方程

(18) $$x^i = x^i(s)$$

定义,这里 s 是曲线的弧长,并且这些函数至少一阶可微。我们用 dP/ds 表示曲线在 P 点的单位切向量。容易通过局部坐标系证明,存在这样一个向量(记作 dP),它在各标架中的分量是线性微分形式,并等于 ds 与沿曲线的单位切向量的乘积。这个向量是内蕴的,即与坐标的选择无关。在标架 $e_1,\cdots,e_n$ 中,我们有

(19) $$dP = \omega_1 e_1 + \cdots + \omega_n e_n,$$

这里 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 是线性微分形式。于是沿着曲线,我们有 $(dP/ds)^2=1$, 或

(20) $$ds^2 = (\omega_1)^2 + \cdots + (\omega_n)^2。$$

所以形式 $\omega_i(i=1,\cdots,n)$ 的平方和是给定的(通常)二次微分式。

随着点 P 跑遍 M,标架 $e_1,\cdots,e_n$ 构成以 M 为底空间的纤维丛。每条纤维都拓扑地等同于同一点上所有的标架形成的空间。该纤维丛的维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$,而每条纤维的维数是 $\frac{n(n-1)}{2}$。作用于各纤维上的群是正交变换群。

对于向量 de_i 还没有内蕴的解释。我们来看是否有可能内蕴地定义一些微分形式,使得

(21) $$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j。$$

由(17)得到 ω_{ij} 关于其指标是反对称的:

(22) $$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0。$$

以下定理对我们的问题给出了解答:

① 这里指的是通常的微分形式而不是外微分形式。为表示区别我们对前一种微分加上圆括号。

定理 5.1. 纤维丛中存在唯一的一组线性微分形式 ω_{ij}，使得(21)和以下等式

$$d(dP) = 0 \tag{23}$$

成立。

事实上当(23)式展开后，得到

$$d\omega_i - \sum_j \omega_j \omega_{ji} = 0。 \tag{24}$$

为了计算 $d\omega_i$，我们利用局部坐标系 x^i 并对 ds^2 作平方和分解：

$$ds^2 = (\theta_1)^2 + \cdots + (\theta_n)^2, \tag{25}$$

这里

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}(x) dx^j。 \tag{25a}$$

由于(20)与(25)给出同一的普通二次微分式的两个平方和分解，所以我们有

$$\omega_i = \sum u_{ij}\theta_j, \tag{26}$$

此处 u_{ij}是正交矩阵的元素：

$$U = (u_{ij}), \quad UU' = I = \text{单位矩阵}。 \tag{26a}$$

对(26)求外导，我们得到：

$$d\omega_i = \sum du_{ij}\theta_j + \sum u_{ij} d\theta_j,$$

这说明 $d\omega_i$ 形如

$$d\omega_i = \sum \omega_j \phi_{ji}, \tag{27}$$

这里 ϕ_{ji}是以 x^i，u_{ij}为变量的线性微分形式，可以显然地算出。代入(24)得到

$$\sum \omega_j(\omega_{ji} - \phi_{ji}) = 0,$$

这又给出

$$\omega_{ji} - \phi_{ji} = \sum \lambda_{jik}\omega_k, \qquad \lambda_{jik} = \lambda_{kij}。 \tag{28}$$

在此等式中 ϕ_{ji}是已知的，而为确定 ω_{ji}就要确定λ_{jik}。由于 ω_{ij}关于其指标反对称，我们有

$$-(\phi_{ij} + \phi_{ji}) = \sum(\lambda_{ijk} + \lambda_{jik})\omega_k。$$

这一等式表明 $\phi_{ij} + \phi_{ji}$ 具有如下形式：

$$\phi_{ij} + \phi_{ji} = -\sum A_{ijk}\omega_k, \qquad A_{ijk} = A_{jik}, \tag{29}$$

以及

(30) $$\lambda_{ijk}+\lambda_{jik}=A_{ijk}。$$

从而关于其第一和第三指标对称的 λ_{ijk}是唯一确定的，并由下式给出：

(31) $$\lambda_{ijk}=(-A_{ikj}+A_{jki}+A_{ijk})/2。$$

这就证明了定理。

等式(21)可以这样解释：它提供了把距离点 P 无限近的点上的一个向量转至 P 上的向量的一种手段。这实际就是人们已知的列维-齐维塔平行的概念。

对等式(24)求外导数并利用该式本身，我们得到

$$\sum_j\omega_j\Big(\sum_k\omega_{ik}\omega_{kj}-\mathrm{d}\omega_{ij}\Big)=0。$$

不难看出我们可以把它写成

(32) $$\mathrm{d}\omega_{ij}=\sum_k\omega_{ik}\omega_{kj}+\Omega_{ij},$$

这里 Ω_{ij}为

(33) $$\Omega_{ij}=\sum R_{ij,kl}\omega_k\omega_l,\quad R_{ij,kl}+R_{ij,lk}=0,\qquad \Omega_{ij}+\Omega_{ji}=0。$$

我们把 Ω_{ij}称为曲率形式。

稍加改变，我们的结果可以归结为如下定理：

定理 5.2. *令 M 是 n 维黎曼流形并令 $\mathscr{F}$为 M 的所有的标架形成的纤维丛，则可以在 $(n(n+1)/2$ 维的$)\mathscr{F}$中唯一确定一组 $n(n+1)/2$ 个线性无关的线性微分形式 ω_i、ω_{ij}，它们满足等式(19)、(21)和(24)。*

我们简要说明一下这样的处理方法与通常的张量分析方法之间的关系。在张量分析中特别强调局部坐标系。其程序如下：在局部坐标系 x^i 中，令 f_k 表示坐标曲线 x^i = 常数，$i\neq k$(x^k 表示时间)的速度向量，则有

(34) $$f_i\cdot f_k=g_{ik}$$

和

(35) $$\mathrm{d}P=\mathrm{d}x^1\cdot f_1+\cdots+\mathrm{d}x^n\cdot f_n。$$

向量 ζ 关于向量f_k 的分量 X^i 由以下方程定义

(36) $$\zeta=\sum X^i f_i。$$

用类似于定理 5.1 的证明方法，可以证明存在一组线性微分形式，满足

(37) $$\mathrm{d}f_i=\sum\theta_i^j f_j$$

和

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}P)=0。$$

如果 $\mathrm{d}\zeta=0$ 则称向量 $\zeta+\mathrm{d}\zeta$ 平行于 ζ，利用(36)和(37)式，可以把它写成

$$\mathrm{d}X^i+\sum\theta_j^iX^j=0。\tag{38}$$

容易认出，这些方程就是定义列维-齐维塔平行的那些著名的方程。

黎曼几何中一个重要的事实就是，你不仅要考虑黎曼流形本身而且必须考虑流形上的纤维丛。我们的方法是，直接考虑纤维丛。而通常的张量分析方法通过强调局部坐标系来回避它。大量的几何研究都是关于那些在局部坐标变换下服从简单规律的问题。对于黎曼几何来说，这两种方法在处理局部问题上实际上是一回事。但是即使在局部问题上，它们对其他几何实在的推广也会导致不同的表达。下一节我们将给出处理几何实在局部理论的系统方法。

6. 等价方法

上一节介绍的对黎曼流形上纤维丛的处理到目前为止看来似乎是偶然的。但是如果我们开始着手处理以下问题，就会对其内在的理由有更清晰的认识：

设有两个由分别在局部坐标领域 U 和 U^* 的正定二次微分形式给出的黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j}g_{ij}(x)(\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j),\qquad g_{ij}=g_{ji},\tag{39}$$

$$\mathrm{d}s^{*2}=\sum_{i,j}g_{ij}^*(x^*)(\mathrm{d}x^{*i}\mathrm{d}x^{*j}),\qquad g_{ij}^*=g_{ji}^*。\tag{40}$$

我们要确定邻域 $V\subset U$ 可以被一个雅可比行列式不为零的(充分光滑的)可微映射映入 U^*，使得

$$\mathrm{d}s^{*2}=\mathrm{d}s^2$$

的条件。

这就是所谓的形式问题，已被克利斯托费尔和李普希茨解决。显然如果这个问题有解，则这两个黎曼度量的局部理论实际上是一样的。

为给出这个问题的不同的表达，我们来确定两组线性微分式 $\theta_i(x,\mathrm{d}x)$ 和 $\theta_i^*(x^*,\mathrm{d}x^*)$，使得

$$\mathrm{d}s^2=(\theta_1)^2+\cdots+(\theta_n)^2,\qquad \mathrm{d}s^{*2}=(\theta_1^*)^2+\cdots+(\theta_n^*)^2。$$

我们的问题有解当且仅当可以在某一邻域 $V\subset U$ 中确定所要的可微映射和函数 $u_{ij}(x)$，使得

$$\theta_i^*(x^*,\mathrm{d}x^*)=\sum_j u_{ij}(x)\theta_j(x,\mathrm{d}x),\tag{41}$$

这里矩阵

$$\boldsymbol{U}=(u_{ij})\tag{42}$$

是一正交矩阵。

这样,原先用二次微分形式表达的问题,被归约为线性微分形式的问题。这种形式的问题是一类更广泛的问题的特例,这类问题首先由嘉当提出和解决。嘉当问题是这样的:

令 $\theta_i(x,\mathrm{d}x)$ 和 $\theta_i^*(x^*,\mathrm{d}x^*)$ 是两组在局部坐标 x^i、x^{*i}, $i=1,\cdots,n$ 的邻域 U、U^* 中的线性独立的线性微分形式。令 Γ 是 n 维线性空间中的线性群。我们要确定存在一个雅可比行列式不为零的可微映射的条件,它把邻域 $V\subset U$ 映入 U^*,并使得

(43) $$\theta_i^* = \sum u_{ij}(x)\theta_j$$

其中线性变换属于给定的线性群 Γ。

在我们的例子中 Γ 是正交群。

解决这一局部问题需要嘉当的普法夫系统对合理论,它并不简单。详细讨论请见[3]。

我们只说明,当 Γ 仅由单位元组成时问题较简单。其一般过程是通过引进新变量把问题归约为此特例。我们要通过我们的形式问题来演示这一方法。令 u_{ij} 和 u_{ij}^* 是两组新变量,它们是正交矩阵中的元素

$$\boldsymbol{U} = (u_{ij}),\ \boldsymbol{U}^* = (u_{ij}^*)。$$

并令

(44) $$\omega_i = \sum u_{ij}\theta_j,\ \omega_i^* = \sum u_{ij}^*\theta_j^*。$$

则我们的形式问题有解当且仅当存在一个把邻域 $V\subset U$ 映入 U^* 的可微映射和一个元素为 V 中函数的正交矩阵 X,使得在此映射和由

(45) $$U^*X = U$$

定义的映射下,我们有

(46) $$\omega_i^* = \omega_i。$$

从最后一个方程我们得到

(47) $$\mathrm{d}\omega_i^* = \mathrm{d}\omega_i。$$

用与上一节完全相同的方法,可以证明在 x^i 及 u_{ij} 中存在唯一一组线性微分形式 ω_{ij},它们关于其指数是反对称的,并满足方程

$$\mathrm{d}\omega_i = \omega_j\omega_{ji}。$$

类似地,可以找到一组线性微分形式 $\omega_{ij}^*(=-\omega_{ji}^*)$,使得

$$d\omega_i^* = \omega_j^* \omega_{ji}^*。$$

当(46)和(47)成立时,很容易导出

$$\omega_{ij}^* = \omega_{ij}。\tag{48}$$

令 V 是 U 的充分小的邻域,并令 $O(n)$ 是正交群的群流形。我们考虑拓扑积 $V \times O(n)$。类似地,我们有拓扑积 $V^* \times O^*(n)$。为使我们的形式问题有解,其充分和必要条件是 $V \times O(n)$ 和 $V^* \times O^*(n)$ 之间存在一个可微映射,使得(46) 和(48)式成立。容易看出形式 ω_i 和 ω_{ij} 是线性独立的,其个数为 $n(n+1)/2$,等于 $V \times O(n)$ 的维数。这样,我们的问题就归结为 Γ 仅由单位元组成情况下的嘉当一般问题。

从而可以看出,上一节的讨论只不过是以上分析考虑的几何处理罢了。我们把这些结果总结如下:

给定具有维数 n 和正定二次微分形式 ds^2 的黎曼流形 M,联系着一个以 M 为底空间的纤维丛,该纤维丛由所有的线性微分形式组(即共变向量)组成,并且每一个微分形式组的平方和等于 ds^2。这个纤维丛是 $n(n+1)/2$ 维的并且存在一组个数为 $n(n+1)/2$ 的线性独立的不变微分形式 ω_i、ω_{ij}。局部存在把某一 ds^2 映成另一个的可微映射,当且仅当相应的纤维丛中存在使形式 ω_i 和 ω_{ij} 分别相等的映射。

我们可以说,把这一纤维丛(即它的纤维拓扑地等于 $O(n)$ 的纤维丛)联系于黎曼流形的深层原因是由于解决形式问题的结果。从黎曼流形的例子可以清楚地看到:对于其他种几何实在的理论来说,解决相应的局部"等价问题"是建立一个适当的大范围理论的自然的预备步骤。事实上,通过解决等价问题,联系于该流形的纤维丛就可以自然地确定。

微分几何中有大量的令人感兴趣的几何实在。为了说明我们的方法,我们把所谓道路的几何作为另一个例子。令 M 是 n 维可微流形。在其一个局部坐标为 x^i 的邻域中,给出一组二阶微分方程:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum \Gamma_{jk}^i(x) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = F(x,t) \frac{dx^i}{dt},\tag{49}$$

这里假设函数 Γ_{jk}^i 和 F 至少三阶可微。(49)式的积分曲线被称为道路。它们有这样的性质:过 M 中的每一点和相切于该点上的每一向量有且仅有一条道路。独立变量 t 是道路上的参数。它在这样的意义下是无关的:变换 $t = \phi(\tau)$ 给出相同的道路,这里 $\phi(\tau)$ 是可微的。简而言之,我们的流形 M 上有一道路系统,它是在各局部坐标域中由形如(49)的微分组,而我们的任务是研究 M 中由道路引起的几何性质。这一问题的一个重要的特例是当 M 是 n 维射影空间而道路是 M 中的直线时的情况,这时的道路在适当的局部坐标系下由满足 $\Gamma_{jk}^i = 0$ 的(49)式定义。

遵循我们解决形式问题的思路，我们先考虑下面的等价问题：在另一局部坐标为 x^{*i} 的坐标邻域中，令道路系统由类似于(49)的微分组定义。要确定坐标 x^i 与 x^{*i} 之间的可微映射把一个道路系统映入另一道路系统的条件。

为了应用等价方法，我们要把(49)写成常微分方程组的形式。为简单起见，我们假设(49)的积分曲线中 x^n 不是常量。从而我们可以把 x^n 当作沿着曲线的参数，(49)式就可以写成

$$\frac{dx^\alpha}{dx^n}=y^\alpha,\quad \frac{dy^\alpha}{dx^n}+\sum\Gamma^\alpha_{jk}y^jy^k=Fy^\alpha,\quad \sum\Gamma^n_{jk}y^jy^k=F,$$

这里指数 α 过 1 到 $n-1$，而 $y^n=1$。这一系统可以写成如下全微分方程组形式：

$$\begin{aligned}\theta^\alpha&=dx^\alpha-y^\alpha dx^n=0,\\ \pi^\alpha&=dy^\alpha+\left\{\sum\Gamma^\alpha_{jk}y^jy^k-y^\alpha\sum\Gamma^n_{jk}y^jy^k\right\}dx^n=0。\end{aligned}\tag{50}$$

我们也引入形式 dx^n，从而 θ^α、dx^n 构成坐标中一组线性独立的线性微分形式。在局部坐标为 x^{*i} 的另一流形中，类似地我们引入新变量 $y^{*\alpha}$ 和形式 $\theta^{*\alpha}$、dx^{*n} 与 $\pi^{*\alpha}$。我们记

$$\Theta=\begin{pmatrix}dx^n\\ \theta^\alpha\\ \pi^\alpha\end{pmatrix},\quad \Theta^*=\begin{pmatrix}dx^{*n}\\ \theta^{*\alpha}\\ \pi^{*\alpha}\end{pmatrix},\tag{51}$$

并引入矩阵

$$U=\begin{pmatrix}A(1,1)&B(1,n-1)&0\\ 0&C(n-1,n-1)&0\\ 0&D(n-1,n-1)&E(n-1,n-1)\end{pmatrix},\tag{52}$$

其中非零元素是独立变量，而括号中的数字表示该子矩阵的行数和列数。容易证明，我们的等价问题有解当且仅当在 (x^i,y^α) 与 $(x^{*i},y^{*\alpha})$ 之间有一可微映射，并且 U 中的元素能够作为 x^i、y^α 的函数确定，使得在此映射下矩阵方程

$$\Theta^*=U\Theta\tag{53}$$

成立。现在在 $2n-1$ 维的线性向量空间中，所有这样的 U 形成一个群。从而用这样的方法，使我们的等价问题成为上述嘉当等价问题的特例。

这一问题可以用嘉当的一般方法来解决。我们这里不作详细讨论。[12]中给出一个以本题为特例的解决方法。

我们的最后结果可以用以下定理陈述：

定理 6.1. 设在一至少三阶可微的 n 维流形 M 中，由微分方程式(49)局部地定义了一个道路系统。则可以在 M 的具有局部坐标 x^i 的邻域中引入 $n(n+1)$ 个

其他变量 $u_A, A = 1, \cdots, n(n+1)$，并定义 $n(n+2)$ 个以 x^i, u_A 为变量的线性独立的线性微分形式 $\omega_B, B = 1, \cdots, n(n+2)$，使它们具有这样的性质：存在一个把道路系统映到另一个具有局部坐标 x^{*i} 和新变量 u_A^* 等等的道路系统的局部可微映射的充要条件是，两个空间邻域 (x^i, u_A) 与 (x^{*i}, u_A^*) 之间存在着这样的可微映射，它使形式 ω_B 与 ω_B^* 互相映入对方。

对于局部坐标系 x^i 来说，变量 x^i 与 u_A，$A = 1, \cdots, n(n+1)$，决定了一个拓扑积。这使我们去考虑 M 上这样一个纤维丛，它是 $n(n+2)$ 维的并局部地由坐标 x^i 和 u_A 给出。在这纤维丛中正好定义了 $n(n+2)$ 个内蕴的线性独立的线性微分形式。这个纤维丛对于道路微分几何的重要性是显然的。有必要指出：根据定理 6.1，正是这一纤维丛而非 M 的切空间纤维丛在道路几何中起着基本的作用。

从以上对黎曼几何与道路几何的讨论，可以看出等价方法是直接解决几何实在问题的最佳武器。只有通过等价问题的解，才能够决定定义在流形上的最重要的纤维丛。当然可以用多少带有直觉的方法在流形上定义其他纤维丛，但是它们只会起次要的作用。我们还要指出，这种局部等价问题的解决并非总是简单的。例如据作者所知，关于二阶反对称共变张量的等价问题至今还未有明确的解（虽然在理论上这个解总是可能的）。

7. 纤维丛与其底空间之间的关系

以上试图说明，在黎曼几何与道路几何中，几何实在的局部理论如何自然地导致那个联系着定义了该几何实在的流形的纤维丛。这一事实适用于任何几何实在，但其证明需要用到偏微分方程的基本定理，即关于每个偏微分方程系统都可以“延拓”成一个对合系统的定理。我们在此不详细讨论。我们只是指出，这类问题如同任何有关纯粹和应用数学的问题，其一般结论与特定例子提出完全不同的研究课题，前者是关于存在定理，后者则要求显解。在我们的例子中用显式解决了问题，从而保证了解的存在。

在给定的流形 M 上定义了纤维丛 $\mathscr{F}$ 后，下一步就要研究它们之间的关系。在进一步探讨之前，我们先要说明，纤维丛 $\mathscr{F}$ 通过等同得到 M 上新的纤维丛。例如考虑 M 是黎曼流形的情况。令 $Pe_1 \cdots e_n$ 是 M 中的一个标架。对于任何的 p，$1 \leqslant p \leqslant n$，我们要定义一个由所有的标架 $Pe_1 \cdots e_n$ 组成的标架类，使得点 P 和 $e_1 \cdots e_p$ 等同。这些标架类在赋予了自然的拓扑后，就成了 M 上的纤维丛，记为 $\mathscr{F}^{(p)}$。它是 M 上所有由 p 个互相垂直的单位向量组成的有序集形成的纤维丛。特别，$\mathscr{F}^{(1)}$ 是 M 上单位向量，而 $\mathscr{F}^{(n)}$ 是纤维丛本身。为区别起见，我们把 $\mathscr{F}$ 叫做 M 的主纤维丛，而把所有其他通过等同得到的纤维丛叫做相伴纤维丛。我们将始终假设等同只在纤维中进行，因而把相伴丛投射到底空间之上的映射就是由主丛导出的那

个投射。这个过程是非常一般的。

令 $\mathscr{F}$ 是 M 上的主丛，$\mathscr{S}$ 是 M 上的相伴丛。则有投射 $\pi(\mathscr{F})\subset M$ 和投射 $\pi_1(\mathscr{S})\subset M$，从而还有投射 $\pi_2(\mathscr{F})\subset\mathscr{S}$，它通过对 $\mathscr{F}$ 的点指定在等同过程中它所属的类得到。根据上一段最后所说，显然有 $\pi=\pi_1\pi_2$。我们还记得几何实在在 $\mathscr{F}$ 上定义了一组内蕴的线性独立的线性微分形式，其个数等于 $\mathscr{F}$ 的维数。我们的主要目的是要了解这些线性微分形式在 π、π_1 和 π_2 下的行为。

为了更清楚地理解这个关系，我们先离开正题回忆有关组合拓扑的一些基本事实。令 K 是 n 维的有限复形，其单形用 σ_i^r, $0\leqslant r\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant\alpha_r$ 表示。令 R 是一个交换环。一个维数为 r 的链或叫 r-链就是形如

$$(54)\qquad C^r=\sum_{i=1}^{\alpha_r}\lambda_i\sigma_i^r\qquad(\lambda_i\in R)$$

的和。对于链 C^r 我们引入边缘算子 ∂，它是线性的：

$$(55)\qquad \partial(C_1^r+C_2^r)=\partial C_1^r+\partial C_2^r,\quad \partial(\lambda C^r)=\lambda\partial C^r,\quad \lambda\in R,$$

而对单形 σ_i^r 的作用由所谓的关联关系定义：

$$(56)\qquad \partial\sigma_i^r=\sum_{j=1}^{\alpha_{r-1}}\eta_{ij}^{(r)}\sigma_j^{r-1}。$$

关系(55)和(56)完全决定了边缘算子 ∂，而 $r-1$ 维链 ∂C^r 则叫做 C^r 的边缘。容易证明：

$$(57)\qquad \partial\partial C^r=0。$$

边缘为 0 的链叫做闭链。等式(57)表明当一个链是另一个链的边缘时，它是闭链，此时称为约束闭链。所有 r 维的闭链形成一个阿贝尔群，其中的约束闭链构成一个子群。它们的商群叫做 K 的 r-维同调群(以 R 的加群作为系数群)。

r 维上链 γ^r 是 r-链的一个线性函数。我们用记号 $\gamma^r\cdot C^r$ 表示这个函数，从而它有如下性质：

$$(58)\quad \gamma^r\cdot(C_1^r+C_2^r)=\gamma^r\cdot C_1^r+\gamma^r\cdot C_2^r,\qquad \gamma^r\cdot\lambda C^r=\lambda\gamma^r\cdot C^r,\qquad \lambda\in R。$$

由 r 维上链 γ^r，我们通过以下关系

$$(59)\qquad \delta\gamma^r\cdot C^{r+1}=\gamma^r\cdot(\partial C^{r+1}),$$

定义一个 $r+1$ 维上链 $\delta\gamma^r$，叫做该上链的上边缘。由(57)和(59)得到

$$(60)\qquad \delta\delta\gamma^r=0。$$

上边缘为 0 的上链称做闭上链。所有的 r 维闭上链形成一个阿贝尔群，它含有由作为上边缘的闭上链构成的子群。它们的商群被称作 K 的 r-维上同调群。

现在,令 M 是至少二阶可微的微分流形。令 ω 是 M 中 r 阶微分形式,其系数至少二阶可微。如我们在第 3 节中所说,可以在 r-单形上严格定义 ω 的积分,也可以在 r-链上定义 ω 的积分。而且泛函 $\int_{C^r}\omega$ 在 r-链 C^r 上是线性的。因此它定义了一个以实数环为系数环的 r-上链。在不致混淆的情况下,我们将把 ω 当作一个 r-上链。

(13)式的斯托克斯定理可以写成

$$\int_{C^{r+1}}\mathrm{d}\omega = \int_{\partial C^{r+1}}\omega。 \tag{61}$$

比照(59)式可见如果 ω 定义了一个 r-上链,则 $\mathrm{d}\omega$ 就定义了它的上边缘。从而 ω 是闭上链当且仅当 $\mathrm{d}\omega=0$(这时称 ω 是恰当的);以及如果存在形式 θ,使得 $\mathrm{d}\theta=\omega$,则 ω 是一个上边缘(此时称 ω 是导出的)。

德·拉姆证明了这样一个重要定理[22]:对每一 r-上链 γ(具有实数或有理数系数群),存在 r 微分形式 ω,它按上述方法定义了 γ。我们从第 4 节得知,从 M 上的纤维丛得到 M 中的示性闭上链,它们是纤维丛的不变量。只要可以由几何实在局部地构造一个微分形式并用它来定义示性闭上链,就可以得到大范围微分几何的一个定理。

现在假设存在一个把复形 K 映入另一复形 K^* 的单纯映射 f,则 f 诱导出一个把 K 的链映入 K^* 的链的映射 ϕ。由 ϕ 可以定义一个把 K^* 的上链映入 K 的上链的映射 ψ。事实上,如果 γ^* 是 K^* 的 r-维上链,则对 K 的每一单形 σ^r 我们定义 $\psi\gamma^*\cdot\sigma^r=\gamma^*\cdot\phi\sigma^r$。这个反映射 ψ 把 K^* 的闭上链映成 K 的闭上链,并把同一上同调类中的闭上链映入同一上同调类中。从而诱导了一个把 K^* 的各上同调群映入 K 的具有相同维数的上同调群的映射,并且可以证明它是一个同态映射。还可以证明,如果 f 由与它同伦的另一映射代替,则同态不变。结果是,我们可以由一个从多面体 P 到另一多面体 P^* 的连续映射,定义一个从 P^* 的上同调群到 P 的具有相同维数的上同调群的映射。

就我们所感兴趣的 M 上的纤维丛 $\mathscr{F}$ 的情况来说,有一个从 $\mathscr{F}$ 到 M 的映射,即那个投射。我们假设 M 和 $\mathscr{F}$ 都是可微的流形。则由上述可知,这个投射诱导了一个把 M 的上同调群映成 $\mathscr{F}$ 的相同维数的上同调群的映射。特别地,M 上的一个恰当形式被映成 $\mathscr{F}$ 上的恰当形式。

考虑 M 是一个给定了几何实在的微分流形。令 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{S}$ 分别是 M 上的主纤维丛和相伴纤维丛。我们知道有射影 $\pi_2(\mathscr{F})\subset\mathscr{S}$。还存在由 M 中的几何实在定义的线性微分形式。通过这个线性微分形式,可以用格拉斯曼代数和嘉当运算方法构造高阶微分形式。对于这些微分形式,重要的是判定它们是否是 $\mathscr{S}$ 的某一微分形式在由 π_2 诱导的反映射下的像。对这一问题有几个判定标准。我们将给出 M 是黎曼几何情况下的判定标准,但这一过程很容易推广到其他几何实在的

情况。

令 $\mathscr{S} = \mathscr{F}^{(p)}$，并在主纤维丛 $\mathscr{F}$ 中定义形式 ω_i, ω_{ij} 和 Ω_{ij}。令 Π 是用格拉斯曼运算从 ω_i、ω_{ij} 和 Ω_{ij} 构造而得。我们要确定 Π 是否为 $\mathscr{S}$ 中某一形式的像。

为此我们在本段中定义以下指标范围：

$$1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p, \qquad p+1 \leqslant r, s \leqslant n, \qquad 1 \leqslant i, k \leqslant n。$$

令 δ 是使 $Pe_1 \cdots e_p$ 保持不变的算子(不是上边缘)，使得

$$\omega_i(\delta) = 0, \qquad \omega_{ai}(\delta) = 0。 \tag{62}$$

我们还令

$$\omega_{rs}(\delta) = e_{rs}。 \tag{62a}$$

由(24)和(32)得到

$$\begin{aligned} &\delta\omega_\alpha = 0,\ \delta\omega_r = \sum e_{rs}\omega_s,\ \delta\omega_{\alpha\beta} = 0,\ \delta\omega_{\alpha r} = -\sum e_{sr}\omega_{\alpha s}, \\ &\delta\Omega_{\alpha\beta} = 0,\ \delta\Omega_{\alpha r} = \sum e_{rs}\Omega_{\alpha s},\ \delta\Omega_{rs} = \sum(e_{rt}\Omega_{ts} - \Omega_{rt}e_{ts})。 \end{aligned} \tag{63}$$

于是我们得到以下定理：

定理 7.1. *形式 Π 是 $\mathscr{F}^{(p)}$ 中某一微分形式的像，当且仅当 $\delta\Pi = 0$。*

如果我们记 $\mathscr{F}^{(0)} = M$，则定理对于 $p = 0$ 也成立。

如果 $\mathscr{F}$ 中某一形式是 $\mathscr{F}^{(p)}$ 中形式的像，我们就简称它是 $\mathscr{F}^{(p)}$ 的形式。

用我们的判定标准很容易证明以下形式是 M 的形式：

$$\begin{aligned} &\Delta_m = \sum \Omega_{i_1 i_2}\Omega_{i_2 i_3}\cdots\Omega_{i_{2m} i_1}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n/4, \\ &\Delta_0 = \sum \epsilon_{i_1 \cdots i_n}\Omega_{i_1 i_2}\cdots\Omega_{i_{n-1} i_n}, \quad \text{如果 } n \text{ 是偶数}, \end{aligned} \tag{64}$$

这里 $\epsilon_{i_1 \cdots i_m}$ 是克罗内克指标，它根据 $i_1, \cdots, i_n$ 是 $1, \cdots, n$ 的偶置换还是奇置换而取值 $+1$ 或 -1，其他情况下取值 0。

M 的某个恰当形式在 M 中并非是导出的，但它在某一纤维丛中的像是导出的。这种情况具有重要意义。例如(64)中 Δ_0 的在 $\mathscr{F}^{(1)}$ 中的像是导出的。正是基于这一事实，广义高斯-博内定理被简单地证明了[10]。在 4 维黎曼流形上将给出阐明这一思想的进一步的例子。(比较[14])

8. 庞特里亚金定理

庞特里亚金在最近的两篇注记[20,21]中，从拓扑学的观点研究一个与我们有关的问题。我们在此将从稍微更一般的角度介绍他的结果，这使得可以把它推广到复解析埃尔米特流形。

令 E^{n+N} 是 $n+N$ 维的实定向欧几里得空间。我们考虑 E^{n+m} 中由所有过原点的 n 维定向空间形成的格拉斯曼流形 $H(n, N)$。对于 $H(n, N)$ 的每一个子流形 M'，有

一个以自然的方式定义的以 M' 为底空间的球丛,它的纤维是由 M' 中的 n 维超平面截取 E^{n+m} 中过原点的单位超球面所得的球。给定任一流形 M 和映射 $f(M) \subset H(n,N)$,可以定义一个以 M 为底空间的球丛,它在 M 的点 P 上的纤维是取 $f(P)$上的单位超球。通过适当定义球丛的等价,惠特尼与斯廷罗德证明了以下定理[25,33]:

定理 8.1. 对于紧流形 M 上给定的 $n-1$ 维球丛,只要 $\dim(M) \leqslant N$,就存在一个映射 $f(M) \subset H(n,N)$,它所定义的球丛与给定的那个等价。M 上由映射 $f_i(M) \subset H(n,N)$, $i=1,2$, 定义的两个球丛等价,当且仅当 f_1 同伦于 f_2。

通过映射 $f(M) \subset H(n,N)$,可以用反映射把 $H(n,N)$ 的维数不大于 $\dim(M)$ 的闭上链映成 M 的闭上链。定理 8.1 的后一部分断言,如果球丛等价,则 M 的那些作为像的闭上链是上同调的。因此只要诱导出来的球丛保持等价,$H(n,N)$中的上同调类在反映射下的像就独立于映射 f 的选择。M 中的这种上同调类被称为广义示性类。

如果 M 是可微流形,$\mathscr{F}$ 是 M 上的切球丛,则我们可以用这样的方法得到所要的映射 f: 把 M 嵌入欧氏空间 E^{n+N},并把 $f(P)$定义为 $H(n,N)$中平行于 M 在 P 上的切 n-平面的 n-平面。于是 M 带有从 E^{n+N}的欧氏度量导出的黎曼度量。

考虑 E^{n+N} 中的标架 $Pe_1\cdots e_{n+N}$。我们使用以下指标范围

$$1 \leqslant i,k \leqslant n, \qquad n+1 \leqslant r,\ s \leqslant n+N, \qquad 1 \leqslant A,B,C \leqslant n+N,$$

并令

$$\omega_{AB} = \mathrm{d}e_A \cdot e_B。$$

于是我们有

$$\mathrm{d}\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \cdot \omega_{CB}。$$

对 $H(n,N)$中每一个 n-平面,附以标架 $Oe_1\cdots e_n e_{n+1}\cdots e_{n+N}$,使得 $e_1\cdots e_n$ 属于 n-平面。于是 nN 个线性微分形式 $\omega_{\alpha\gamma}$构成了 $H(n,N)$的线性独立形式组。为了表示第 7 节里所讲的积分闭上链,我们定义

$$\Omega_{ik} = -\sum_r \omega_{ir} \cdot \omega_{kr}。 \tag{65}$$

于是有关于正交群向量不变量理论中第一主定理[31]的结果: 每一维数不大于 $H(n,N)$中 n 的积分闭上链都可以表示为(64)式所定义的形式 Δ_m 和 Δ_0的乘积的带常系数的线性组合,其中的 Ω_{ik}在此由(65)式给出。

(65)中的形式 Ω_{ik}是 $H(n,N)$中的形式。但它们由映射 f 诱导的在 M 中的像,则是从由 E^{n+N}传给 M 的黎曼度量导出的曲率形式。事实上,如果我们对 M 中的每一点 P 附以所有的标架 $Pe_1\cdots e_{n+N}$,使得 $e_1,\cdots,e_n$ 是切向量,则在 M 上有

$$\omega_r = 0,$$

以及

(66)
$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \omega_{ki},$$
$$d\omega_{ik} = \sum_j \omega_{ij}\omega_{jk} - \sum_r \omega_{ir}\omega_{kr} = \sum_j \omega_{ij}\omega_{jk} + \Omega_{ik}。$$

由(66)可以看到(65)式中 Ω_{ik}的像是 M 上导出的黎曼度量的曲率形式。

这样,我们就能证明以下的庞特里亚金定理:

定理 8.2. 令 M 是嵌于欧氏空间的可定向紧微分流形并令Ω_{ik}是导出的黎曼度量的曲率形式,则 M 的示性积分上闭链可以表示为这样一个微分形式,它是形式 Δ_m $(0 \leqslant m \leqslant n/4)$ 的乘积的带常系数的线性组合。

如果 Ω_{ik}是M 上内蕴地给出的黎曼度量的曲率形式,则定理 8.2 所断言的关系很有可能仍然是成立的。但是至今为止只对形式 Δ_0的情况以及其他一些情况确认了这一点。如果可以证明黎曼流形可以等距嵌入欧氏空间,就能推出这一结果。不幸的是即使对于 $n = 2$ 的情况,这个嵌入问题也没有解决。

9. 埃尔米特几何

在埃尔米特几何中,我们的结果要令人满意得多。我们所说的埃尔米特流形 M,是指其中定义了以下埃尔米特度量的复解析流形:

(67)
$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(z,\bar{z})(dz_i d\bar{z}_k), \qquad \overline{g_{ik}} = g_{ki},$$

其中 z_i 是局部复坐标,而上面的一横表示取共轭复数的运算。

如同黎曼流形的情况,埃尔米特流形上的主纤维丛是指这样的纤维丛,它的纤维由一组复向量 $e_1,\cdots,e_n$ 构成,使得

(68)
$$e_i \cdot \overline{e_j} = \delta_{ij}。$$

这里的标量积理解为埃尔米特几何意义的。如同黎曼几何,埃尔米特几何的基本公式可以确立为

(69)
$$ds^2 = \sum(\omega_i \overline{\omega_i}),\ d\omega_i = \sum \omega_j \omega_{ji},\ d\omega_{ik} = \sum \omega_{ij}\omega_{jk} + \Omega_{ik},$$

这里

(70)
$$\omega_{ij} + \overline{\omega_{ji}} = 0,\ \Omega_{ij} + \overline{\Omega_{ji}} = 0,\ \Omega_{ij} = \sum_{k,l} R_{ij,kl}\,\omega_k \overline{\omega_l}。$$

由 Ω_{ij},我们构造微分形式

(71)
$$\Delta_m = \sum_{i_1,\cdots,i_m} \Omega_{i_1 i_2}\Omega_{i_2 i_3}\cdots\Omega_{i_m i_1}, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n,$$

以及微分形式

$$\Psi_m = \sum \delta(i_1, \cdots, i_m; j_1, \cdots, j_m) \Omega_{i_1 j_1} \cdots \Omega_{i_m j_m}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{72}$$

这里 $\delta(i_1, \cdots, i_m; j_1, \cdots, j_m)$ 是克罗内克符号，它根据 $j_1, \cdots, j_m$ 是 $i_1, \cdots, i_m$ 的偶置换还是奇置换取值 +1 或 -1，其他情况下为 0；这里的取和是针对从 1 到 n 的所有的 $i_1, \cdots, i_m$。易见每个 Ψ_m 都可以表示为 $\Delta_1, \cdots, \Delta_m$ 的常系数多项式，反之亦然。

在紧埃尔米特流形 M 上，我们可以构造纤维丛 $\mathscr{F}^{(p)}$，使得 M 中 P 点上的纤维由有序向量组 $e_1, \cdots, e_p$ 构成，并满足以下关系

$$e_i \cdot \overline{e_j} = \delta_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant p。 \tag{73}$$

这样我们能够证明以下定理：

定理 9.1. *M 中 $\mathscr{F}^{(p)}$ 的（第 4 节所指的）示性闭上链具有维数 $2n-2p+2$，可以由形式 Ψ_{n-p+1} 确定到只相差一个常数因子。*

这些示性闭上链共有 n 个（对应于数值 $p = 1, \cdots, n$）。我们称它们为基本示性闭上链。另一方面，第 8 节中的嵌入过程可以用于当前情况，从而得到 M 上的（斯廷罗德意义下）等价纤维丛之间的对应和把 M 映入 $H(n, N, C)$ 映射的同伦类，这里 $H(n, N, C)$ 是由 $n+N$ 维（复）欧氏空间中所有过原点的 n 维复线性空间组成的格拉斯曼流形。这就允许我们把广义示性上同调类定义为 $H(n, N, C)$ 中维数不大于 $2n$ 的上同调类的逆像。但是在复的情况下，关于酉群的向量不变量的第一主定理比关于正交群的相应定理更简单：

定理 9.2. *$H(n, N, C)$ 的每一维数不大于 $2n$ 的上同调群可以通过上同调环运算从 n 个基本类得到，这里指的是逆像为 M 的基本示性类的那些类。*

就是在这样的意义下我们可以说，在复解析埃尔米特流形中，从主纤维丛产生的示性类完全由埃尔米特度量确定。我们还要指出，复解析埃尔米特流形在代数几何与多复变解析函数理论中起着重要的作用。

本节中所宣布的结果的证明，将在他处发表。

10. 积分几何中主运动式

在上一节中我们讨论了局部微分几何性质与拓扑之间的关系。然而在大范围几何中还有其他性质也很令人感兴趣，并且与上面阐明的概念有密切关系。它们同样表明纤维丛在几何实在理论中的重要作用。

令 M 是 n 维黎曼流形，$\mathscr{F}$ 为其主纤维丛。我们已在 $n(n+1)/2$ 维空间 $\mathscr{F}$ 中定义了形式 ω_i, ω_{ij}，则 $n(n+1)/2$ 阶微分形式

$$\mathfrak{P} = \prod \omega_i \cdot \prod_{i<k} \omega_{ik} \tag{74}$$

可以当作 $\mathscr{F}$ 中的体积元素。如果 M 是 n 维欧氏空间，$\mathfrak{P}$ 就叫做运动密度，这是庞

加莱首次对 $n=2$ 的情况引进的。

为了说明运动密度在几何问题中的应用,设 M 是 n 维欧氏空间,则 $\mathscr{F}$ 是 M 中的标架空间并且是个拓扑积。考虑 M 中两个至少二阶可微的闭曲面 S_1、S_2。对每一 S_i,令 $r_1^{(i)},\cdots,r_{n-1}^{(i)}$是主曲率,并令

$$(75)\qquad \frac{1}{C_{n-1,k}}\int_{S_i}\sum r_i^{(i)}\cdots r_k^{(i)}\mathrm{d}O_i = H_k^{(i)},\quad i=1,2;k=0,\cdots,n-1,$$

这里被积函数是主曲率的 k 次基本对称函数,$\mathrm{d}O_i$ 是 S_i 的面积元素。令 $V^{(i)}$ 表示 M 中 S_i 所围体积。令 S_1 固定,而令 S_2 取所有可能位置。对于 S_2 的每一位置,用 $\chi(S_1\cdot S_2)$表示 S_1 与 S_2 之交的欧拉-庞加莱示性数,则我们有以下所谓主运动式:

$$(76)\qquad \int_{S_2}\chi(S_1\cdot S_2)\text{ሦ} = J_n\left\{H_{n-1}^{(1)}V^{(2)} + V^{(1)}H_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}C_{n,k+1}H_k^{(1)}H_{n-2-k}^{(2)}\right\},$$

这里 J_n 是 M 中一点的运动测度,由下式给出

$$(76a)\qquad J_n = O_{n-1}O_{n-2}\cdots O_1,$$

O_{p-1}是 p 维欧氏空间中单位球面的面积。

布拉施克对于 $n=2,3$ 证明了(76)式[2],严志达和本文作者对于一般的 n 给出了证明[13]。该式有许多令人感兴趣的推论。特别地,当 $n=2$ 以及 S_1 和 S_2 都是凸曲线时,它就成为

$$(77)\qquad \int_{S_1\cdot S_2\neq 0}\text{ሦ} = 2\pi(A_1+A_2)+L_1L_2,$$

这里 A_i 是 S_i 所围面积,L_i 是 S_i 的长度,$i=1,2$。(77)首先由桑塔洛(Santalo)得到。它可以用来导出等周不等式(2)的加强式。这样,我们正是从关于微分几何和拓扑学的完全间接的讨论,得到了纤维丛理论与本文开始所给出的等周不等式的联系。

参 考 文 献

[1] Allendoerfer C B and Weil A. *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*. Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **53**: 101 ~ 129

[2] Blaschke W. *Vorlesungen über Integralgeometrie*. Part 1, 2d ed., Leipzig, 1936; Part 2, Leipzig, 1937

[3] Cartan E. *Les sousgroupes des groupes continus de transformations*. Ann. École Norm. (3), 1908, **25**: 57 ~ 194

[4] Cartan E. *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du*

repère mobile. Paris, 1937

[5] Cartan E. *Leçons sur les invariants intégraux*. Paris, 1922

[6] Cartan E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*. Ann, École Norm. (3), 1923,**40**: 325 ~ 412; 1924,**41**: 1 ~ 25;1925,**42**: 17 ~ 88

[7] Cartan E. *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé*. Bull. Soc. Math. France, 1896,**24**: 140 ~ 177

[8] Cartan E. *Sur les variétés à connexion projective*. Bull. Soc. Math. France, 1924,**52**: 205 ~ 241

[9] Cartan E. *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces*. Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 1929,**8**: 181 ~ 225

[10] Chern S. *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*. Ann. of Math., 1944,**45**: 747 ~ 752

[11] Chern S. *Integral formulas for the characteristic classes of sphere bundles*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1944,**30**: 269 ~ 273

[12] Chern S. *A generalization of the projective geometry of linear spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1943,**29**:38 ~ 43

[13] Chern S and Yien C T. *Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni*. Bollettino della Unione Matematica Italiana (2), 1940,**2**: 432 ~ 437

[14] Chern S. *On Riemannian manifolds of four dimensions*. Bull. Amer. Math. Soc., 1945,**51**: 964 ~ 971

[15] Ehresmann C. *Sur la topologie de certains espaces homogènes*. Ann. of Math., 1934,**35**: 396 ~ 443

[16] Ehresmann C. Various notes on fibre spaces. C.R. Acad. Sci. Paris, 1941,**213**: 762 ~ 764;1942, **214**: 144 ~ 147;1943,**216**: 628 ~ 630

[17] Ehresmann C and Feldbau J. *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés*. C.R.Acad. Sci. Paris, 1941,**212**: 945 ~ 948

[18] Feldbau J. See Ehresmann C

[19] Paris Seminar, *Notes on Elie Cartan's scientific work*. Paris, 1936

[20] Pontrjagin L. *Characteristic cycles on manifolds*. C.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR N.S., 1942,**35**: 34 ~ 37

[21] Pontrjagin L. *On some topologic invariants of Riemannian manifolds*. C.R.(Doklady) Acad. Sci. USSR N.S., 1944,**43**: 91 ~ 94

[22] de Rham G. *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions*. J. Math. Pures Appl., 1931,**10**: 115 ~ 200

[23] Santalò L A. *Sobre la medida cinematica en el plano*. Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ., 1935, **11**: 222 ~ 236

[24] Steenrod N. *Topological methods for the construction of tensor functions*. Ann. of Math., 1942,**43**: 116 ~ 131

[25] Steenrod N. *The classification of sphere bundles*. Ann. of Math., 1944,**45**: 294 ~ 311

[26] Stiefel E. *Richtungsfelder und fernparallelismus in n-dimensionalen mannigfaltigkeiten*. Comment. Math. Helv., 1936,**8**: 305 ~ 343

[27] Thomas T Y and Veblen O. *The geometry of paths*. Trans. Amer. Math. Soc., 1923,**25**: 551 ~ 608

[28] Veblen O.See Thomas T Y

[29] Veblen O and Whitehead J H C. *Foundations of differential geometry*. Cambridge, 1932

[30] Weil A. See Allendoerfer C B

[31] Weyl H. *The classical groups*. Princeton, 1939

[32] Whitehead J H C. See Veblen O

[33] Whitney H. *Topological properties of differentiable manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc., 1937, **43**: 785 ~ 805
[34] Whitney H. *On the topology of differentiable manifolds*, *Lectures in topology*. Michigan, 1941: 101 ~ 141
[35] Yien C T. See Chern S

附: H. 霍普夫关于《大范围微分几何若干新观点》的评论*

此篇演讲(作于 1945 年 9 月)表明,大范围微分几何的新时代开始了。这个新时代以纤维丛的拓扑理论与嘉当微分方法的综合为特征。

提纲挈领的开场白(第 1 节)后,作者简明扼要地介绍了格拉斯曼代数(第 2 节)、嘉当微分方法(第 3 节)、纤维丛(第 4 节)和黎曼几何(第 5 节)。第 5 节中,嘉当方法被置于中心地位;这里研究了带有纤维丛 $\mathscr{F}$ 的黎曼流形 M,$\mathscr{F}$ 由所有的单位向量的正交 n-标架形成;熟知的形式 ω_i, ω_{ij} 被作为 $\mathscr{F}$ 中的形式来解释。

紧接着的一节(第 6 节)通过"形式问题"(即这样的问题: 何时形式 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 与 $g^*_{ij}\mathrm{d}x^{*i}\mathrm{d}x^{*j}$ 定义了等距的黎曼度量)表明, 引入纤维丛(这里的纤维丛是正交群丛)是自然的和必要的, 甚至对于"小范围"微分几何也是如此。类似的过程不仅适用于黎曼几何, 也适用于其他的几何理论; 这通过道路几何的例子得以说明。

第 7 节论述底流形 M 与纤维丛 $\mathscr{F}$ 之间的关系,与 $\mathscr{F}$ "相伴"着纤维丛 $\mathscr{F}^{(p)}$,它由 M 上所有 p 个正交单位向量组形成, $M = \mathscr{F}^{(0)}$。特别地,(应用德·拉姆定理,从而可以把微分形式等同于闭上链)讨论了通过 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}^{(p)}$ 的自然投射而引入的两者的微分形式之间的关系。此外,这一研究对于理解艾伦多弗-韦伊-陈对高斯-博内公式的推广是很重要的。

第8 节讨论一条真正的"大范围微分几何"的定理,即以下的庞特里亚金定理: 对于欧氏空间 E^{n+N} 中的闭 M^n(此时 M^n 带有 E^{n+N} 赋予的度量),可以用 M^n 的所谓"曲率形式"的积分来表达它的(斯蒂弗尔与斯廷罗德意义下的)(整系数)示性上同调类。在此利用了 M^n 在(由过 E^{n+N} 中一点的所有 n 维平面形成的)格拉斯曼空间中的像,这是高斯的球像概念的推广。这些像之间的关系由惠特尼-斯廷罗德定理表明,这把任一 M 上的球丛与 M 在格拉斯曼流形中的像联系起来了。

用埃尔米特流形来代替任意的黎曼流形(第 9 节),则由于种种理由使这时的情况较第 8 节中的更简单。特别是类似的庞特里亚金定理在去掉了 M 由它所在的欧氏空间赋予度量这一先决条件后仍然有效。

* 发表于《Mathematical Reviews》第 9 卷 101 页,1948 年。

最后一节(第10节)简短地指明,这里所讲到的方法不仅对于研究微分几何性质与拓扑的关系,而且对于研究其他“大范围”的几何性质也是很有价值的。这通过积分几何中的“运动密度”和所谓的主运动式的例子得以说明。从这个例子可以看到,经典的平面上的等周不等式与微分形式以及纤维丛有关。

54. 什么是拓扑学

原载《科学》第 29 卷第 3 期，上海，1947 年。

1. 绪言

近代纯粹数学的两大柱石，是拓扑学（Topology）与抽象代数。何以这两方面是数学的基础呢？这问题并不容易答复，姑举以下要点来说明：

第一，所谓近代数学的特征，是研究范围的扩大。数学研究的主要对象，不外为数与图形的性质，在数的观念的发展中，自然数与命分数当然最早。但古代希腊人的数学，例如欧几里得的几何原本，即有极完全的非命分数论。此后因方程式的研究而有虚数，因理论力学的发展而有四元（或矢量代数），因量子力学的应用而有其他种类的复数。系统既然增加，就有必要区别其异同，而加以整个的讨论。这是抽象代数的缘起。至于就图形论，古代希腊人所研究的是直线、圆周与其他简单曲线。但近代研究的范围，则是极广义的图形。所研究的图形未必是曲线或曲面；如是曲线，亦未必有切线。仔细想来，则何谓曲线，就并不是容易答复的问题。这些基本概念的澄清和由此引出的结论，都是拓扑学研究的对象。

第二，从基本上说，每一种数学研究的对象，都是一个集合和集合中的元在某种运算下的性质。因运算的种类不同，所得性质亦异。试取实数为例。加法与乘法都是运算，通常称为代数的运算。但如取一组实数 A，而命 $\bar{A}$ 为一切实数，可为 A 中实数的极限者，则由 A 到 $\bar{A}$ 也是一种运算，称为拓扑运算。在此例中，拓扑运算包含极限观念，因此拓扑学包含了若干分析中的基本定理。集合中同时有代数的与拓扑的运算者，在应用上很重要，在研究上至有兴趣。最简单的例是所谓拓扑群。拓扑群的理论，近来极受一般人的注意。

第三，在十八、十九两世纪中，复变函数论、微分方程式论、变分学、与代数几何学等，都有很大的进步。但从近代观点而论，这些科目中必须参加拓扑学的观念与方法，才能给人以深刻的认识。最近重要的贡献，如 Ahlfors 之于复变函数论，Poincare、Birkhoff、Leray、Schauder 之于微分方程式论，Morse、Douglas、Lusternik、Schnirelmann 之于变分学，Lefschetz、van der Waerden、Hodge 之于代数几何学，都是基于拓扑学观念的引进。

拓扑学内容甚广，其概念非短文所可说明。本文不作系统的叙述，只随意选择

若干较重要的问题,加以讨论。

2. 尤拉公式

第一本关于拓扑学的书,是 Listing 的 Vorstudien zur Topologie,于 1847 年出版,距今将近百年。但在此书出版以前,关于拓扑学的零碎结果,已有若干。最重要的是所谓尤拉公式(Euler's Formula)。尤拉公式的对象,是一个简单多面体。命 v、e、s 依次为该多面体的顶点数、边数与面数,则该公式是

$$v - e + s = 2。\tag{1}$$

这公式在初等几何学书中,就有证明。以下的证明中,包含极简单而有用的观念。

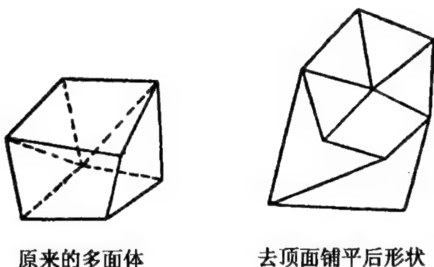
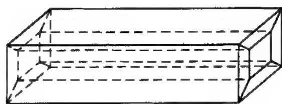


图 1

我们去掉所论多面体的一面,而将剩余部分铺在平面上(图 1)。在铺平的时候,不妨准许边与面的形状有变更,但其数目与其相互的关系不变。这手续显然不影响尤拉公式的准确性,亦显然可能。

铺平后在平面上所得是一个多边形,和其中的一个网。这个网的顶点数、边数与面数,依次是 $v' = v, e' = e$,与 $s' = s - 1$。如去掉网内一边,则或者 e' 与 s' 各减少一,或者 v' 与 e' 各减少一,每次 $v' - e' + s'$ 都不变。但连续应用这手续后,最后所得是一个简单多边形,他的顶点数等于边数,而他的面数是一。所以 $v' - e' + s' = 1$,而尤拉公式由此证明。

在公式(1)中我们假定所论多面体是简单的。去了这个假设,这公式显然不确。图 2 的多面体就是一例。


$v = 16,\ e = 32,\ s = 16$
$v - e + s = 0$。
图 2

要推广尤拉公式到非简单的多面体,拓扑学的观念就很重要了。拓扑学中的主要观念是拓扑变换。我们不必对拓扑变换给一个严格的定义,只说这是一个一一的绵续的变换。要想像这种变换,可假定曲面是用橡皮做成的。任意一个把橡皮拉长或缩短的变换,只要不把橡皮拉破,就是拓扑变换。两个图形可用拓扑变

换互相变换者,称为相拓的。根据这个定义,球面与椭圆面是相拓的,球面与立方体的面是相拓的,图2所示多面体与环面亦是相拓的。实际上我们有以下的普通定理:

三维空间内两面的曲面可用拓扑变换变成球面上装 p 个环的法式。

定理中所谓两面的意义,下节当再说明,所谓球面上装环的曲面,可看图3自明。

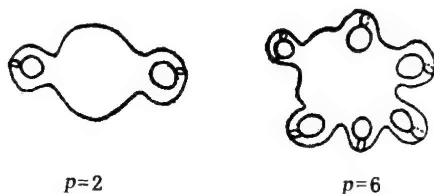


图3

法式中的环数 p 叫做曲面的类(genus)。上面所述的定理,其实不难证明。比较难证明的,还是底下的定理:

两个相拓的曲面,其类相等。

换句话说,类这个整数,经过拓扑变换后不变。研究拓扑学的一个主要目的,是要求拓扑变换下的不变式。类就是第一个重要的例子。

根据上面的讨论,设多面体的类是 p,而他的顶点数、边数与面数依次是 v、e、s。则推广后的尤拉公式表示这四个数间的关系,而是下面的形状:

$$v - e + s = 2 - 2p。 \tag{2}$$

要证明这个公式,先将每个环切开,而在所截面的两端,各装上一面(图4)。如此则所装的面数是 $2p$。经此手续后所得多面体的类是零,而公式(1)适用。应用公式(1)可得

$$v - e + (s + 2p) = 2,$$

即为公式(2)。

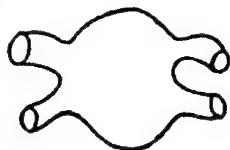


图4

3. 单面曲面

所谓曲面是两面的,指以下的性质:曲面有正反两面。自面上正面(或反面)一点如用曲线连至反面(或正面)一点,则该曲线或需穿过曲面,或需与曲面的界线相交。

由普通常识往往会觉得三维空间内的曲面都是两面的。例如球面、柱面等都如此。但这观念是错误的。空间内实在有许多不能分正反面的曲面。最早发现这事实的是德国几何学家 Mobius.

Mobius所造的单面曲面,称为Mobius条,其作法至为简单。我们取长方形*ABCD*,如图5,而将*AD*边与*CB*边依图中方向黏在一起。所得曲面就是Mobius条,以曲线*ABDC*为界线。读者试用纸条造此曲面,不难发现从面上一点可用曲线连至其反面的点,而不穿过曲面的界线。

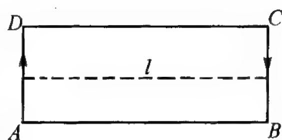
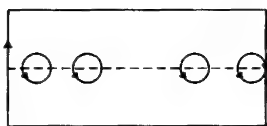


图5

读者试将此曲面沿正中的线 l 剪断,即可得一新的曲面。若更将该新曲面同样沿正中的线剪断,可再得有趣的结果。

与曲面单双面的性质有密切关系而并不完全相当的性质,是所谓定向性(Orientation)。在曲面上一点有两个钟表方向,或顺或逆。试确定其中一个,则用绵续性,该钟表方向可移至面上邻近的点。将该钟表方向沿一封闭的曲线推展,而回到原点,则在原点所得的钟表方向,有时可与原来的相反。曲面有此性质者,称为不定向的。若在曲面上一点确定钟表方向后,无论沿何曲线推展,反至原点,结果恒得原来的钟表方向者,该曲面称为定向的。通常几何学中所论曲面大多是定向的。不定向的曲面中,Mobius条即是一例(图6)。如果世界在一不定向的曲面上,有时走了一圈回来。书上字母的次序可以完全相反。


图6

Mobius条是一个有界线的不定向的单面曲面。封闭的曲面中,有以后两性质者,最简单的是Klein壶,他的作法如次:取长方形*ABCD*(图7)。先将*AD*与*BC*两边按图中方向黏住,得一柱面。再黏住*AB*与*CD*二边。所得封闭的曲面称为Klein壶。这曲面在空间有一自交的曲线。我们不难证明:这曲面是单面的与不定向的。

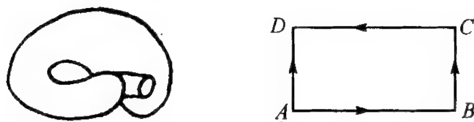


图7

4. 四色问题

拓扑学中一个浅近而至今未曾解决的问题,是所谓四色问题。这问题的兴趣由于他的困难,其重要性实不及许多其他未决的基本问题。

在地图上着色,习惯常将两个有一边相共的区域涂上不同的颜色。由经验得知,无论地图如何复杂,恒可用四种颜色将一切区域着色,使合于相邻区域获得不同颜色的条件。数学家中最早建议证明此定理的,有Mobius(1840)、De Morgan(1850)、Cayley(1878)等。但经过百余年的时间,这定理的确否,仍未能断定。

要讨论四色问题,我们首先观察:平面上的四色问题与球面上的四色问题,是

相当的。假设平面上的地图都可用四种颜色着色,使相邻区域获得不同的颜色。则对于球面上的任一地图,我们可取出一个区域;而将所剩的区域铺平在平面上(如证明尤拉公式时的办法)。在铺平的手续中,区域的形状可以变化,但其相互位置不变。铺平以后所得地图如一大洲,而取出的区域则如海洋。依假设,此平面上的地图可用四种颜色着色,故原来球面上的图亦可,反之,用同样方法,可以证明,如球面上的四色问题解决,则平面上的亦然。

经此段讨论后,我们可先将问题推广,假设地图系画在一个 p 类的两面曲面上。命 $n(p)$ 为有以下性质的最小的数:曲面上的任意地图,可用 $n(p)$ 个颜色着色,使相邻区域获得不同的颜色。此定义并不保证 $n(p)$ 必为有限的。四色问题的推测,为 $n(0) = 4$。

关于地图着色问题,我们要证次之定理:

命 m 为一整数,合于次之条件:对于任意整数 $s > m$,有不等式

$$ms > 6(s + 2p - 2)。$$

如这样的整数 m 存在(我们易证其为存在),则 p 类的两面曲面上的任意地图,都可用 m 个颜色着色,使相邻区域获得不同的颜色。

要证此定理,假设地图中的顶点数、边数与面数,依次是 v、e、s。若 $s \leqslant m$,此定理显然为真。我们因此应用数学归纳法,假设此定理对于面数小于 s 的地图,业已证明。

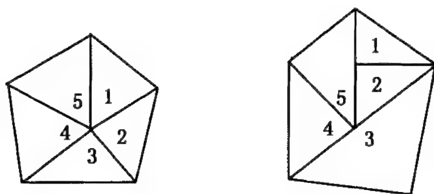


图 8

我们首先将地图约略改变(图 8),使在每个顶点,只有三面。这手续显然不影响曲面的类,地图的面数,和用来着图的颜色的数目。但顶点数与边数,或有改变。该二数我们仍用 v 与 e 表示。如经每顶点恰有三边,则图中边数是 $\frac{3}{2}v$。因此有 $3v = 2e$,而

$$6(s + 2p - 2) = 6(e - v) = 6e - 4e = 2e。$$

由是得 $ms > 2e$。由此不等式可知地图上必有一个区域,其边数小于 m。因否则即谓每区域至少有 m 个边,而总边数至少是 ms;但这样把每边算了两次,遂得 $ms \leqslant 2e$,与上之不等式不合。

设 D 为边数小于 m 的区域。将 D 缩成一点,曲面的类数不变。但所得地图,

其面数是 $s-1$。依假设此地图可用 m 个颜色着色。故原来地图将区域 D 除去后也可用 m 个颜色着色。但 D 至多只与 $m-1$ 个区域相邻,故必有一个颜色存在,可以着 D。因此证明以上的定理。

我们现在设法求最小的整数 m,合于定理中的条件者。先将不等式写作

$$m > 6\left(1+\frac{2p-2}{s}\right)。$$

若 $p=0$,则 $m=6$;若 $p=1$,则 $m=7$;若 $p=2$,则不等式右端随 s 之增加而减少,其最大值相当于 $s=m+1$。故 m 适合不等式

$$m > 6\left(1+\frac{2p-2}{m+1}\right)$$

或

$$m^2-5m > 12p-6。$$

命〔x〕代表小于 x 的最大的整数。则合于以上不等式的 m 是

$$m=\left[\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{48p+1}\right],$$

当 $1 \leqslant p \leqslant 6$ 时,m 的值可列如下表:

p	1	2	3	4	5	6
m	7	8	9	10	11	12

假设 $1 \leqslant p \leqslant 6$,而命 m 表上表中相当的数。则以上定理谓任何地图可用 m 个颜色着色,即 $n(p) \leqslant m$。同时我们不难于相当的曲面上,作一地图,不能用少于 m 个颜色着色。故 $n(p)=m, 1 \leqslant p \leqslant 6$。换言之,对于类等于一至六的两面曲面,地图问题业已完全解决。

很奇怪的事,是对于零类的曲面,即球面,以上定理只说 $n(0) \leqslant 6$,但推测为 $n(0)=4$。这有名的"四色问题"仍旧是数学上的难题之一。

5. 维的理论

几何学中一个基本的概念,是几何图形的维(dimension)。这问题初看似很简单。例如,点是零维的,直线或曲线是一维的,平面或曲面是二维的,空间是三维的。但我们如取直线上坐标为命分数的一切点,或坐标是非命分数的一切点,他们的维是多少,就不易断定。如取更为复杂的点集,则确定他们的维数,可成极难的问题。

任何有意义的维的定义,总要使直线的维是一,平面的维是二。如细想何以直线的维是一,首先想得到的理由,必因直线上的点,可用一个坐标来确定。但这问题并不如此简单。实际上 Cantor 曾证明下面的定理:

单位线段上的点与单位正方形上的点间，可建立一个一一的对应关系。

这个奇怪的结果的证明，非常简单，可约略说明如下：我们将单位线段上的点用坐标 t 确定，$0 \leqslant t \leqslant 1$。而将单位正方形上的点用坐标 x、y 确定，$0 \leqslant x, y \leqslant 1$。每个坐标（$t$ 或 x 或 y）可展成小数如次：

$$t = 0.a_1a_2a_3\cdots, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant 9, \quad k = 1,2,\cdots。$$

要使这个小数的表示法能完全确定，我们假设每个有尽的小数都写成无尽小数，其末尾数字全为9（例如 $1 = 0.999\cdots$，$0.21 = 0.20999\cdots$）。经此了解，我们更将每小数分段，每段包含一串零及最后一个不等于零的数字。假设经分段以后坐标 t、x、y 写成下面的形状：

$$t = 0.A_1A_2A_3\cdots,$$
$$x = 0.B_1B_2B_3\cdots,$$
$$y = 0.C_1C_2C_3\cdots,$$

式中每个大写字母表示一段。用此表示法线段与正方形间的对应关系如次：线段上点 t 在正方形上的对应点是

$$x = 0.A_1A_3A_5\cdots,$$
$$y = 0.A_2A_4A_6\cdots;$$

正方形上点 (x, y) 在线段上的对应点是

$$t = 0.B_1C_1B_2C_2\cdots。$$

这样确定的对应关系显然是一一的，因此证明以上 Cantor 的定理。

如果我们坚持线段的维是一，正方形的维是二，则 Cantor 定理表示维在一一的变换下，可以改变。

以上的一一变换自然毁坏线段与正方形的绵续性。换言之，该项变换并非绵续的。如果我们限于绵续的变换，图形的维能否改变？

关于这个问题 Peano 有重要的贡献。Peano 证明下面的定理：

有一绵续的（但非一一的）点变换存在，将单位线段变至单位正方形。

由于 Peano 的贡献，单位线段的任何绵续图影（map）叫做 Peano 曲线。但我们须要注意：Peano 曲线与通常观念下的曲线，可以迥然不同。例如，以上的定理就说单位正方形是一个 Peano 曲线。

要证明上面的定理，我们把线段分为四等份，而依其由左至右的次序，用 I_1、I_2、I_3、I_4 表示。更将每个分线段分为四等份，如此一直分下去。每将线段分一次后所得的四个分线段，我们按由左至右的次序，用新的下标 1、2、3、4 表示。例如，倘原来分线段是 I_{pqrs}，则四个小分线段是 I_{pqrs1}、I_{pqrs2}、I_{pqrs3}、I_{pqrs4}。如果线段上每点

P 可写成一串线段的极限点,如下状:

$$I_p > I_{pq} > I_{pqr} > \cdots,\ p,q,r,\cdots = 1,2,3,4, \tag{3}$$

式中的符号 > 表示"包含"。

用同样方法我们可将单位正方形分成四个相等的小正方形,而继续的分下去,如图所示(图 9)。这样正方形中一点 P^* 也可写成一串正方形的极限点,如:

$$S_p > S_{pq} > S_{pqr} > \cdots,\ p,q,r,\cdots = 1,2,3,4。 \tag{4}$$

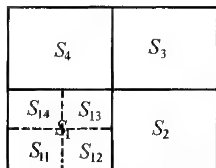


图 9

这样的表示 P 与 P^* 的方法,并不完全确定,即同一点可以写作两不同串的极限点。例如

$$I_2 > I_{24} > I_{244} > I_{2444} > \cdots$$
$$I_3 > I_{31} > I_{311} > I_{3111} > \cdots$$

就有同一极限点。但我们不难证明:如线段上两串(3)有同一极限点,则用相同两组下标所得的两串(4)也有同一极限点。所以我们可叫串(4)的极限点做串(3)的极限点的对应点。所得是一个变换,把单位线段变为单位正方形。

这个变换可以证明是绵续的,因此证明以上的定理。但是这变换并不是一一的,即线段上不同的点,可以变成正方形中同一点。

总结以上的结果,我们证明:在一一(而不绵续)的变换下,和在绵续(而不一一)的变换下,单位线段与单位正方形都可互相变换。

一一而又绵续的变换,叫做拓扑变换。在拓扑变换下,单位线段与单位正方形是否可以互相变换?

这问题的答案是"不可"。理由是这样的:假设有拓扑变换 t 存在,把单位线段,变为单位正方形,命 M 为线段的中点,$t(M)$ 为 M 在正方形中的对应点。M 把线段分为两部分。但无论 $t(M)$ 的位置若何,$t(M)$ 并不把正方形分成两部分。所以这样的变换不能存在。

这证明并不严格。要得严格的证明,须要确定所谓"部分"的意义。但上面所说,确是证明的基本事实。

在高度空间中以上定理的推广,可以述成下状:命 E_m 表示 m 维欧几里得空间内的单位立方体(即若空间的坐标是 $x_1,\cdots,x_m$,单位立方体中的点,合于条件 $0 \leqslant x_k \leqslant 1, k = 1,\cdots,m$)。则当 $m \neq n$,没有拓扑变换存在,把 E_m 变为 E_n。

有了这个定理,维的理论才算奠定了基础。但这个定理的证明很困难,经过了极长时间才获成功。第一个证明这个定理是荷兰数学家 Brouwer。

6. 定点定理

设在一定的空间内施行绵续的变换。我们的问题是有没有点存在,他的对应

点是他自己？这样的点叫做定点。

绵续的变换未必有定点。坐标为 x、y 的欧几里得平面上的移动，即是一例。但 Brouwer 曾证明下面的定理：

n 维欧氏空间内单位立方体 E_n 中的任何绵续变换，必有一个定点。

这个有名的定点定理，引起了晚近无数的研究工作。我们首先说明，这定理如果真确，则当 E_n 经过一拓扑变换后，仍是真确。所以我们可把定理中的立方体，换为单位球体。若空间的坐标是 $x_1,\cdots,x_n$，则单位球体中的点是适合以下不等式的一切点：

$$x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1。$$

我们要指示 $n=2$ 时这定理的一个证明，其程序大约如次：假设有一绵续变换存在，把平面上单位圆盘（即圆上和圆内）的点，变为单位圆盘的点，并假设每点的对应点都不是他自己。我们要证明这是不可能。

根据后一假设，我们可将圆盘上每点用一矢量连到他的对应点，这矢量永不等于零。我们讨论圆盘上以圆心为心的一族同心圆。当一点沿族中一个圆周移动时，把这点连到对应点的矢量也跟着转动。如这点顺钟表方向完成一周，则该矢量亦作若干周。假设此周数为 p，其符号或正或负，视所作周数系顺钟表方向或逆钟表方向而定。命 r 表示该同心圆周的半径 $(0\leqslant r\leqslant 1)$，则 p 为 r 的函数。这函数显然是绵续的，又是整数。所以必然是常数。但当 $r=0$ 时，同心圆周只有一点，其矢量所作周数是零。所以 $p=0$。因此得知，当一点沿单位圆周绕行一圈后，该点矢量所作的圈数是零。

要确定单位圆周上一点 P，可自圆心 O 作一固定的半径，而连接半径 OP（图 10）。命此两半径间的角度为 φ，$0\leqslant\varphi<2\pi$，则 P 的位置可用角度 φ 确定。

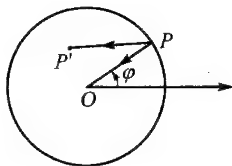


图 10

现在设 P' 为 P 的对应点，ω 为 PO 与 PP' 间的角度。则 ω 是 φ 的绵续函数。这函数并适合不等式 $0\leqslant\omega<\frac{\pi}{2}$，命 t 为 0 与 1 间之一实变数。经过 P 作矢量 $\vec{v}(t)$，与矢量 $\overrightarrow{PO}$ 成角度 $t\omega$。对于每个的 t 值，$0\leqslant t\leqslant 1$，圆周上每点有一矢量 $\vec{v}(t)$，当 P 点顺钟表方向作圆周一圈，矢量 $\vec{v}(t)$ 作 $p(t)$ 圈。但 $p(t)$ 为 t 的绵续函数，且是整数，故必然是常数。在 $t=0$ 时，放在 P 点的矢量就是半径矢量 $\overrightarrow{PO}$。在此情形 $p(0)=1$。所以 $p(t)=1$，这结果与以上所说 $p=0$ 相冲突。因此证明了 $n=2$ 时的 Brouwer 定点定理。

我们要指出，以上证明中，后段的方法，叫做 deformation，是拓扑学中一个重要的方法。

Brouwer 定点定理是这类定理中最简单的一个。拓扑学的研究，因此定理而兴

起了无数波澜。

这类发展中最重要的结果，似乎是在分析和几何问题上的应用。我们姑举下面的问题为例：

线段 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的全体绵续函数 $f(x)$ 组成一个空间，通常叫做函数空间。试察下状的积分方程式

$$y(x) = \lambda\int_0^1 F(x, y(x))\mathrm{d}x + A(x),$$

其中 F、A 都是已知的函数，λ 是常数，$y(x)$ 是未知函数。这样的积分方程式叫做 Fredholm 式的积分方程式。如把方程式左端的函数 $y(x)$ 换为 $z(x)$，即确定函数空间的一个变换 T，把函数 $y(x)$ 变为 $z(x)$。而该积分方程式的解即相当于变换 T 的一定点，说积分方程式有解，就等于说 T 有定点。Birkhoff 与 Kellogg 证明在某种条件下，变换 T 有定点。

Birkhoff 与 Kellogg 所证的定理，远比上述者为广。同样的把拓扑学应用到微分方程式的存在问题，Leray 与 Schauder 也有很重要的贡献。

函数空间的观念，是近代数学的一重要认识。近代数学的一特征，为推广研究的范围。例如，要研究一个函数，就先讨论全体函数所成的空间。要研究一个曲线，就先讨论全体曲线所成的空间。然后看平常空间中什么性质在这样广义的空间定义下仍得保存，再看所论的函数或曲线在空间中的特殊位置。

要说明这个观点，以上所论 Birkhoff－Kellogg 定理已是一例。但我们可再举 Morse 的 critical points 理论为例。在一个 n 维空间内，如有一个绵续函数，则这函数的最大点、最小点，与稳定点（stationary points）间必有若干个关系，与空间的拓扑性质有关，而为一切绵续函数所必须适合。大致说来，这是 Morse 理论的主要部分。Morse 把这结果推广到函数空间，因此解决了变分学方面若干重要的问题。

7. 结论

以上所论，不过是若干零碎的结果。实际上拓扑学的范围，广大无边，前途发展，更是无限。作者写到此地，除希望习算同志，对于此门数学加以注重外，愿作若干简单的历史叙述。

以前的拓扑学者每把拓扑学划分为两支。第一是集合拓扑学，系把空间看成点的组合，而研究他的性质。这派的开创者，是德国的数学家 G. Cantor；第二是代数拓扑学，其开创者是 H. Poincare，其出发点系把空间看成由弯曲的多面体组成而进行研究，着重于这些多面体间的关系。但经近来拓扑学者的工作，这两支已渐有打成一片的趋势。

现尚生存最大的拓扑学者是荷兰数学家 Brouwer，二十年来最重要的两个学派，是波兰学派与美国学派。波兰派的领袖人物，有 Sierpinski，Kuratowski，Borsuk

等。美国派的领袖人物,有 Veblen, Alexander, Lefschetz 等。但是目前(即 1945 年左右)最活动的两个拓扑学家,是瑞士的 H. Hopf 与苏联的 L. Pontrjagin。英美拓扑学家中,近来最有成绩的,英国有牛津的 J. H. C. Whitehead,美国有哈佛的 H. Whitney。

至于拓扑学方面的书籍,初学者可从以下数书着手:

1. M. H. A. Newman, Elements of the Topology of Plane Sets
2. W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory
3. H. Seifert and W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie
4. P. Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie

比较标准的书,可举以下数本:

5. O. Veblen, Analysis Situs
6. S. Lefschetz, Topology
7. P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I
8. Kuratowski, Topologie I

所举的这些书自然不能包罗一切。但由此可以渐知此学的重要文献。

(一九四六年五月五日于上海中央研究院)

55. 最近五年来数学研究的若干进展

原载《科学世界》第 17 卷第 1 期,1948 年。

英国数学家 L. J. Mordell 在最近一篇关于数论的文章[1]中说:"本世纪与前世纪数论家的工作间似乎有一显著的差异。虽然我无意低估前人贡献的创见与重要性,我却认为在那时候没有这许多深刻与广大的研究,需要长串的推论如最近的工作的。……本世纪中数论家在建立重要而美丽的结果时所显示的力量与认识,其方法上所用的观念,虽然不难了解,但似乎需要过人的力量才能发现;这整个现象实令人惊诧。"

这些话所描写的情状,实在是当今数学界的一般现象。草此文时,我们不能不对本世纪数学上的伟大成就,表示无限的赞美和景仰。

我们第一想到 David Hilbert 于 1900 年在国际数学会议上所提出的二十三个问题[2]。这些问题所涉及的范围与境界达到大部分数学。在这四十余年中,Hilbert 所提的问题大多数得到解决或部分的解决。其中最为人称道的可举以下几个: 1. Gelfond、Schneider 的超越数定理;2. Gödel 关于 Continuum hypothesis 的贡献;3. 高木贞治(Takagi)的 Class field theory;4. Lefschetz、Van der Waerden、Zariski 整理代数几何的工作。

我们也想到 Hilbert 所未曾提到的同样有重要影响的工作。姑且举以下几个较重要工作: 1. Alexander、Alexandroff、Hopf、Lefschetz、Pontrjagin、Veblen 等等建立代数拓扑学的工作;2. Artin、Hasse、Noether 等等建立抽象代数的工作;3. Vinogradov 对于 Goldbach 假设的贡献; 4. Douglas、Rado 之解决 Plateau 问题; 5. Lusternik、Schnirelmann、Mores 的大型变分学。(Calculus of Variations in the Large)

这个表自然还可以继续写下去。以下设法列举近五年来一部分比较重要的工作。因受篇幅与笔者知识的限制,所举自然很不完全。求符题目,所列的工作至少有一部分论文是发表在 1943 ~ 1947 年间的。

一、α 与 β 假设

这个问题的对象,是所谓 Additive number theory;其中最有名的问题是所谓 Goldbach 假设: 任何偶数是两个质数的和。

虽然有了 Vinogradov 的不磨的贡献,Goldbach 假设至今未全证明。在这方面一个富饶兴趣的结果是以下的 Schnirelmann 定理[3]:任意整数 $x > 1$ 可以写为小于 C 个质数的和,其中 C 为常数。

Schnirelmann 定理中一个重要的工具,是所谓自然数集的密度(Density)。设一任意自然数集,命 $N(x)$表示集中 $\leqslant x$ 的数的个数,则 $N(x)/x, x > 0$, 的最小限(Greatest lower bound)称为此数集的密度。今取二自然数集 A 与 B,命 C 表一切自然数所成的集,可以写为 A 集一数与 B 集一数之和者。(我们并假设 A、B 中均含零,故 C 包含 A 与 B。)所谓 α 与 β 假设指下面的定理:设 α、β、γ 依序为 A、B、C 的密度,则 $\gamma > \alpha + \beta$ 或 $= 1$。

这个重要的定理经过 Landau、Schur、Khintchine、Besicovitch、A. Brauer 等数学家的工作,终不能完全证明,1942 年一个当时不知名的数学家 Henry Mann[4],因听 Brauer 的演讲,对此问题感觉兴趣,竟于短期间予以证明。Mann 的论文仅五页,自然所用的方法与传统上完全不同。十余年悬而不决为研究中心的问题,竟告完全解决了。

二、Siegel 关于数论的贡献

近数年来在数论上作最多而最重要的贡献的,首推 Siegel。氏之工作可分三方面述之:

第一是不定二次方式的理论(Theory of indefinite quadratic forms)。问题为研究整系数的二次方式在整系数单模一次变换群(Group of unimodular linear transformations)[5]下的不变式。十七、十八、十九三世纪中的有名的数学家,都做过这个问题。Siegel 最近对于二次方式的解析理论,有许多重要的贡献。

第二是代数数域的 Waring 问题[6]。此问题在自然数情形即谓任一正整数 x 可以写成 N 个整数的 r 次方的和,其 N 为一常数,与 x 无关。代数数域中的相类问题,最近经 Siegel 证明。氏自言 1922 年时曾思索此问题,未能解决;直至最近,方将困难克服。

第三方面为不连续群论(Discontinuous group)与 Simple algebra 中的单元所成的群[7]。

三、几何数论

Minkowski 应用其关于卵体(Convex body)之理论于数论上,得到许多不等方程式极小值问题的解答。但若不等方程式所对应者为空间之非卵体(Non-Convex body),Minkowski 的理论便不够用了。对于这类问题的研究,其显著之进展为 1938 年 Davenport 所得关于三个变数之三个一次方式之积之极小值的定理[8]。Mordell

由之获得启示，于1942年应用 Non-Convex region 的理论，解决一般二元三次齐次式极小值的问题[9]。此问题早在数十年前就为 Eisenstein、Hermite、Arndt 等人所注意过了。兹举其结果如下：

设 $f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ 之系数皆为实数；其判别式为：$D = 18abcd - 27a^2d^2 + b^2c^2 - 4ac^3 - 4db^3$。则存在不全为零之整数 x、y 使 $|f(x,y)| \leqslant 4\sqrt{|D|/\lambda}$。

于此，$\lambda = 49$ 当 $D > 0$；$\lambda = 23$ 当 $D < 0$。

Mordell 推广其理论于更一般之区域如：

$|x|^p + |y|^p \leqslant 1\ (0 < p \leqslant 1)$；$|x^n + y^n| \leqslant 1$（$n$ 为二奇数之商）亦得若干有趣之结果。

此外 Mahler 关于较 Convex body 更广之 Star body 有详尽而有系统的理论[10]，亦颇重要。惟其理论之发展尚在初期；所导出之 Critical lattices problem 一般均感难于解决，其易解决者对应之数论上的问题又非数论家所最感兴趣者，故此方面的工作尚待努力。

四、群的表示问题

去年(1946) Princeton 大学的二百周年纪念，有百余数学家共同讨论当前数学上的问题。其代数组的记载中[11]说："讨论中有二主流，其一为已知结果的推广，其一则为传统方向的继续，后者以 Brauer 的伟大贡献为代表"。

R. Brauer 的工作，如果称为传统的，应当说是传统的抽象代数。他们代表代数学上近数年来最重要的进展，大概是公认的了。他所用的主要工具，叫做 Theory of modular characters。论文甚多，用此方法所解决的重要问题，可举以下两个：

1. 命 G 表示一有尽群，其级为 g。如 Ω 为包含 1 的 g 次根的域，则 G 的任意不可分的表示(Irreducible representation)，必相似于对于域 Ω 的一表示。这定理从 W. Burnside 到现在，已悬了四十余年未决。Brauer 首次给一完全的证明[12]。

2. 关于 Class field theory 在 Non-Abelian 情形的重要进展，以及 Artin、Siegel 等假设的证明[13]。

五、同调群与同伦群的关系

近二十年来的拓扑学研究中，比较有系统的是代数拓扑学(Algebraic topology)。代数拓扑学中的两个主要潮流是同调论(Homology theory)与同伦论(Homotopy theory)，前者根据圆形的疆界(Boundary)概念，后者根据于变动(Deformation)观念。

同调论较为简单，发展较速。至1935年 Hurewicz 发表其关于同伦群(Homotopy

group)的著作,同伦论中始得到一种主要的工具。1942 年 H. Hopf 发表论文[14],证明第二同调群的某个支群,可由第一同伦群决定,为此方面开路的著作。这定理表示拓扑学中两个主要观念间的一种深刻的关系。

此后对于这问题,即有大批论文发表,主要的工作者,除 Hopf 本人外,有 Eilenberg、Freudenthal、Maclane[15]等。这个方法与观念,并经用于群论、李氏代数(Lie algebra)与结合代数(Linear associative algebra)等。前途发展,似尚未衰。

六、代数几何学的整理工作与三度代数形的异点的解除

代数几何学所研究的图形,是使若干多项式为零所得到的轨迹,问题是几何,工具需要代数,而结果牵涉到分析,因此吸引了许多重要的数学家的兴趣。

代数几何学方面做最广泛的贡献的,自然要推意大利学派,但他们所用方法根据直觉,虽然有很多便利,用到复杂的问题,渐觉其不可靠。抽象代数的发展,自然帮助了代数几何方面的观念的澄清。van der Waerden、F. K. Schmidt、Krull 等首先做了许多开路的工作(van der Waerden 在纯粹数学的主要工作是代数几何,有人因他写了一部有名的抽象代数教科书,遂称他为代数学家,实不甚正确。)

近来这种整理工作,得到重大的进展,其代表人物为 Zariski。André Weil 所著 Foundations of Algebraic Geometry 一书,亦代表此方面重要的成就。就态度上说,Zariski 以代数方法治代数几何,Weil 则对代数几何上的主要方法,给予代数的基础,证明意大利人积累年经验所得的结果,可以解释为正确的。

利用这些新进展,Zariski 解决了一个重要的问题[16],即证明三度代数形的异点,可用双命分变换(Birational transformations)变为简单的形状,这是代数几何上的基本问题。在一度与二度情形,为各该方面的基本定理。三度情形,困难远非一二度所可比拟,故其解决,为代数几何上具体而重要的贡献。

七、Gauss-Bonnet 公式的推广

微分几何学研究图形在一点附近的性质,但图形的最有兴趣的性质,自须涉及整个。两者间的关系,为数学上饶有趣味的问题。

这类关系中最熟知的一个,是所谓 Gauss-Bonnet 公式,那公式表示有限的二度黎曼簇的尤拉特征数(Euler characteristic)是施于全簇的全曲率的积分的$\frac{1}{2\pi}$倍,这是黎曼簇的曲率性质与拓扑性质间的一种关系,由此可得许多结论,其中最简单的一个是:球面上不能定一种黎曼几何,其全曲率处处为零。

如何将此定理推广至高度的黎曼簇,为微分几何学上一个重要的问题。1925 年 H. Hopf 做了一个特例[17],即当 n 度黎曼簇为 $n+1$ 度欧氏空间的封闭超曲面

(Hypersurface)的情形,1940 年 Allendoerfer 与 Fenchel[18]将此定理推广至 $n+N$ 度欧氏空间内之 n 度黎曼簇,但任意之黎曼簇可否放于(Imbed)高度欧氏空间内,使其度量同于由欧氏空间所推得者,为迄今未决之问题。故 Allendoerfer、Fenchel 两氏所得结果的普遍性,仍成问题。至 1943 年 Allendoerfer 与 Weil 发表在普遍情形下的证明[19],问题始告解决。基于 Characteristic classes 的研究,Pontrjagin[20]得到更多 Gauss-Bonnet 式的关系。这类问题牵涉到微分几何、拓扑学与多元积分论,为拓扑学同他的应用间的桥梁,其前途发展,颇值注视。

八、调和积分(Harmonic Integrals)

因多值分析函数的研究,而需要用黎曼曲面做几何基础,黎曼曲面的拓扑性质,影响到函数的性质,这个认识是复变函数论的主要结晶,也就是近世代数拓扑学的出发点。

黎曼曲面的一个主要的性质,是在每个邻域中有局部坐标(Local coordinate)Z。局部坐标间的关系为分析的函数关系,将坐标个数推广至 n 个,即得所谓复变数分析簇(Complex analytic manifold)。多元复变函数论、代数几何学、李氏群论(Lie's groups)所应用的图形,均属此类。这类簇的局部性质的研究,需要分析与代数,他们的几何性质的描写,则需要拓扑学,因此这科目是很多种不同的数学训练的聚点。

调和积分是研究这种簇的主要工具,可认为熟知的 Cauchy-Riemann 偏微分方程式的推广。他的研究始于英国数学家 Hodge[21]。氏利用之解决代数几何学上一个主要的问题,关于代数曲面上 Abelian integrals of the first kind 的存在者。

调和积分中基本定理可述为:有限的黎曼簇上对于每个同调组(Homology class),恰有一个调和积分与之对应,对于这个定理,Hodge 所给原来的证明,有一严重的错误,第一个予以正确的证明的是 H. Weyl[22]。

九、黎曼 ζ 函数研究的最进近展

黎曼 ζ 函数为由以下函数素(Function element)

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$$

推广而得的分析函数。命 $s=\sigma+it$,则区域 $0<\sigma<1$ 称为主要带(Critical strip),所谓黎曼假设,谓 $\zeta(s)$在主要带中的零点,均在直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。

这假设在数论与分析上有极端重要的含义,但经数学家将近百年的努力,至今

未能决定其是否真确。Hardy 与 Littlewood 证明,大多数的零点,均在直线 $\sigma = \frac{1}{2}$ 附近,但此结果并不表示在直线 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上者究竟有多少?

最近挪威新进数学家 A. Selberg 的工作[23],对此问题有显著的贡献。Selberg 的结果,大致说来,谓在直线 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上的零点,至少占主要带中零点的一个固定的成分。由于氏之新观念与新方法,ζ 函数的研究,近复蓬勃。最令人诧异的,是 Selberg 虽然获得此项重要结果,却对黎曼假设本身,表示怀疑。

参考文献

[1] Mordell L J. *Thoughts on number theory*. Journal of London Mathematical Sceiety, 1946, **21**: 61. 以后此杂志简称 JLMS.

[2] Hilbert D. *Mathematisché Probleme*. Göttinger Nachrichten, 1900: 253 ~ 297

[3] 参阅 Landau E. *Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie*. Cambridge University Press: 58

[4] Mann H. *A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers*. Annals of Mathematics, 1942, **43**: 523 ~ 527. 以后此杂志简称 AM.

[5] Siegel C L. *On the theory of indefinite quadratic forms*. AM, 1944, **45**: 577 ~ 622

[6] Siegel C L. *Generalization of Waring's problem to algebraic number fields*. American Journal of Mathematics, 1944, **66**: 122 ~ 136. 以后此杂志简称 AJM.

[7] Siegel C L. Discontinuous groups, AM, 1943, **44**: 674 ~ 689

[8] Davenport H. *On the product of three homogeneous linear forms*. Proceedings of London Mathematical Society, 1938, **44**: 412 ~ 431. 以后此杂志简称 PLMS.

[9] Mordell L J. *On numbers represented by binary cubic forms*. PLMS, 1943, **48**: 198 ~ 228

[10] Mahler K. *Lattice points in two-dimensional star domains* Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ. PLMS, 1945, **49**: 128 ~ 183

[11] *Problems of Mathematics*. Princeton 1946: 4

[12] Brauer R. *On the representation of a group of order g in the field of the gth roots of unity*. AJM, 1945, **67**: 461 ~ 471

[13] Brauer R. *On Artin's L-series with general group characters*. AM, 1947, **48**: 502 ~ 514

[14] Hopf H. *Fundamentalgruppe und zweite Bettische gruppe*. Commentarii Mathematici Helvettci, 1942, **14**: 257 ~ 307

[15] Eilenberg S and Maclane S. *Relations between homology and homotopy groups of spaces*. AM, 1945, **46**: 480 ~ 509

[16] Zariski O. *Reduction of the singularities of algebraic three-dimensional varieties*. AM, 1944, **45**: 472 ~ 542

[17] Hopf H. *Über die curvatura integra gesch = lossener hyperflächen*. Mathematische Annalen, 1925, **95**: 340 ~ 367

[18] Allendoerfer C B. *The Euler number of a Riemann manifold*. AJM, 1940, **62**: 243 ~ 248; Fenchel W. *On total curvatures of Riemannian manifolds*. JLMS, 1940, **15**: 15 ~ 22

[19] Allendoerfer C B and Weil A. *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*. Transactions of American Mathematical Society, 1943, **53**: 101 ~ 129

[20] Pontrjagin L. *On some topologic invariants of Riemannian manifolds*. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences, USSR, N.S., 1944, **43**: 91 ~ 94

[21] Hodge W V D. *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*. Cambridge University Press, 1941

[22] Weyl H. *On Hodge's theory of harmonic integrals*. AM, 1943, **44**: 1 ~ 6

[23] Selberg A. *On the zeros of Riemann's zeta function*. Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I, no. 10, 1942

56. 极小子流形概观

原文为《Brief Survey of Minimal Submanifold》，收入 Klingenberg 编的《Differentialgeometrie im grossen》，1971 年。中译文见《数学译林》第 2 卷第 3 期，1983 年；刘书麟译，虞言林校。

1. 引言

拉格朗日在 1760 年首先得到三维欧氏空间中极小曲面的方程①。尽管他曾注意到存在不同于平面的一些解，但他并没有清楚地给出这种解。直至 1776 年，默尼耶才找到了二个新的极小曲面，即螺旋面与悬链面。默尼耶的想法富有启发性：他确定：a) 由平行于一平面的线生成的所有的极小曲面；b) 所有的旋转极小曲面。从而发现了它们。

极小曲面后来的发展是由普拉托问题所支配的，这种状况一直延续到 1931 年 T. 拉多与 J. 道格拉斯解决了普拉托问题时为止。他们建立了下述的存在性定理：给定任一闭的可求长度的若尔当空间曲线 C，则总存在一个以 C 为边界的广义极小曲面。在这一定理中的极小曲面容许有孤立的分支点，在这种点处不是浸入。最近奥斯曼证明了上述解实际上是处处正则的，亦即拉多和道格拉斯的解中不会有分支点②。

普拉托问题可以推广到任一黎曼流形。设 x^N 是 N 维黎曼流形。当一 n 维子流形 $M^n \to x^N$ 局部为具有边界 $C = \partial M^n$ 的所有子流形中有最小 n 维面积时，则称它为极小子流形。在此一般情形下的普拉托问题业已由 E.R. 赖芬堡、H. 费德雷尔、W. 弗莱明、E. 德·乔奇、C. 莫里等人研究过，而且还证明了当容许有广义解时的存在性定理。

我们将只论述光滑的极小子流形，它是由这样的条件定义的，即当它的边界 ∂M^n 固定时，n 维面积的第一变分是零。为了表述这一条件，先让我们定义平均曲

---

① 若 $Z = Z(X, Y)$ 是面积最小的曲面，则其面积的第一变分为零，由此得知 $Z(X, Y)$ 必满足下述二阶椭圆型非线性方程：$(1 + Z_y^2)Z_{xx} - 2Z_xZ_yZ_{xy} + (1 + Z_x^2)Z_{yy} = 0$。当然，这只是一个必要条件，满足此条件的面积不一定是最小的，定义极小曲面为满足此方程的曲面，即面积的一阶变分为零的曲面。——译注

② 请参阅 Ann. of Math. 1970 年 91 卷第 550 ~ 569 页。——译注

率向量如下：令 D^2x 为在 M^n 上的二次微分①。若 ξ 为 M^n 上 x 点的法向量，则数量积

$$II_\xi = (D^2x, \xi) \tag{1}$$

为 M^n 上的二次微分形式，且它线性地依赖于 ξ；称它为 M^n 的第二基本形式。令 $e_{n+1}, \cdots, e_N$ 为 M^n 的局部幺正法向量场，则

$$H = \frac{1}{n} \sum_{m+1 \leqslant \alpha \leqslant N} \mathrm{Tr}(D^2x, e_\alpha) e_\alpha \tag{2}$$

是 M^n 的法向量场，且它与基 e_α 的选取无关；称 H 为平均曲率向量。M^n 为极小子流形当且仅当 $H = 0$，当绝对微分 $DH = 0$ 时，则称 M^n 为具有常平均曲率的流形。

在特殊情形，即当 x^N 是具有坐标 $X_1, \cdots, X_n, Z$ 的 $(n+1)$ 维欧氏空间 E^{N+1} 且 M^n 是由

$$Z = Z(X_1, \cdots, X_n) \tag{3}$$

定义时，条件 $H = 0$ 变为

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\frac{\partial Z}{\partial X_i}}{\sqrt{1 + \sum_k \left(\frac{\partial Z}{\partial X_k} \right)^2}} \right) = 0 \qquad (1 \leqslant i, k \leqslant n)。 \tag{4}$$

在一般情形，极小子流形 M^n 满足非线性二阶椭圆型方程组，方程的个数等于余维 $N - n$。我们的目的是研究完备极小子流形的性质。

2. 黎曼流形的极小子流形

维数为 1 的极小子流形是测地线，人们已进行过广泛的研究。据我所知，对于任意黎曼流形上维数大于 1 的极小子流形，只有很少的结果。我要叙述以下两个定理：

魏廷格定理

凯勒流形的每一复解析子流形都是极小子流形。

项武义定理

当闭群等距地作用于紧致黎曼流形上时，极值轨道是极小子流形。

在这些定理的推论中，就有一些极小子流形的例子。类似于测地线的结论，以下问题是很自然的一个：在紧致黎曼流形上，是否总存在闭的极小曲面（维数为 2）？

---

① $\frac{Dx}{ds}$是 M^n 上曲线的单位切向量，而$\frac{D^2x}{ds^2}$是它在列维-齐维塔意义下的绝对导数。

在一般情形，回答也许是否定的。但是，对流形附加了一些条件，例如：a) 流形是单连通的，b) 流形的截面曲率具有定常符号，c) 它的度量与常曲率流形的度量只差一个小扰动时，回答也许是肯定的。

至今大多数的研究仍局限于包容空间 X^N 或为欧氏空间 E^N 或为具有常曲率度量的球面 S^N。

3. 例子

重要的是要了解一些例子，这不只是因为难以得到它们(即使局部地)，而且也还因为它们可作为同其他一些极小子流形相比较的模型，而且一般性质的结论可从这些模型中导出来。

在许多方面，在 E^3 中最值得注意的极小曲面是恩涅帕曲面。它在 E^N 中有一推广[6]：在 E^N 中存在一单连通、不可约、阶为 N^2 的有理曲面，它是极小曲面。在 E^N 中构造出更多的极小子流形的例子将是有兴趣的。

我们将用 $S^N(a)$表示 E^{N+1}中半径为 a 的球面，它具有诱导度量。$S^N(a)$的最简单的极小子流形是大球面，而且它也是全测地子流形(意即它的第二基本形式恒等于零)。最值得关注的是 $S^N(1)$上的闭极小子流形。我们将陈述一些导出这样例子的定理。

定理1 设 O 为球面$S^N(1)$的中心。对于极小子流形 $X: M^n \to S^N(1)$，取 $I_\varepsilon = \{t \mid \varepsilon < t \leqslant 1, \varepsilon > 0\}$。令

$$\hat{X}: M^n \times I_\varepsilon \to E^{N+1}$$

是由 $\hat{X}(p,t) = tX(p)\ (p \in M^n, t \in I_\varepsilon)$ 定义的 M^n 上的锥面，则 $X(M^n)$为 $S^N(1)$ 中极小子流形的充要条件是 $\hat{X}(M^n \times I_\varepsilon)$为 E^{N+1}中的极小锥面。

与魏廷格定理联合起来可推出：在复空间 C_v 中，由实维数为 $2v-1$ 的单位球面同复解析锥的交集为 $S^{2v-1}(1)$上的余维为 2 的极小子流形。

定理2 令 $M^{n_k} \to S^{N_k}(a_k)\ (k = 1,2)$ 是极小子流形。假定 $a_1^2 + a_2^2 = 1$，则当 $a_k^2 = \dfrac{n_k}{n_1 + n_2}$ 时，浸入

$$M^{n_1} \times M^{n_2} \to S^{N_1}(a_1) \times S^{N_2}(a_2) \to S^{N_1+N_2+1}(1)$$

(用显然的方法定义的)是极小子流形。

特别，因为 $S^{N_k}(a_k)$本身是 $S^{N_k}(a_k)$上余维为零的极小子流形，故我们有极小子流形

$$S^{N_1}\left(\sqrt{\frac{N_1}{N_1+N_2}}\right) \times S^{N_2}\left(\sqrt{\frac{N_2}{N_1+N_2}}\right) \to S^{N_1+N_2+1}(1)。$$

将这种极小子流形叫做克利福德极小超曲面,经典的克利福德曲面乃是 $N_1 = N_2 = 1$ 的情形①。除大球面外,这些也许是 $S^N(1)$上的最简单的闭极小子流形。

定理 3(高桥) 设 $X: M^n \to E^{N+1}(|X| = 1)$ 是 $S^N(1)$中的子流形,令 H 是它的平均曲率向量,Δ 是它的相对于诱导黎曼度量的拉普拉斯算子,则有

$$\Delta X = n(H - X)。\tag{5}$$

特别,此子流形为极小,其充要条件是 X 满足微分方程:

$$\Delta X + nX = 0。\tag{6}$$

利用 $S^n(a)$ 上的球谐函数就可由这一定理得到极小子流形 $X: S^n(a) \to S^N(1)$。将在下一节再进一步讨论这些例子。

定理 1、2 及 3 都是不难证明的。给出 $S^N(1)$上闭极小子流形范围的深刻得多的定理是下列的

定理 4(劳森) 每一个非射影平面的紧致曲面皆可被极小地浸入到 $S^3(1)$。每一紧致可定向的曲面皆可极小地嵌入到 $S^3(1)$中。

4. E^N 中的完备极小曲面

类似于§3 中的定理 3,可以证明 E^N 中的极小子流形的坐标函数相对于诱导度量而言是调和函数。由此可得如下推论:在 E^N 中,除了一些点而外,不存在无边紧致极小子流形,或者,换言之,E^N 中每一个维数大于零的完备极小子流形必是非紧致的。

普拉托问题是一个存在性问题,然而大部分极小子流形几何却是与唯一性问题打交道的,其中最著名的乃是 S. 伯恩斯坦定理(简单的证明见[4]):

坐标为 X、Y、Z,E^3 中的极小曲面,设它对所有的 X、Y 可表示为

$$Z = f(X, Y),$$

则它必为平面。

这一定理引出所谓伯恩斯坦问题:

假定

$$Z = f(X_1, \cdots, X_n)(所有的 X_1, \cdots, X_n)$$

是坐标为 $X_1, \cdots, X_n, Z$ 的 E^{n+1}中的极小超曲面。函数 f 是否必为线性?对 $n = 3$(德·乔奇,1965),$n = 4$(阿姆格伦,1966),$n \leqslant 7$(西蒙斯,1967),回答是肯定的。最近邦别里、德·乔奇及朱斯蒂已证明:当 $n \geqslant 8$ 时答案是否定的。这一定是一个关于极小子流形的最激动人心的结果。

① 这种特殊情形是特别重要的,因为它是非欧空间 $S^3(1)$中的欧氏曲面。——译注

极小曲面($n=2$)的情形具有特殊的地位,因为此时问题与复流形中的全纯曲线论密切相关。其连接的环链是高斯映射,它的定义如下所述:令 $X: M^2 \to E^N$ 为定向极小曲面,且令 $\mathrm{Gr}(2,N)$ 为 E^N 中过固定点 O 所有定向平面构成的格拉斯曼流形。高斯映射 $g: M^2 \to \mathrm{Gr}(2,N)$ 使点 $p \in M^2$ 对应于过 O 点且平行于在 $X(p)$ 点 $X(M^2)$ 的切平面。

由诱导度量,曲面 M^2 上有一共形结构而且它还是一复曲线(或黎曼面)。另一方面,

$$\mathrm{Gr}(2,N)=\frac{SO(N)}{SO(2)\times SO(N-2)}$$

具有在 $SO(N)$ 作用下不变的复结构,这使得 $\mathrm{Gr}(2,N)$ 成为对称埃尔米特流形,它复解析等价于 $N-1$ 维复射影空间 $P_{N-1}(C)$ 中的非蜕化二次超曲面。我们有

定理 M^2 是 E^N 中极小曲面的充分必要条件是高斯映射 g 是反全纯的①。

下述定理是经典的伯恩斯坦定理在几何上的推广。

定理(稠密性定理) 设 $X: M^2 \to E^N$ 是一完备定向极小曲面,但不是平面;又令 $g: M^2 \to \mathrm{Gr}(2,N) \subset P_{N-1}(C)$ 为它的高斯映射,则与像集 $g(M^2)$ 相交的 $P_{N-1}(C)$ 的超平面构成由所有 $P_{N-1}(C)$ 中超平面组成的空间 P_{N-1} 中的稠密子集。在 $N=3$ 的情形,像集 $g(M^2)$ 是 $\mathrm{Gr}(2,N)$ 的稠密子集,$N=3$ 情形的定理应归功于 R. 奥斯曼。它推广了伯恩斯坦定理,因为 $\mathrm{Gr}(2,3)$ 可以同 E^3 中中心为 O 的单位球面恒等。

5. $S^N(1)$中的闭极小子流形

在§3,我们已给出过这种极小子流形的一些例子。最简单的唯一性定理是以下

定理(阿姆格伦-卡拉比) 极小曲面 $X: S^2 \to S^3(1)$ 必为大球面。

这引导人们提出以下问题:当 $N \geqslant 4$ 时,浸入极小超曲面 $X: S^{N-1} \to S^N(1)$ 是否必为大超球面。下述项武义的一个例子给出这一问题的否定答案:在 E^5 中,设其坐标为(x,y,z,u,v),取三次锥面

$$\begin{vmatrix} u & x & y \\ x & v & z \\ y & z & -u-v \end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

与单位球面 $S^4(1)$ 的交集 M^3,于是 M^3 是 $S^4(1)$ 的极小超曲面,而且它由 S^3 所覆盖,因而这就得到一映射。它将 S^3 浸入 $S^4(1)$ 成为 $S^4(1)$ 的不是大超曲面的极小

① g 是反全纯的意思是:在 M 的局部复解析坐标系$\{Z\}$中,g 是$\bar{Z}$的全纯函数。——译注

超曲面。

另一方面,以下球面几何的伯恩斯坦问题尚未解决:当 $N \geqslant 4$ 时,嵌入极小超曲面 $X: S^{N-1} \to S^N(1)$ 是否为一大球面?①

一般而言,将 S^n 浸入 $S^N(1)$ 使之成为 $S^N(1)$ 的极小子流形是容易做到的,因为存在着种种可能性。一个重要情形乃是当诱导度量具有常曲率时,亦即等距极小浸入 $X: S^n(a) \to S^N(1)$ 的情形,这里 $S^n(a)$ 有常曲率 $\frac{1}{a^2}$。根据高桥定理,浸入将由方程(6)的解给出。更精确些,我们有

定理 设 $X: M^n \to E^{N+1}$ 为一黎曼流形 M^n 的等距浸入,$X(p) = (X_0(p), \cdots, X_N(p))$,$p \in M^n$,此处 $X_A (0 \leqslant A \leqslant N)$ 满足微分方程

$$\Delta X_A + \lambda X_A = 0 \qquad (\lambda > 0), \tag{8}$$

于是 $X(M^n)$ 作为一极小子流形包含于球 $S^N\left(\sqrt{\frac{N}{\lambda}}\right)$ 之中。

特别在 $M^n = S^n(a)$ 的情形,(8)的解是 $S^n(a)$ 上的球调和函数。这些解引出一簇等距极小浸入 $X_S: S^n(a) \to S^N(1)$,它由陀卡摩和 N. R. 瓦拉赫首先描述过:

$$N(S) = (2S + n - 1)\frac{(S + n - 2)!}{S!(n-1)!} - 1, \tag{9}$$

$$a^2 = \frac{S(S + n - 1)}{n}。$$

当 S 为正整数时,事实上 S 是所谈及的球谐函数的度数($N(S) + 1$ 是度为 S 的、$n + 1$ 个变量的、线性无关的球谐函数的最大数目)。在陀卡摩的文章中讨论到等距极小浸入 $S^n(a) \to S^N(1)$ 的一般问题。

存在着诱导度量不是常曲率的度量的极小曲面 $S^2 - S^N(1)$。

6. 几个不等式

不等式是极小子流形的最重要、最有趣的结果之一,它涉及了极小子流形的各种几何量。我们将陈述三个最重要的不等式。

定理 1(E. 海因茨与 E. 霍普夫) 设

$$Z = Z(X, Y), \quad X^2 + Y^2 < R^2$$

为 E^3 中的极小曲面,则在 $X = Y = 0$ 处,高斯曲率 K 满足不等式

$$|K_0| \leqslant \frac{A}{[1 + (\text{grad } Z)_0^2]R^2} \leqslant \frac{A}{R^2}, \text{②} \tag{10}$$

---

① 事实上,项武义证明了:当 $n > 2$ 时,S^n 浸入 $S^{n+1}(1)$ 的极小曲面不一定是大球面。——译注

② K_0 是 $Z(0,0)$ 处的高斯曲率。——译注

这里 A 是一普适常数。

奥斯曼与陈省身已将上述不等式推广到 E^N 中的参数极小曲面。令 $R\to\infty$，由(10)就导出伯恩斯坦定理。

不等式(10)在几何上表明，当一片极小曲面越大，它在中心处就越平。由于任何平面皆为极小曲面，因此，有关$(\mathrm{grad}\ Z)_0$类似的界并不存在。然而，若我们强加上进一步的条件：$Z>0$，芬恩和塞林已获得这种不等式，而且邦别里、德·乔奇与米兰达已将有关结果推广到高维极小子流形。

定理 2 设

$$Z=Z(X_1,\cdots,X_n)>0, X_1^2+\cdots+X_n^2<R^2$$

为 E^{n+1} 中的极小超曲面，E^{n+1} 具有坐标$(X_1,\cdots,X_n,Z)$，则有不等式

$$|(\mathrm{grad}\ Z)_0|\leqslant C_1\exp\left(C_2\frac{Z(0)}{R}\right), \tag{11}$$

此处 C_1、C_2 为只依赖于 n 的常数。

这一定理是有关极小超曲面最深刻的结论之一，它的证明是艰难的。

我们要提到的最后一个不等式，是关于闭极小子流形 $M^n\to S^N(1)$的。用 $\sigma(p)\geqslant 0\ (p\in M^n)$ 表示第二基本形式模的平方。它是 M^n 上的内蕴不变量，而且以简单的方式与 M^n 上诱导度量的纯量曲率相关。因此我们有

定理 3(西蒙斯) 设 $X: M^n\to S^N(1)$是一闭极小子流形，则

$$\int_{M^n}\left(\sigma-\frac{n}{q}\right)\sigma*1\geqslant 0, \tag{12}$$

式中 $q=2-\dfrac{1}{N-n}$，$*1$ 是 M^n 的体积元。

由(12)式推出：或者 $\sigma=0$，在这种情形，子流形为全测地流形；或者 $\sigma\equiv\dfrac{n}{q}$，抑或存在一点 $p\in M^n$ 使$\sigma(p)>\dfrac{n}{q}$。在[5]中已经证明 $\sigma=\dfrac{n}{q}$ 时的极小子流形或者为克利福德超曲面或者是 $S^4(1)$ 上的韦罗内塞曲面。后者乃是(9)中 $n=S=2$ 时的例子。

7. 几个问题

除了正文中已提到的一些问题外，我们想再添加几个：

问题 1. 不用极小流，试给出伯恩斯坦-西蒙斯定理的一个初等的证明。对于这些维数，海因茨型不等式是否成立？

问题 2. 设 $S^3(a)\to S^7(1)$ 是一个等距极小浸入。它是否为全测地子流形？

问题 3. 设 $M^n\to S^N(1)$是一个闭极小子流形，且 $\sigma=$ 常数，但 $\sigma\neq 0,\dfrac{n}{q}$。$\sigma$ 的这

些值的下界是什么?

参 考 文 献

[1] Chern S. *Minimal submanifolds in a Riemannian manifold*. University of Kansas, Department of Mathematics, Technical Report 19, 1968
[2] Federer H. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag 1969
[3] Morrey C B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag 1966
[4] Nitsche J C C. *On new results in the theory of minimal surfaces*. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, **71**: 195 ~ 270
[5] Osserman R. *A survey of Minimal Surfaces*. van Nostrand Reinhold, New York 1969
[6] Osserman R. *Minimal varieties*. Bull. Amer. Math. Soc. 1969, **75**: 1092 ~ 1120
[7] Bombieri E, de Giorgi E and Giusti E. *Minimal cones and the Bernstein problem*. Inventiones Math., 1969, **7**: 243 ~ 268
[8] Bombieri E, de Giorgi E and Miranda M. *Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche*. Archive for Rat. Mech. and Analysis, 1968, **32**: 255 ~ 267
[9] Calabi E. *Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres*. J. Diff. Geom. 1967, **1**: 111 ~ 125
[10] Chern S S. *Simple proofs of two theorems on minimal surfaces*. L'Enseig. Math. 1969, **15**: 53 ~ 61
[11] Chern S S, do Carmo M and Kobayashi S. *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*. to appear in "*Functional analysis and related fields*. Volume in honor of M. H. Stone"
[12] Chern S S and Osserman R. *Complete mininal surfaces in Euclidean n-space*. J. d'Analyse Math. 1967, **19**: 15 ~ 34
[13] Do Carmo M and Wallach N. *Minimal immersions of spheres into spheres*. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 1969
[14] Hsiang W Y. *On the compact homogenous minimal submanifolds*. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 1966, **56**: 5 ~ 6
[15] Lawson Jr. H B. *Compact minimal surfaces in S^3*. Proc. Symp. in Pure Math.; Global Analysis, Amer. Math. Soc., 1969
[16] Osserman R. *A proof of the regularity everywhere of the classical solution to plateau's problem*. Ann. of Math. 1970, **91**: 550 ~ 569
[17] Simons J. *Minimal varieties in Riemannian manifolds*. Ann. of Math. 1968, **88**: 62 ~ 105
[18] Takahashi T. *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 1966, **18**: 380 ~ 385

57. 从三角形到流形

这是1978年4月7日在美国伯克利加利福尼亚大学所作的“教授会研究报告”。以后在北京、长春等地作过类似的演讲。尤承业译成中文后发表于《自然杂志》第2卷第8期,1979年。

提要: 本文深入浅出地回顾了整体微分几何学的发展,阐述了运用拓扑学的工具,如何推进偏微分方程、大范围分析学、粒子物理中的统一场论和分子生物学中的DNA理论等的发展。作者着重地指出局部的和整体的拓扑性质之间的联系,强调“欧拉示性数是整体不变量的一个源泉”,并鉴于“所有已知的流形上的整体结构绝大多数是同偶维相关的”,作者希望奇维的流形将受到更多的注意。

一、几　何

我知道大家想要我全面地谈谈几何:几何是什么;这许多世纪以来它的发展情况;它当前的动态和问题;如果可能,窥测一下将来。这里的第一个问题是不会有确切的回答的。对于“几何”这个词的含义,不同的时期和不同的数学家都有不同的看法。在欧几里得看来,几何由一组从公理引出的逻辑推论组成。随着几何范围的不断扩展,这样的说法显然是不够的。1932年大几何学家O.维布伦和J.H.C.怀特海说:“数学的一个分支之所以称为几何,是因为这个名称对于相当多的有威望的人,在感情和传统上看来是好的。”[1]这个看法,得到了法国大几何学家E.嘉当的热情赞同[2]。一个分析学家,美国大数学家G.D.伯克霍夫,谈到了一个“使人不安的隐忧:几何学可能最后只不过是分析学的一件华丽的直观外衣”[3]。最近我的朋友A.韦伊说:“从心理学角度来看,真实的几何直观也许是永远不可能弄明白的。以前它主要意味着三维空间中的形象的了解力。现在高维空间已经把比较初等的问题基本上都排除了,形象的了解力至多只能是部分的或象征性的。某种程度的触觉的想象也似乎牵涉进来了。”[4]

现在,我们还是抛开这个问题,来看一些具体问题为好。

二、三 角 形

三角形是最简单的几何图形之一,它有许多很好的性质。例如它有唯一的一个内切圆,并有唯一的一个外接圆。又例如九点圆定理,本世纪初几乎每个有一定水平的数学家都知道这个定理。三角形的最引人深思的性质与它的内角和有关。欧几里得说,三角形的内角和等于180°,或 π 弧度。这个性质是从一个深刻的公理——平行公理——推出的。想绕开这个公理的努力都失败了,但这种努力却导致了非欧几何的发现。在非欧几何中,三角形的内角和小于 π(双曲非欧几何)或大于 π(椭圆非欧几何)。双曲非欧几何是高斯、J. 波尔约和罗巴切夫斯基在19世纪发现的。这一发现是人类知识史上最光辉的篇章之一。

三角形的推广是 n 角形,或叫 n 边形。把 n 角形割成 $n-2$ 个三角形,就可看出它的内角和等于 $(n-2)\pi$。这个结果不如用外角和来叙述更好:任何 n 角形的外角和等于 2π,三角形也不例外。

三、平面上的曲线;旋转指数与正则同伦

应用微积分的工具,就可以讨论平面上的光滑曲线,也就是切线处处存在且连续变化的曲线。设 C 是一条封闭的光滑定向曲线,O 是一定点。C 上每一点对应着一条通过 O 点的直线,它平行于 C 在这点的切线。如果这点按 C 的定向跑遍 C 一次,对应的直线总计旋转了一个 $2n\pi$ 角,也就是说旋转了 n 圈。我们称整数 n 为 C 的旋转指数(图1)。微分几何中的一个著名的定理说:如果 C 是简单曲线(也就是说 C 自身无交叉点),则 $n=\pm 1$。

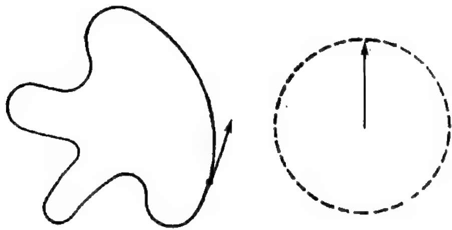


图 1

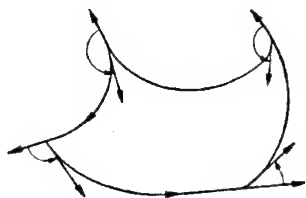


图 2

很明显,应该有一个定理把 n 角形外角和定理与简单封闭光滑曲线的旋转指数定理统一起来。要解决这个问题,就要考虑范围更广的一类简单封闭分段光滑曲线。计算这种曲线的旋转指数时,很自然地要规定切线在每个角点处旋转的角度等于该点处的外角(图2)。这样,上面的旋转指数定理对这种曲线也成立。应用于 n 角形这一特殊情形,就得到 n 角形外角和等于 2π 这个结论。

这个定理还可进一步推广到自身有交叉点的曲线。对一个常规的(generic)交叉点,可规定一个正负号。于是,如果曲线已适当地定向,它的旋转指数等于1加上交叉点的代数个数(图3)。例如"8"字形曲线的旋转指数为0。

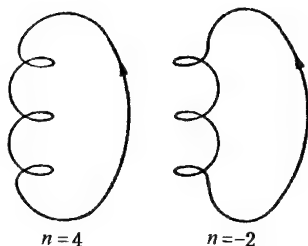


图3

形变,也叫作同伦,是几何学中乃至数学中的一个基本概念。两条闭光滑曲线称为正则同伦的,如果其中一条可通过一族闭光滑曲线变形成另一条的话。因为旋转指数在形变过程中是连续变化的,而它又是整数,所以一定保持不变。这就是说,正则同伦的曲线具有相同的旋转指数。格劳斯坦-惠特尼的一个出色的定理说,上述命题的逆命题也成立[5],即具有相同旋转指数的闭光滑曲线一定是正则同伦的。

这里,在研究平面上的闭光滑曲线时用了数学中的一个典型手法,就是考察全部这样的曲线,并把它们加以分类(在这里就是正则同伦类)。这种手法在实验科学中是行不通的,因此它是理论科学和实验科学方法论上一个根本性的差别。格劳斯坦-惠特尼定理说明,旋转指数是正则同伦类的唯一不变量。

四、三维欧几里得空间

现在,从平面转向有着更加丰富内容和不同特色的三维欧氏空间。空间曲线(除平面曲线外)中最美好的也许要算圆螺旋线了。它的曲率、挠率都是常量,并且它是唯一能够在自身内进行∞^1刚体运动的曲线。圆螺旋线可按挠率的正负分成右手螺旋线和左手螺旋线两类,它们有本质的区别(图4)。一条右手螺旋线是不可能与一条左手螺旋线迭合起来的,除非用镜面反射。螺旋线在力学中起了重要的作用。DNA(脱氧核糖核酸)分子的克里克-沃森模型是双螺旋线,这从几何学的观点来看可能不是完全的巧合。双螺旋线有一些有趣的几何性质。

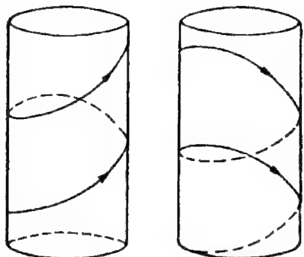


图4

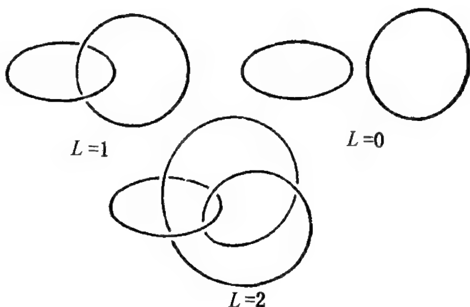


图5

特别是,如果用线段或弧段分别把两条螺线的两端连接起来,就得到两条闭曲线,它们在三维空间中有一个环绕数(linking number) L(图5)。

最近在生物化学中由数学家W.波尔和G.罗伯茨提出一个有争论的问题,这就是:染色体的DNA分子是不是双螺旋线的?如果是这样,那么它就有两条闭线,它们的环绕数是300 000级的。分子的复制过程是:分开这两条闭线,并且把每一条闭线补上它在分子中的补充线(即相补的线)。由于环绕数这么大,波尔和罗伯茨表明复制过程在数学上会有严重的困难。因此DNA分子(至少对于染色体的来说)的这种双螺旋线构造是受到怀疑的[6]。

环绕数 L 可由J.H.怀特公式[7]

$$T + W = L \tag{1}$$

决定,这里 T 是全挠率(total twist),W 是拧数(writhing number)。拧数 W 可用实验来测定,并且在酶的作用下会变化。这个公式是分子生物学中一个重要的基本公式。DNA分子一般是很长的。为了要把它们放到不大的空间中,最经济的办法是拧它们,使它们卷起来。上面的讨论可能启示着一门新科学——随机几何学——正在产生,它的主要例子来自生物学。

在三维空间中,比起曲线来曲面有重要得多的性质。1827年高斯的论文《曲面的一般研究》(Disquisitiones generales circa superficies curvas)标志着微分几何的诞生。它提高了微分几何的地位,把原来只是微积分的一章提高成一门独立的科学。主要思想是:曲面上有内蕴几何,它仅仅由曲面上弧长的度量决定。从弧元素出发,可规定其他几何概念,如两条曲线的夹角和曲面片的面积等。于是平面几何得以推广到任何曲面 Σ 上,这曲面只以弧元素的局部性质为基础。几何的这种局部化是既有开创性又有革命性的。在曲面上,相当于平面几何中的直线的是测地线,就是两点(足够靠近的)间"最短"曲线。更进一步说,曲面 Σ 上的曲线有"测地曲率",这是平面曲线的曲率的推广。测地线就是测地曲率处处为0的曲线。

设曲面 Σ 是光滑的,并取了定向。于是在 Σ 的每一点 P 有一个单位法向量 $\nu(P)$,它垂直于 Σ 在 P 点的切平面(图6)。$\nu(P)$ 可看作以原点为球心的单位球面 S_0 上的一点。从 P 到 $\nu(P)$ 的映射获得高斯映射

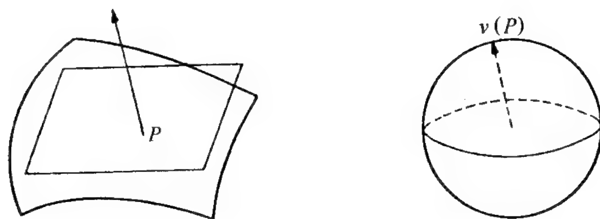


图6

$$g:\ \Sigma\rightarrow S_0。\tag{2}$$

S_0 的面积元与相应的 Σ 的面积元之比值叫做高斯曲率。高斯的一个出色定理说：高斯曲率仅仅依赖于 Σ 的内蕴几何。而且事实上，在某种意义下它刻画了这个几何。显然，平面的高斯曲率是 0。

像平面几何中那样，我们在 Σ 上考虑一个由一条或几条分段光滑曲线所围成的区域 D。D 有一个重要的拓扑不变量 $\chi(D)$，称做 D 的欧拉示性数。它可以很容易地下定义：用“适当”的方法将 D 分割成许多多角形，以 v、e 和 f 分别表示顶点、边和面片的数目，则

$$\chi(D) = v - e + f。\tag{3}$$

(早在欧拉之前就有人知道这个欧拉多面体定理，但似乎欧拉是第一个认识公式(3)中这个“交错和”的重要意义的人。)

在曲面论中，高斯-博内公式是

$$\sum 外角 + \int_{\partial D} 测地曲率 + \iint_D 高斯曲率 = 2\pi\chi(D),\tag{4}$$

这里 ∂D 是 D 的边缘。如果 D 是一个平面区域，高斯曲率就为 0；如果它还是单连通的，就有 $\chi(D) = 1$。在这种情况下，公式(4)就简化成第三节中讨论过的旋转指数定理。现在我们离开第二节中的三角形的内角和已经走了多么远呀！

我们推广闭平面曲线的几何，考虑的空间中闭定向曲面。旋转指数的推广是公式(2)中的高斯映射 g 的映射度 d。d 的确切意义是深刻的。直观地说，它是映射下的像 $g(\Sigma)$ 覆盖 S_0 的代数“层”数。在平面上，旋转指数可以是任何整数，而 d 则不同，它是由 Σ 的拓扑所完全决定了的：

$$d = \frac{1}{2}\chi(\Sigma)。\tag{5}$$

嵌入的单位球面的 d 是 +1，它与球面的定向无关。S. 斯梅尔[8]得到了一个使人惊异的结果：两个相反定向的单位球面是正则同伦的。说得形象一点：可以通过正则同伦把单位球面从内向外翻过来。在曲面的正则同伦过程中，必须保持曲面在每一点处都有切平面，但允许自身相交。

五、从坐标空间到流形

17 世纪笛卡儿引进了坐标，引起了几何学的革命。用 H. 外尔的话来说，“以坐标的形式把数引进几何学，是一种暴力行为”[9]。按他的意思，从此图形和数就会——像天使和魔鬼那样——争夺每个几何学家的灵魂。在平面上，一点的笛卡儿坐标 (x,y) 是它到两条互相垂直的固定直线(坐标轴)的距离(带正负号)。一条

直线是满足线性方程

$$ax + by + c = 0 \tag{6}$$

的点的轨迹。这样产生的后果是从几何到代数的转化。

解析几何一旦闯进了大门，别的坐标系也就纷纷登台。这里面有平面上的极坐标，空间的球坐标、柱坐标，以及平面和空间的椭圆坐标。后者适用于共焦的二次曲面的研究，特别是椭球的研究。地球就是一个椭球。

还需要有更高维数的坐标空间。虽然我们原来只习惯于三维空间，但相对论要求把时间作为第四维。描写质点的运动状态(位置和速度)需要 6 个坐标(速矢端线)，这是一个比较初等的例子。全体一元连续函数组成一个无穷维空间，其中平方可积的函数构成一个希尔伯特空间，它有可数个坐标。在这里我们考察具有规定性质的函数的全体，这种处理问题的手法在数学中是基本的。

由于坐标系的大量出现，自然地需要有一个关于坐标的理论。一般的坐标只需要能够把坐标与点等同起来，即坐标与点之间存在一一对应；至于它是怎么来的，有什么意义，这些都不是本质的。

如果你觉得接受一般的坐标概念有困难，那么你有一个好的伙伴。爱因斯坦从发表狭义相对论(1908 年)到发表广义相对论(1915 年)花了 7 年时间。他对延迟这么久的解释是："为什么建立广义相对论又用了 7 年时间呢？主要原因是：要摆脱'坐标必须有直接的度量意义'这个旧概念是不容易的。"[10]

在几何学研究中有了坐标这个工具之后，我们现在希望摆脱它的束缚。这引出了流形这一重要概念。一个流形在局部上可用坐标刻画，但这个坐标系是可以任意变换的。换句话说，流形是一个具有可变的或相对的坐标(相对性原则)的空间。或许我可以用人类穿着衣服来做个比喻。"人开始穿着衣服"是一件极端重要的历史事件。"人会改换衣服"的能力也有着同样重要的意义。如果把几何看作人体，坐标看作衣服，那么可以像下面这样描写几何进化史：

综合几何	裸体人
坐标几何	原始人
流　　形	现代人

流形这个概念即使对于数学家来说也是不简单的。例如 J. 阿达马这样一位大数学家，在讲到以流形这概念为基础的李群理论时就说："要想对李群理论保持着不只是初等的、肤浅的，而是更多一些的理解，感到有着不可克服的困难。"[11]

六、流形；局部工具

在流形的研究中，由于坐标几乎已失去意义，就需要一些新的工具。主要的工具是不变量。不变量分两类：局部的和整体的。前者是局部坐标变换之下的不变

量;后者是流形的整体不变量,如拓扑不变量。外微分运算和里奇张量分析是两个最重要的局部工具。

外微分形式是多重积分的被积式。例如在(x,y,z)空间上的积分

$$\iint_D P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7}$$

的被积式 $P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里 D 是一个二维区域, P、Q、R 是x、y、z 的函数。人们发觉如果上面的微分的乘法是反称的,也就是

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y, \cdots, \tag{8}$$

这里记号$\wedge$表示外乘,那么 D(设已有了定向)中变量的变换就会自动地被照顾到了。更有启发性的办法是引进二次的外微分形式

$$w = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \tag{9}$$

并且把积分式(7)写成为积分区域 D 和被积式w 所组成的(D,w)这一对。

因为,假如在 n 维空间中也如此照办,斯托克斯定理就可写成为

$$(D,\mathrm{d}w) = (\partial D, w), \tag{10}$$

这里 D 是r 维区域,∂D 是D 的边界;w 是 $(r-1)$ 次外微分形式,$\mathrm{d}w$ 是w 的外微分,它是 r 次形式。公式(10)是多元微积分的基本公式,它说明∂和 d 是伴随算子。值得注意的是,边界算子∂在区域上是整体性的,而外微分算子 d 作用在微分形式上是局部的。这个事实使得 d 成为一个强有力的工具。d 作用在函数(0 次形式)和 1 次形式上,分别得到梯度和旋量。一个微分流形的全部次数小于或等于流形的维数的光滑形式组成一个环,它具有这个外微分算子 d。E. 嘉当在应用外微分运算到微分几何的局部问题和偏微分方程方面最有成效。G. 德·拉姆在庞加莱的开创工作的基础上,建立了整体理论。这些工作我们将在下一节里讨论。

尽管外微分运算很重要,可是它对于描绘流形上的几何和分析特性却是不够用的。一个更广的概念是里奇张量分析。张量基于这样的事实:一个光滑流形在每一点都可用一个线性空间——切空间——来逼近。一点处的切空间引导到相伴的张量空间。张量场需要有一个附加结构——仿射联络——后才能微分。如果流形具有黎曼结构或洛伦兹结构,那么相应的列维-齐维塔联络就适用了。

七、同　调

在历史上,流形的整体不变量的系统研究是从组合拓扑学开始的。它的想法是把流形剖分成一些胞腔,研究它们是如何装拼在一起的。(剖分要满足一些要求,我们不细说了。)特别当 M 是一个 n 维闭流形时,设 α_k 是 k 维胞腔的个数,

$k = 0,1,\cdots,n$。那么作为公式(3)的推广，M 的欧拉-庞加莱示性数的定义为

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^n\alpha_n。 \tag{11}$$

边缘是同调论中的基本概念。胞腔的整系数线性组合称为一个链。如果一个链没有边缘（边缘为0），则称作闭链。链的边缘是闭链（图7）。在模 k 边缘链的意义下，线性无关的 k 维闭链的个数称为 M 的 k 维贝蒂数，记作 b_k，它是一个有限整数。欧拉-庞加莱公式说

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + \cdots + (-1)^n b_n。 \tag{12}$$

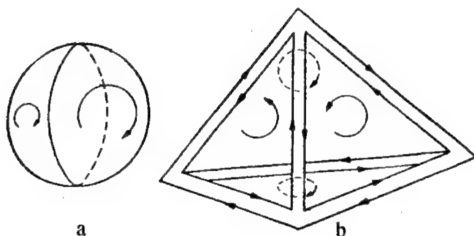


图7

b_k 是 M 的拓扑不变量，因此 $\chi(M)$ 也是。也就是说，b_k、$\chi(M)$ 都是与剖分的方式无关的，并且在 M 的拓扑变换下保持不变。这些，以及更一般的叙述，可以看作是组合拓扑学的基本定理。庞加莱和 L.E.J. 布劳威尔为组合拓扑学的发展开辟了道路。以维布伦、亚历山大和莱夫谢茨等为首的美国数学家的工作使得它于20世纪20年代在美国开花结果。

剖分的方法虽然是导出拓扑不变量的一个有效途径，但它也有“杀死”流形的危险。明确地说，组合的方法可能使我们看不出拓扑不变量和局部几何性质的关系。实际存在着与同调论相对偶的上同调论。同调论依赖于边缘算子 ∂；而上同调论立足于外微分算子 d，它是一个局部算子。

从 d 发展成为德·拉姆上同调论可概括如下：算子 d 有一个基本性质：重复运用它时得到0次形式。也就是说，对任何 k 次形式 α，$(k+1)$ 次形式 $d\alpha$ 的外微分是0。这相当于“任何链（或区域）的边缘没有边缘”这样一个几何事实（参阅公式(10)）。当 $d\alpha = 0$ 时，就称 α 是闭的。当存在一个 $(k-1)$ 次形式 β 使得 $\alpha = d\beta$ 时，就说 α 是一个导出形式。导出形式总是闭的。两个闭形式如果相差一个导出形式，则说它们是上同调的。互相上同调的闭 k 次形式的全体组成 k 维的上同调类。不平常的是，虽然 k 次形式、闭 k 次形式以及导出 k 次形式的数量都是极大的，但 k 维上同调类却组成一个有限维的线性空间，而维数就是第 k 个贝蒂数 b_k。

德·拉姆上同调论是层的上同调(sheaf cohomology)的先驱。后者由 J. 勒雷[12]创始，H. 嘉当和 J.-P. 塞尔使之完善，并卓有成效地加以应用。

八、向量场及其推广

我们自然地要研究流形 M 上的连续向量场。这样的一个向量场由 M 的每一点处的一个切向量组成，并且向量随着点连续变动。如果 M 的欧拉-庞加莱示性数 $\chi(M) \neq 0$，则 M 上任一连续向量场中至少有一个零向量。举个具体的例子，地球是个二维球面，示性数是 2，因此当地球上刮风时，至少有一处没有风。上述结果有一个更加明确的定理。对于连续向量场的每一个孤立零点可规定一个整数，叫做指数，它在某种程度上刻画向量场在这个零点附近的状态，表明它是源点，还是汇点或是其他情形。庞加莱-霍普夫定理指出，当连续向量场只有有限多个零点时，它的全部零点的指数和就是拓扑不变量 $\chi(M)$。

以上所述是有关 M 的切丛的。切丛就是 M 的全体切空间的集合。更一般地，如果一族向量空间以 M 为参数，并且满足局部乘积条件，就称为 M 上的一个向量丛。

一个基本问题是：这样的丛在整体上是不是一个乘积空间？上面的讨论说明了，当 $\chi(M) \neq 0$ 时，切丛不是乘积空间，因为如果是乘积空间，就会存在一个处处不为 0 的连续向量场。空间之中存在局部是乘积而整体不是乘积这种空间（例如当 $\chi(M) \neq 0$ 时的 M 的切丛）决不是容易想象的；几何学从而进入更深刻的阶段。

刻画一个向量丛与乘积空间的整体偏差的第一组不变量是所谓上同调示性类。欧拉-庞加莱示性数是最简单的示性类。

高斯-博内公式(4)（见第四节）在 Σ 没有边界时形式特别简单：

$$\iint K \mathrm{d}A = 2\pi\chi(M)。 \tag{4a}$$

这里 K 是高斯曲率，$\mathrm{d}A$ 是面积元。公式(4a)是最重要的公式，因为它把整体不变量 $\chi(\Sigma)$ 表示成局部不变量的积分。这也许是局部性质与整体性质之间的最令人满意的关系了。这个结果有一个推广。设

$$\pi: E \to M \tag{13}$$

是一个向量丛。切向量场的推广是丛的截面，也就是一个光滑映射 $s: M \to E$，使得 $\pi \circ s$ 是恒同映射。因为 E 只是一个局部乘积空间，对 s 微分就需要有一个附加结构，通常叫做一个连络。所导出的微分称为协变微分，一般不是交换的。曲率就是协变微分非交换性的一种度量。曲率的适当组合导致微分形式，在德·拉姆理论的意义下，它代表上同调示性类，而高斯-博内公式(4a)是它的最简单的例子[13]。我相信，向量丛、联络和曲率等概念是如此基本而又如此简单，以致任何多元分析的入门教科书都应包括这些概念。

九、椭圆型微分方程

当 n 维流形 M 有黎曼度量时，则有一个算子 $*$，它把一个 k 次形式 α 变成一个 $(n-k)$ 次形式 $*\alpha$。这相当于对切空间的线性子空间取正交补。由算子 $*$ 和微分 d，我们引进余微分(codifferential)

$$\delta = (-1)^{nk+n+1} * \mathrm{d} * \tag{14}$$

和拉普拉斯算子

$$\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}。\tag{15}$$

算子 δ 把一个 k 次形式变成一个 $(k-1)$ 次形式，Δ 把一个 k 次形式变成一个 k 次形式。如果一个形式 α 满足

$$\Delta\alpha = 0, \tag{16}$$

它就称为调和的。零次调和形式就是通常的调和函数。

公式(16)是一个二阶的椭圆型偏微分方程。如果 M 是闭的，公式(16)的全部解构成一个有限维向量空间。根据霍奇的一个经典定理，解空间的维数恰好是第 k 个贝蒂数 b_k。再从公式(12)推出，欧拉示性数可写成

$$\chi(M) = d_e - d_o, \tag{17}$$

这里 d_e 和 d_o 分别是偶次和奇次调和形式的空间的维数。外微分 d 本身是一个椭圆算子，公式(17)可看作是用椭圆算子的指数来表示 $\chi(M)$。对于任何线性椭圆算子来说，它的指数等于解空间的维数减去伴随算子的解空间的维数。

在用局部不变量的积分表示椭圆算子的指数这一方面，阿蒂亚-辛格指数定理达到了顶峰。许多著名的定理，例如霍奇指标定理、希策布鲁赫指标定理和关于复流形的黎曼-罗赫定理，都是它的特殊情形。这项研究的一个主要副产物是确认了考虑流形上伪微分算子的必要性，它是一个比微分算子更一般的算子。

椭圆型微分方程和方程组是与几何十分紧密地纠缠着的。一个或多个复变元的柯西-黎曼微分方程是复几何的基础。极小流形是求极小化面积的变分法问题中欧拉-拉格朗日方程的解。这些方程是拟线性的。“最”非线性的方程也许是蒙日-安培方程，它在好几个几何问题中都是重要的。近年来在这些领域里取得了很大的进展[14]。由于分析这样深地侵入几何，前面提到过的分析学家伯克霍夫的评论看来更令人不安了。然而，分析学是绘制矿藏的全貌，而几何学是寻找美丽的矿石的。几何学建筑在这样的原则上：并非所有的结构都是相等的，并非所有的方程都是相等的。

十、欧拉示性数是整体不变量的一个源泉

概括起来,欧拉示性数是大量几何课题的源泉和出发点。我想用下面的图 8 来表示这关系。

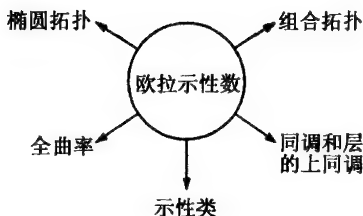


图 8

十一、规范场论

本世纪初,由于爱因斯坦的相对论,微分几何一度变成人们注视的中心。爱因斯坦企图把物理现象解释为几何现象,并构造一个适合于物理世界的几何空间。这是一个十分艰巨的任务,也不清楚爱因斯坦关于引力场和电磁场的统一场论的学说是否已成为定论。前面提到过的向量丛的引进,特别是向量丛中的联络和它们的示性类,以及它们与曲率的关系,开阔了几何的视野。线丛(纤维是一条复直线)的情况提供了外尔的电磁场规范理论的数学基础。以对同位旋(isotopic spin)的理解为基础的杨-米尔斯理论是非交换的规范理论的第一个例子。杨-米尔斯理论的几何基础是带有酉连络的复平面丛。统一所有的场论(包括强、弱相互作用)的尝试近来已集中到一个规范理论上,也就是一个以丛和连络为基础的几何模型。看到几何和物理再次携起手来,是十分令人满意的。

丛、连络、上同调和示性类都是艰深的概念,在几何学中它们都经过长期的探索和试验才定形下来。物理学家杨振宁说[15]:“非交换的规范场与纤维丛这个美妙理论——数学家们发展它时并没有参考物理世界——在概念上的一致,对我来说是一大奇迹。”1975 年他对我讲:“这既是使人震惊的,又是使人迷惑不解的,因为你们数学家是没有依据地虚构出这些概念来的。”这种迷惑是双方都有的。事实上,E. 威格纳说起数学在物理中的作用时,曾谈到数学的超乎常理的有效性[16]。如果一定要找一个理由的话,那么也许可用“科学的整体性”这个含糊的词儿来表达。基本的概念总是很少的。

十二、结 束 语

现代微分几何是一门年青的学科。即使不考虑相对论和拓扑学给它的很大促进,它的发展也一直是连续不断的。我为我们说不清它是什么而高兴。我希望它不要像其他一些数学分支那样被公理化。保持着它跟数学中别的分支以及其他科学的许多领域的联系,保持着它把局部和整体相结合的精神,它在今后长时期中仍将是一片肥沃的疆域。

用函数的自变数的数目或数学所处理的空间的维数来刻画数学的各个时期,可能是很有意思的事。在这个意义上,19 世纪的数学是一维的,而 20 世纪的数学是 n 维的。由于多维,代数获得了十分重要的地位。所有已知流形上的整体结果的绝大多数是同偶维相关的。特别地,所有复代数流形都是偶维实流形。奇维流形至今还是神秘的。我大胆地希望,它们在 21 世纪将受到更多的注意,并可在本质上被搞清楚。近来,W. 瑟斯顿[17]关于三维双曲流形的工作以及丘成桐、W. 米克斯和 R. 舍恩关于三维流形的闭最小曲面的工作都已经大大地弄清楚了三维流形及其几何。几何学中的问题之首可能仍然是所谓庞加莱猜测:一个单连通三维闭流形同胚于三维球面。拓扑和代数的方法至今都还没有导致这个问题的解决。可以相信,几何和分析中的工具将被发现是很有用处的。

参 考 文 献

[1] Veblen O, Whitehead J H C. *Foundations of Differential Geometry*. Cambridge, 1932: 17

[2] Cartan E. *Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne*, Congrès Inter. Math., Oslo, 1936, Tome I: 96

[3] Birkhoff G D. *Fifty Years of American Mathematics*. Semi-centennial Addresses of Amer. Math. Soc. 1938: 307

[4] Weil A. *S. S. Chern as friend and geometer*. In: *Chern*, *Selected Papers*. Springer Verlag, 1978

[5] Whitney H. Comp. Math. 1937,**4**: 276(译者注: Max N.L.主持制成格劳斯坦-惠特尼定理的科教影片 *Regular homotopy in the plane*,参看 Amer. Math. Monthly 1978,**85**: 212.)

[6] Pohl W F, Roberts G W. J. Math. Biol. 1978,**6**: 383

[7] White J H. American J. of Math. 1969, **91**: 693; Fuller B. Proc. Nat. Acad. Sc., 1971, **68**: 815; Crick F. Proc. Nat. Acad. Sc. 1976,**73**: 2639

[8] Smale S. Transactions AMS,1959,**90**: 281;并参看 Phillips A., Scientific American 1966,**214**: 112; Max N. L.主持制成此事实的科教影片,由 International Film Bureau, Chicago, Ill.发行

[9] Weyl H. *Philosophy of Mathematics and Science*. 1949: 90

[10] Einstein A. In *Library of Living Philosophers*. Vol.1: 67;中译文见《爱因斯坦文集》第一卷第 30 页,1977 年

[11] Hadamard J. *Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton 1945: 115

[12] Godement R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Paris, Hermann 1958

[13] Chern S. *Geometry of Characteristic Classes*. Proc. 13th Biennial Sem. Canadian Math. Congress 1972: 1

[14] Yau S T. *The rôle of partial differential equations in differential geometry*. Int. Congress of Math., Helsinki 1978

[15] Yang C N. *Magnetic Monopoles, Gauge Fields, and Fiber Bundles*. Marshak Symposium 1977. 中译文见《自然杂志》第 2 卷第 10 期, 1979 年

[16] Wigner E. *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*. Communications on Pure and Applied Math. 1960, **13**: 1

[17] Thurston W. *Geometry and Topology in Dimension Three*, Int. Congress of Math., Helsinki 1978

58. 广义相对论和微分几何

这是作者于 1979 年 3 月在普林斯顿举行的“爱因斯坦诞生 100 周年纪念会”上的演讲。由胡和生译成中文后发表于《自然杂志》第 3 卷第 4 期，1980 年。

我是作为一个微分几何学者来谈谈广义相对论令人敬佩的结构。如我所理解，广义相对论属于物理学，它的基础是物理实验。几何学的目标应该是研究空间。几何学的研究是由传统和持续性所指导的，其评价标准是数学的创造性、简洁、深刻以及它们的良好的结合和协调。因此几何学有更大的自由并可略事沉醉于想像中的课题。但是在历史上，它也曾被突然惊醒，发现这些抽象的对象一贯和现实密切相关。微分几何和广义相对论的关系就提供了这样的一个事例。

广义相对论诞生于 1915 年。微分几何早期等同于微积分，导数和切线、积分和面积曾被看成是同样意义的对象。微分几何作为独立的学科诞生于 1827 年。这一年高斯发表了他的《曲面的一般研究》(Disquisitiones circa superficies curvas)，在其中，他以二次微分形式为基本工具，奠定了二维的局部微分几何的基础。即使高斯也没有能预见到，这理论的四维推广会成为引力论的基础。

一、爱因斯坦以前的微分几何

在 1854 年的一篇历史性的文章《论几何学的基础假设》中，黎曼将高斯的工作推广到高维，并打下了黎曼几何的基础。在文章中他首先引进 n 维流形的概念，其中的点用 n 个实数作为坐标来描述。这是从高斯以来的巨大的一步，因为高斯的弯曲曲面是放在三维欧氏空间中的，而不是内在的。爱因斯坦对数学的看法是纯正的，他难于接受黎曼这样的概念。从 1908 年狭义相对论到 1915 年广义相对论，花了他 7 年功夫，他举出下面的原因：“为什么还需要 7 年才能建立广义相对论呢？主要原因在于不那么容易从坐标必须有一个直接的尺度意义这一概念中解脱出来。”[1]

黎曼几何中的基本问题是微分形式的问题：在两个不同坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 与 $x'^1, \cdots, x'^n$ 中给定两个二次微分形式：

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k, \qquad 1 \leqslant i, k \leqslant n, \tag{1}$$
$$ds'^2 = \sum_{i,k} g'_{ik} dx'^i dx'^k,$$

求存在坐标变换

$$x'^i = x'^i(x^1, \cdots, x^n), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2}$$

将一个微分形式变到另一个的条件。这个问题于 1869 年由 E. 克里斯多费尔及 R. 李普希茨解决了。克里斯多费尔的解包含了以他的名字定名的记号及协变微分的概念。在此基础上，1887～1896 年间里奇发展了张量分析，这在广义相对论中起了基本的作用。里奇和他的学生 T. 列维-齐维塔，在历史性的研究报告《绝对微分法及其应用》(Mathematische Annalen, 1901)中，对里奇计算法作了一个综述。克里斯多费尔曾在苏黎世的高等工业学校任教(后来爱因斯坦是这里的学生)，因而对意大利的几何学者产生了影响。注意到今年是他的 150 周年生日，这或许是使人感兴趣的。

与这些发展同样重要的是，在世纪转折时期微分几何学的主要活动集中于欧氏空间的几何，这继承着欧拉与蒙日的传统。一个代表性的工作是达布的四卷《曲面论》，它过去是而且现在仍然是一部经典著作。要几何学者从一个绝对的围绕空间(通常是欧氏空间)中解放出来是困难的。

大约与克里斯多费尔-李普希茨解决形式问题同时，F. 克莱因在 1871 年阐述了埃尔朗根纲领。这就是把几何学定义为研究有连续自同构群的空间，例如欧氏空间具有刚体运动群，射影空间具有射影直射变换群等。埃尔朗根纲领用群论统一了几何，在发表后的半个世纪内成为几何学的指导原理。在应用上，它可以从已知几何结果中导出新的、看上去没有关系的结果(作为群的同构的推论)。索菲斯·李的线性球变换是一个有名的例子。

克莱因的埃尔朗根纲领与狭义相对论完美地相配合，狭义相对论中的一个原理是洛伦兹群下场方程的不变性，这导致了克莱因这位处于世纪转折时期最有影响的德国数学家成为狭义相对论最早的支持者之一。洛伦兹结构在相对论中起了基本的作用。它还有几何学的解释。当我们研究空间中球的几何时，将球变为球的所有接触变换构成一个 15 参数的李群，而把平面变为平面的变换构成一个 10 参数的子群，后者与 4 个变量的洛伦兹群同构。所导致的几何学就是拉盖尔的球几何学[2]。

克莱因的埃尔朗根纲领的伟大成功自然地引起了克莱因空间或现在称之为齐性空间中的微分几何的研究。特别地，射影微分几何起始于 1878 年阿尔方的学位论文，后来从 1906 年起为 E.J. 威尔辛斯基的美国学派所发展，从 1916 年起为 G. 富比尼的意大利学派所发展。

20世纪初,整体微分几何处于摇篮时期。1909年,马科帕迪阿亚阐述了四顶点定理。冯·迪克在1888年从高斯-博内公式导出拓扑的结论:一个闭的有向曲面的高斯曲率的积分等于$2\pi\chi$,这里χ是曲面的欧拉示性数。希尔伯特以独特的预见在1901年写了关于常数高斯曲率的曲面一文,在文中他给出了利布曼定理即具有常数高斯曲率的闭曲面必为球的一个新证明,还证明了定理(希尔伯特定理):具负常数曲率的完备曲面不能到处正则。在希尔伯特的辅导下,佐尔在1903年发现,非球的旋转闭曲面的所有测地线都是闭的。在动力学的推动下,庞加莱与G.D.伯克霍夫证明了在凸曲面上存在闭测地线。

微分几何的最终目的是整体的结果。但是,局部微分几何不能减缩到最低限度,因为每个整体结果必须有一个局部的基础。为使整体微分几何有一个系统的发展,必须打下它的基础。这必须从拓扑中来。广义相对论供给了动力。

二、广义相对论的影响

爱因斯坦建立广义相对论时,有效的数学工具是以里奇计算法来论述黎曼几何学。爱因斯坦引进了有用的和式约定。对微分几何的影响是令人震动的。黎曼几何成为中心的课题。我们注意到斯豪滕、列维-齐维塔、E.嘉当和艾森哈特等人关于黎曼几何的权威著作几乎都出现在1924~1926年期间。

这些发展立即得到推广。很快就清楚,在应用黎曼几何于相对论时,不是黎曼尺度本身而是列维-齐维塔平行移动起着关键的作用。H.外尔在他的名著《空间、时间、物质》(1918)中引进了仿射联络的概念。这是一个可用来定义平行移动和协变微分的结构,不必需是黎曼结构。外尔的联络是对称的或无挠率的。

E.嘉当在他的主要论文《仿射联络的流形及广义相对论理论》(1923~1924)中给出仿射联络的权威性论述以及它向有挠率联络的推广。这篇文章当时并未受到理所应得的注意,原因很简单:因为它走在时间的前头。因为它比仿射联络论更丰富。它的思想可以容易地推广到任何李群的纤维丛的联络理论中去,对这理论,里奇计算法已不能适应了。文章还说明为什么爱因斯坦的理论是牛顿理论的直接推广。特别地,可以举出下列贡献:

(a) 引进了结构方程,并将比安基恒等式解释为对结构方程进行外微分后所得的结果。

(b) 认识到曲率是一个张量值的二次外微分形式。

用几何的话来说,仿射联络是一族仿射空间(即纤维),它们由一个空间(基空间)所参数化,使得这族仿射空间是局部平凡的,并且有一个把纤维沿着基空间的曲线"展开"的法则,使线性关系得以保持。类似地,我们可以把克莱因空间当作纤维而以作用于克莱因空间的李群来代替完全线性群,并且也有一个对应的展开法

则。嘉当称这样的结构为一般空间(espace généralisé)。一般来说，这个联络是非和乐的(non-holonomic)，即展开依赖于基空间的曲线。换句话说，沿一条闭曲线作展开时，空间并不回到原来的位置，它的变差是由联络的曲率来度量的。显然，克莱因空间本身是一个曲率恒等于0的一般空间。

在克莱因制订埃尔朗根纲领时，已观察到黎曼几何并不包括在内，因为一个一般的黎曼空间除恒等变换外并不含有其他等长变换。从嘉当的观点来看，黎曼空间是一个以欧氏空间为纤维的空间，且具有列维-齐维塔联络。这解决了微分几何中的一个基础的问题，因为这样就有了一个概念，它包括了克莱因空间、黎曼空间以及这两种空间的推广。

几何结构往往以一个非直观的形式给出。通常它或是一个由积分所定义的尺度，或是由一组微分方程所定义的子流形族。两个最熟习的例子是黎曼尺度和由二阶常微分方程所定义的道路。在这样的空间定一个联络不是一个容易的问题。事实上，就是黎曼空间的列维-齐维塔联络的定义也已相当不平凡了。如所期望，道路空间几何学(E. 嘉当、O. 维布伦、T.Y. 托马斯)涉及到射影联络。

这些发展就是通常所说的非黎曼几何。广义相对论中也有平行的发展。狭义相对论用于电磁场，广义相对论用于引力场，统一场论是两者的结合，它的需要是清楚的。1918年，H. 外尔以他的规范场论走出了最初重要的一步。外尔利用一个具有相似变换群的一般空间，但被发现它在物理上是站不住的。现在了解到，他的规范群不能是相似变换群所成的非紧致群，而是紧致的圆群。规范理论的最近发展将在第四节中讨论。

跟随外尔之后，又提出了其他一些统一场理论，其中有卡卢察-克莱因，爱因斯坦-迈尔(1931)和维布伦的相对论的射影理论(1933)。一个共同特征是为了电磁场而引进五维空间(维布伦的理论是四维的，但是切射影空间有五维的齐次坐标)。维布伦的射影理论在几何上是简单的，他的出发点是空间的路径，它们是带电粒子的轨线。

爱因斯坦本人在他的整个晚年从事研究统一场论，经常有合作者。在这方面，我想插进一点有关个人的补白。1943年，我从中国西南部的昆明到普林斯顿研究所，那是第二次世界大战激烈进行之时，他以非常的温暖和同情来欢迎我。我能够时常同他讨论各种课题，包括广义相对论在内，是最大的幸福。我立即看到他的问题的极端困难以及数学与物理之间的区别。数学中有名的问题通常是已经提得很明确的，但在物理上，问题的提法也是问题的一部分。

爱因斯坦对最后答案有一个严格的标准，他不满足于上面提到的建议，事实上也不满足于其他许多建议。他尝试各种可能为统一场论奠基的几何结构。在其中有：

1. 非对称张量 g_{ij}(见《相对论的意义》，第5版，1955，附录Ⅱ)；

2. 具有埃尔米特结构的四维复空间;

3. 比黎曼空间更一般的度量空间。

一般度量空间的几何为 K. 门杰所建立与研究,对此,爱因斯坦的朋友 K. 哥德尔给出重要贡献。在情况 1 中,g_{ij}唯一地分解为对称与反对称的两部分。如果前者非退化,则结构等价于一个具有二次外微分形式的拟黎曼结构。按照 g_{ij}的对称部分的符号是 + + + + 或 + + + -,这个拟黎曼结构是黎曼式的或是洛伦茨式的。情况 2 是密切地与复代数流形及多复变函数有关,在最近数十年中,它们是大大地发展着的数学领域。

三、正质量猜测,极小曲面,正数量曲率的流形

爱因斯坦之后的时代,广义相对论重视了整体理论(或大尺度时空),在这方面有很大的进展。来源是宇宙论,爱因斯坦本人在这方面很活跃,但是整体微分几何的发展所起的影响是毫无疑义的。宇宙被视为一个四维连通的洛伦兹流形,物理与几何比以往更缠结在一起了。不过,纯粹的几何问题通常较简单,其中的两个原因是:几何学为毕达哥拉斯式的几何或黎曼几何,几何学家可以用假定空间的紧致性来理想化。

很自然地,要把一给定瞬时的数据记录成“数据集”,数据集是一个超曲面 Σ,其上到处有类时的法线(因而诱导尺度为黎曼尺度)。这样四维流形的超曲面理论(它是古典曲面论的直接推广)在广义相对论中起了一定的作用。Σ 的局部的不变量由两个二次微分形式即第一、第二基本形式给出。第二基本形式系数的迹称为平均曲率,平均曲率为零是极大超曲面的特征。另一方面,Σ 上的诱导尺度有一个数量曲率,所有这些量均由高斯-科达齐方程联系。由爱因斯坦场方程推出,质量密度 μ 及动量密度 J^a 是第一、二基本形式系数及其协变导数的组合。因为动量密度必须不超过质量密度,我们有

$$\mu \geqslant \left| \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant 3} J^a J_a \right|^{\frac{1}{2}} \geqslant 0, \tag{3}$$

在极大超曲面上,数量曲率是非负的。

如果对某些紧致集 C,$\Sigma - C$ 包含有限个连通分支 N_i,使得每个 N_i 微分同胚于 $\mathbf{R}^3$ 中一紧致集的余集,并且它的尺度渐近于尺度

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{M_i}{2r}\right)^4 \left(\sum_{1 \leqslant a \leqslant 3} (\mathrm{d}x^a)^2 \right), \tag{4}$$

式中 r 是到原点的距离,那么相应的数据集称为渐近平坦的。在施瓦茨席尔德尺度的情况下,M_i 符合于施瓦茨席尔德质量,因而称为 N_i 的总质量。正质量猜测

为：对于一个渐近平坦的数据集，每个连通分支 N_i 有总质量 $M_i \geqslant 0$，并且如果一个 $M_i = 0$，则这个数据集是平坦的（即诱导黎曼尺度是平坦的，且第二基本形式是0）。这个猜测在广义相对论中具有根本的重要性。由于物理上的理由，爱因斯坦假定它是正确的[4]。

在 Σ 是极大超曲面的假定下，1978 年，R. 舍恩与丘成桐[3]最一般地证明了它。这个工作的全部经过是相对论学家与微分几何学家接触与合作的一个完美的例子。1973 年在斯坦福大学举行的美国数学会微分几何暑期研究会上，R. 格罗赫被邀请作一系列广义相对论的报告。正质量猜测显然是未解决的问题之一。为使它的陈述简单化，格罗赫列出一些有引导性的猜测，其中一个如下："在三维实数空间 $\mathbf{R}^3$ 中，考察一个在紧致集之外是平坦的黎曼尺度，如果数量曲率 $\geqslant 0$，则这尺度是平坦的。"[5]将这紧致集围在一个大盒子中并把相对两面看作恒等，J. 卡兹登与F. 沃纳把猜测改写如下："数量曲率 $\geqslant 0$ 的三维环面上的黎曼尺度是平坦的。"格罗赫指出："广泛地觉察到，证明了这些特殊情况中的几个，就可以推广到整个猜测的证明。"

格罗赫的这个猜测落到微分几何的王国中；舍恩与丘成桐首先证明了它，证明的思想是利用闭的极小曲面。事实上，从面积的第二变分的公式可见，在一个具正数量曲率的三维紧致定向黎曼流形中，一个具有正亏格的闭极小曲面是不稳定的，就是说在微扰下它的面积还会变小。另一方面，三维环面有一个大的基本群（同构于 $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$），并且它的第二个贝蒂数等于 3。这些拓扑性质应导出在非零的闭曲面同伦类中存在一个具有最小面积的闭正则曲面。这是下述结果的推广：在紧致黎曼流形上，每个非零的闭曲线同伦类中有一条最短的光滑闭测地线。对于极小曲面，相应结果的证明当然更为微妙。舍恩与丘成桐接着就证明了极大超曲面的正质量猜测。稍后这个结果被推广到高维去。

这些发展接触到极小曲面和正数量曲率流形，这些课题对微分几何学者来说是很亲切的。

极小曲面的早期研究集中于普拉托问题：给定 $\mathbf{R}^3$ 中一闭曲线，要找出它所围成的面积最小的曲面。只是近年来，注意力才指向研究一个给定流形（例如 n 维欧氏空间 E^n 或 n 维单位球 S^n）中的闭的或完备的极小曲面。这些研究推广了闭测地线的性质，它们在黎曼流形的几何学与拓扑学中已处于重要的地位[6]。闭的与完备的极小曲面，特别是正则曲面，必然是一个更丰富的甚至更有趣的对象。将极大超曲面取为数据集是很自然的。最近，J. 萨克斯和 K. 乌伦贝克证明了：一个紧致单连通的黎曼流形中总可浸入一个极小的二维球。

正数量曲率流形的基本问题是：怎么样的紧致流形可以有一个具正数量曲率的黎曼尺度？对这个问题的兴趣的提高是由于维数 $\geqslant 3$ 的紧致流形均可以具有负数量曲率的黎曼尺度。这个结果的证明可以分成两部分：第一，流形可以给定一

个黎曼尺度，它的全数量曲率（即数量曲率的积分）$\leqslant 0$。第二，后者可以共形变形为具负常数的数量曲率。另一方面，由于研究调和旋量，A. 利希尼罗威兹在 1963 年证明了，如果一个紧致旋量流形有一个数量曲率是正的黎曼尺度，则它的 $\hat{A}$ 亏格等于零。舍恩-丘成桐的工作证明：三维环面不能有正数量曲率的黎曼尺度。对 n 维环面，也已被证明有同样的结论（M. 格罗莫夫、B. 劳森、R. 舍恩、丘成桐）。在广义相对论的推动下，对能带有正数量曲率黎曼尺度的所有紧致流形，这些作者已接近于给出它们一个完全的拓扑的描述。

对于里奇曲率或截面曲率，也可提出同样的问题。S. 迈尔斯的一个经典的定理说：一个有正里奇曲率的完备黎曼流形必须是紧致的，因而必须有一个有限基本群。要求一黎曼流形具有正截面曲率的这一条件是更强些，预期这样的流形是很少的。秩 1 的紧致对称空间有这个性质，但是还有其他的一些分散的情况。对有正截面曲率的紧致黎曼流形的完全拓扑的描述看来是困难的。

四、规范场理论

1918 年，H. 外尔在他的《引力和电》一文中提出了规范场理论。其思想是运用一个二次微分形式及一个线性微分形式来定义：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j, \\ \varphi &= \sum_i \varphi_i dx_i, \end{aligned} \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant 4, \tag{5}$$

但是这两个形式还容许规范变换：

$$\begin{aligned} ds^2 &\longrightarrow \lambda ds^2, \\ \varphi &\longrightarrow \varphi + d\,\lg\lambda, \end{aligned} \tag{6}$$

这里 φ 是电磁势，它的外微分 $d\varphi$ 是电磁场强度或法拉第（因为法拉第对电磁学的重要贡献，他的名字就用作电磁场强度），这是统一场论最初的尝试。爱因斯坦反对 ds^2 的不定性，但对外尔的建议的深刻与大胆表示了赞赏。

如果我们将外尔的理论解释为基于洛伦兹流形上的圆丛的几何学[7]，则当时及其后的所有反对意见都会消失。于是容许规范变换的形式 φ 可以视为在圆丛上所定义的联络，并且 ds^2 保持不变，这就消除了爱因斯坦的反对意见。

规范场理论的数学基础在于向量丛及其上的联络。纤维丛或纤维空间的概念具有整体的特性，由拓扑而产生。最初它是寻找流形的新例子的一个尝试（H. 霍特林（1925）、H. 赛费特（1932））。纤维空间是局部的乘积空间而不是整体的乘积空间，这种区别的存在是一个奥妙的数学事实。一直到发现了对纤维丛作出区别的不变量，甚至于证明了整体存在着非平凡的纤维丛时，纤维丛理论才得到发展。最

早的这种不变量是 H. 惠特尼及 E. 斯蒂弗尔在 1935 年引进的示性类。纤维丛的拓扑研究放弃了代数结构,但是在应用上,具有线性结构的向量丛却更为有用。粗糙地说,流形 M 上的一个向量丛 $\pi: E \to M$ 是一族向量空间,它们由 M 所参数化,使得从局部来看它是一个乘积。对应于 $x \in M$ 的向量空间 $E_x = \pi^{-1}(x)$ 称为点 x 的纤维。例子是 M 的切丛以及联系在其上的所有的张量丛。一个更平凡的丛是乘积丛 $M \times V$,其中 V 是一个固定的向量空间,而 $(x, V), x \in M$,是在 x 点的纤维。一个向量丛被称为实的或复的是按照纤维是实的或复的向量空间而定,它的维数就是纤维的维数。

重要的一点是,纤维上的线性结构保持着一种意义,使完全线性群对纤维的连接起着基本的作用,这个群称为结构群。如果纤维上已给一个内积,则一个实(或复)向量丛称为黎曼型(或埃尔米特型)的。在这种情形,结构群化约为 $O(n)$(或 $U(n)$),n 是纤维的维数,这个丛称为 $O(n)$丛(或 $U(n)$丛),类似地,还有 $SU(n)$丛这个概念。

对于每点 $x \in M$,连续且光滑地附上纤维 E_x 的一点,称为丛 E 的一个截面。换言之,截面是一个连续映照 $s: M \to E$,使得 $\pi \circ s$ 是恒等映照。这个概念是向量值函数与切向量场的一个自然的推广。为了对 s 进行微分,我们需要在 E 上有一个"联络"。这样就能定义协变导数 $D_X s$(X 是 M 上的一个向量场),它是 E 上的一个新的截面。协变微分一般是不可交换的,即对 M 的两个向量场 X, Y, $D_X \circ D_Y \neq D_Y \circ D_X$。对这个不可交换性加以"度量",给出了联络的曲率,这是第二节中所描述的非和乐的几何概念的一个解析的形态。根据 E. 嘉当,将曲率当为矩阵值的二次外微分形式是重要的。它的迹是一个闭的 2-形式。更一般地,它的所有 k 阶主子式之和是一个闭的 $2k$-形式,它被称为示性形式(按照丛是实的或复的分别是庞特里亚金形式或陈省身形式)。根据德·拉姆理论,$2k$ 次的示性形式决定一个维数为 $2k$ 的上同调类,因而称为示性类。示性形式依赖于联络,但是示性类只依赖于丛。它们是丛上最简单的整体不变量。向量丛的非平凡性需要通过协变微分来认识,它们的不可换性解释了最初的整体不变量,这一定是自然界的作用。示性类的这样的导出强调了它的局部性质,且示性形式比示性类包含更多的信息。当 M 是一个有定向的紧致流形时,最高维数的示性类(即其维数等于 M 的维数)的积分给出了示性数。当它是一个整数时,被称为一个拓扑的量子数。

人们发现,这些微分几何概念很可能是统一场论的数学基础。外尔的规范理论处理圆丛或 $U(1)$丛,也就是一维的复埃尔米特丛。

在研究同位旋量时,杨振宁-米尔斯所用的本质上是 $SU(2)$丛的一个联络。这是非阿贝尔规范场理论的第一个实例。从联络可以定义"作用量"。四维欧氏空间 R^4 上的 $SU(2)$丛中使作用量取最小值的联络被称为瞬子。它的曲率有一个简单的表达式,称为自对偶关系。从而瞬子是杨-米尔斯方程的自对偶解。当空间 R^4

紧致化为四维球 S^4 时,$SU(2)$从除一个同构外由一个拓扑量子数 k(k 是整数)决定。阿蒂亚、希钦和辛格证明[8],对给定的 $k>0$, S^4 上曲率自对偶的联络的集合(称为模或参数空间)是一光滑流形,其维数为 $8k-3$。用物理术语来说,这就是拓扑量子数 $k>0$ 的瞬子空间的维数。

阿蒂亚和沃德注意到,自对偶的杨-米尔斯场可以很好地纳入彭罗斯的“挠量”方案。他们把求所有自对偶解的问题转化为代数几何的问题:在复三维射影空间中全纯向量丛的分类问题。这个问题已由 K. 巴思、G. 霍罗克斯等人非常接近地研究过了,用了他们的结果,可以最终地找出所有自对偶解[9]。事实上,回到了物理,这些数学结果可以翻译成物理学家感到满意的显式公式[10]。

瞬子通过以下的结果表明它和爱因斯坦的关系。群 $SO(4)$局部同构于 $SU(2)\times SU(2)$,所以四维黎曼流形 M 上的黎曼度量通过投影给出一个 $SU(2)$丛的联络。M 为爱因斯坦流形的充要条件是这些联络为自对偶或反自对偶(依投影的方法而区分)[8]。

包括弱和强相互作用在内的一个令人满意的统一场论是否能通过非可换规范场论作出?这还有待研究。我们只须指出:丛和联络这两个几何概念是非常简洁的。我相信爱因斯坦会喜欢它们。

五、结 束 语

这个叙述还有许多明显的不完备之处。在彭罗斯和霍金的工作中集中地体现出来的关于奇点的重要研究这里并未涉及,这是一个最显然的不足之处。

最后,作为非本门的学者,我想表示我的希望:广义相对论将不局限于引力场。一个总体的统一场论,不论它将会是什么样的理论,一定会很接近于爱因斯坦的宏伟计划,现在已经有了更多的数学概念和工具可以利用。

参 考 文 献

[1] Einstein A. In: *Library of Living Philosophers*. **1**: 67; 中译文见《爱因斯坦文集》第一卷第30页,1976年。
[2] Blaschke W. *Differential geometrie*, *Bd*. Ⅲ. Springer, 1929
[3] Schoen R, Yau S T. Proc. NAS, USA. 1978, **75**: 2567; Comm. Math. Phys. 1979, **65**: 45; Proc. NAS, USA 1979, **76**
[4] Choquet-Bruhat Y, Fischer A E, Marsden J E. Il Nuovo Cimento. 1978
[5] Geroch R. Proc. Symp. in Pure Math., 1975, **27**, Pt. 2: 401
[6] Klingenberg W. *Lectures on Closed Geodesics*. Springer 1978
[7] Chern S. *Circle Bundles*. Geometry and Topology, Ⅲ Latin Amer. School of Math., Springer Lecture

Notes **597**, 1977: 114

[8] Atiyah M F, Hitchin N J, Singer I M. Proc. NAS, USA 1977, **74**: 2662; Froc. R. Soc. Lond. 1978, **A362**: 425

[9] Atiyah M F, Hitchin N J, Drinfeld V G, Manin Yu I. Phys. Lett. 1978, **65A**: 185

[10] Christ N H, Weinberg E J, Stanton N K. Phys. Rev. 1978, D**18**: 2013.

59. 漫谈微分几何

1979年6月25~29日，伯克利加利福尼亚大学为陈省身退休举行国际微分几何会议，本文是陈省身在晚宴后的即席讲话。原题为《Chern's After Dinner Speech》. 刊于《Mathematical Intelligencer》第2卷第2册，1979~1980年。中译文见《数学译林》第2卷第3期，1983年；白苏华、胡师度译，江嘉禾校。

我想，是英国作家毛姆说过这样一句话：年纪大有个好处，就是用不着去做你不想做的事。这句名言现在该打个问号了，因为我总是勉为其难地来应付一些宴会后的讲演。不过，用不了多久也就发现，这种讲演比写文章来得容易，所以我有勇气走到诸位朋友面前来。感谢各位让我唠叨几句。

从这次盛会至少可以断定，我们的会议是令人振奋而又卓有成效的。这样多的微分几何学家或者名誉微分几何学家荟萃一堂，在历史上大概从未有过。微分几何最开头是叫做"分析对几何的应用"，这是蒙日的书——第一本微分几何著作——的标题。很长一段时间内，这还是欧洲大学中这门课程的名称。多数美国大学里没有微分几何学家，即使有的话，也称为拓扑学家——这无疑是过奖了。微分几何的确有一个说明身份的问题。如果我们留意一下微分几何的历史，就不免产生这样的印象，许多重要的成就都是研究其他问题时的思想进一步发展的结果。微分几何并非高斯青年时代的爱好，他由于从事大地测量学与制图学的实际工作，才发表了"曲面的一般理论"这篇大块文章。其时，他已年逾半百，几乎就该开庆祝会了。他这篇文章有40页，而他讲数论的书却长达470页，对比鲜明。

黎曼的奠基性论文是他的 Habilitationsvortrag[①]。黎曼给他的兄弟写信说，他提出了三个题目，头两个准备得很充分，但高斯却挑选了第三个，所以他只好搞这个题目了。不过他健康状况不佳。这篇文章只是一个公式，就是在保角映射下常曲率黎曼尺度的公式。有一段时间，人们对黎曼超人的几何直觉感到惊异。后来黎曼的 Nachlass[②] 发表了，人们才发现这个直觉其实是一叠计算冗长的稿纸。后来，

① 德文：为得到教授职位所做的报告。——译注。
② 德文：遗著。——译注。

黎曼又写了第二篇论文,寄给法国科学院争取获奖。该文内容是黎曼曲率张量,但他未能获奖,因为据称写得不够详细。

庞加莱在其大作"Analysis situs"① (1895)中曾说:"有许多不同的东西会引起我们的注意;但只有最重要的才值得我们注意。高等几何中有些内容,例如有关 n 维曲面曲率之研究,并不是很有意思的……家有美景,何须远求。"这是当时对微分几何研究流行的苛刻评论。庞加莱接着发展了同调和同伦这些基本概念,包括现在叫做德·拉姆定理的论断,说这是高等几何并非无聊的例子。莱夫谢茨一定是深受影响;他对张量分析有类似的见解。他曾请我为 Annals 审查一篇张量分析的论文,我建议退稿,数月之后,他让我担任 Annals 的副主编。我想,这与我坚持高标准,至少是对别人坚持高标准颇有关系。

现今,关于联络谈论甚多。但是,大概没有什么人读过 E. 嘉当最基本的论文"Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisé"② (1923 ~ 1924)。该理论发展的结果,使它自动地扩充到具有李群结构的纤维丛的联络。嘉当必须以广义相对论为动力与依据;他没有纤维空间的概念,不会在底空间与纤维空间之间上下奔走。但他在底空间中所能达到的成就的确是卓越的。

微分几何的名字大概是意大利数学家最早使用的。我相信第一本以微分几何为名的书是比安基的"Lezioni di geometria differenziale"③,Pisa,1893。因此,微分几何是一门年轻的学科,我们对它肯定还非常无知。但是,我们正在对一个总是退却的敌人进行一场不流血的战斗。将会有许多奇迹出现。我始终相信,我们将继续得到许多乐趣。

最后,我要感谢我所有的朋友,有的来自远方,他们的出席是这次聚会成功而又愉快的唯一因素。这次庆祝会的筹备工作,从最初设想到最后实现,花了两年以上的时间,对那些为完成这件大事忘我献身、不懈努力、使我们享受到欢乐的朋友们,谨致谢意。我将不会忘记这个美好的夜晚,直到老耄之年。

① 拉丁文:位置分析,即今称拓扑学。——译注。
② 法文:论具有仿射联络的流形与广义相对论。——译注。
③ 意大利文:微分几何讲义。——译注。

60. 微分几何与理论物理

原载《理论物理与力学论文集》,科学出版社,1982 年。

我第一次看见周(培源)先生,是在 1930 年秋季,在清华。那年我从南开毕业,投考清华研究院数学系,考试科目中有“力学”,周先生是命题和阅卷人。他一见我就说:“我看过你的考卷。”1937 年我们在西南联大同事,我还旁听过他的“电磁学”。

微分几何和理论物理都用微积分作工具,一者研究几何现象,一者研究物理现象。后者自然广泛些。但任何物理现象都在空间发生,所以前者又是后者的基础。两者都用推理的方法,但理论物理还须有试验来支持。几何不受这个限制,因此选择问题比较自由,但推理要有数学的严格性。这个自由度把数学推到新的领域。有数学经验和远见的人,能在大海航行下,达到重要的新的领域。例如,广义相对论所需要的黎曼几何和规范场论所需要的纤维空间内的联络,都在物理应用前为数学家所发展,这个“殊途同归”的现象真令人有神秘之感。

微分几何与理论物理的关系非言可尽。本文只略举几点,间附拙见,请大家指教。

1. 动力学和活动标架

在动力学中要描写一个固体的运动,就把一个标架坚固的装在固体上,而描写标架的运动。在三度空间的所谓标架指一点 x,及经过 x 的互相垂直的单位矢量 $\boldsymbol{e}_i, i = 1,2,3$。如 $\boldsymbol{x}$ 亦代表点 x 的坐标矢量,则有

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_i p_i(t)\boldsymbol{e}_i, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_j q_{ij}(t)\boldsymbol{e}_j, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant 3,$$

其中 t 是时间,而

$$(2)\qquad q_{ij}(t) + q_{ji}(t) = 0.$$

函数 $p_i(t), q_{ij}(t)$完全描写了标架及固体的运动。

动力学和空间的曲线论有密切关系,后者甚至可看为前者的特例。要把这个方法应用到曲面论,就须考虑两参数族的标架。这个计划为法国大几何学家 G. 达布(1842 ~ 1917)成功地和精彩地完成。他的大作 Théorie des Surfaces 四册,是微分

几何的经典。

把这个活动标架法发扬光大的是埃利·嘉当(1869 ~ 1951)(高斯、黎曼和嘉当被公认为历史上三个最伟大的微分几何学家)。现在,活动标架法已成为微分几何中极为重要的办法。试述其含义如下:

在多参数标架族时,相当于方程式(1)的是偏微分方程式,它的系数适合积分条件。表示这些条件的最好方法,是用外微分算法。把(1)和(2)两式写为

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_i \omega_i \boldsymbol{e}_i, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \sum_j \omega_{ij}\, \boldsymbol{e}_j, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant 3,$$

$$\text{(4)}\qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

其中 ω_i,ω_{ij}为参数空间的一次微分式。最广泛的情形是参数空间是全体标架所成的空间。这个空间是六维的,因为定 x 需要三个坐标,而以 x 为原点的标架成三参数族。固定一个标架,有唯一个运动,把它变为另一标架。所以全体标架所成的空间与运动群同胚,记为 G。

求(3)式的外微分,则得

$$\text{(5)}\qquad \begin{cases} \mathrm{d}\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \\ \mathrm{d}\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{jk}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i,j,k \leqslant 3,$$

其中“∧”代表外积。这是群 G 的毛雷尔-嘉当方程式,与 G 的李代数乘法方程是对偶的。可见从动力学到活动标架,到李群的基本方程是一串自然的过程。

这个演变还可继续推进。爱因斯坦的广义相对论发表后,嘉当于 1925 年发表一文,文中发展广义仿射空间的理论,及它在相对论的应用。此文的一个结论是(5)式的推广:

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} \mathrm{d}\omega_i = \sum_i \omega_j \wedge \omega_{ji}, \\ \mathrm{d}\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant 3,$$

其中 Ω_{ij}是二次微分式,叫做曲率式,是三维黎曼几何的基本方程。

处理微分几何的一般方法是张量分析。它的基本观点是利用局部坐标的切矢量作标架。现在看来,这个约束弊多利少。但是张量分析简单明了,在初等的问题中,其功用是不可磨灭的。

2. 曲面论与孤立子及 σ-模型

在三维欧氏空间 E^3 内设曲面 S。于一点 $x \in S$,命 x 是它的坐标矢量,并命 ξ 表其单位法矢量,则 S 的不变量是两个二次微分式:

$$\text{(7)}\qquad \mathrm{I} = (\mathrm{d}\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{x}) > 0,\quad \mathrm{II} = -(\mathrm{d}\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

分别称谓第一及第二基本式,前者并且是正定的。第二基本式的两个特征值 k_i, $i = 1,2$, 称为 S 的主曲率。它们的对称函数

$$\text{(8)}\qquad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),\ K = k_1k_2$$

分别称为中曲率与全曲率(高斯曲率)。这些曲率有简单的几何意义,谅为熟知的事实。例如, $H = 0$ 的曲面是最小曲面。

中曲率或全曲率是常数的曲面显然有研究的价值。如 x,y,z 为 E^3 的坐标,而 S 有方程式

$$\text{(9)}\qquad z = z(x,y),$$

则

$$H = \text{const}\quad \text{或}\quad K = \text{const}$$

可表为函数 $z(x,y)$的二阶非线性的偏微分方程。求这样的曲面等于解相当的方程。例如,最小曲面 $H = 0$ 的方程是

$$\text{(10)}\qquad (1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0。$$

此方程是非线性椭圆式的。

另一重要的例子是 $K=$ 负常数,可假设为 $K = -1$。在这样的曲面上渐近曲线是不重合的实曲线。命 φ 为其夹角,则可在 S 上选择参数 u,t,使

$$\text{(11)}\qquad \varphi_{ut} = \sin\varphi。$$

这是有名的正弦-戈登(SG)方程。反之,如有 SG-方程的一解,可作出一个 $K = -1$ 的曲面。

由此解释,曲面的变换论,在偏微分方程论有重要的应用。它的根据是下面的贝克隆德定理:

设曲面 S,S^* 成对应,使连接对应点 $x \in S,x^* \in S^*$ 的直线为两曲面的公切线。命 r 为对应点间的距离,ν 为曲面在对应点法线的夹角。如 $r = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, 则 S 和 S^* 的全曲率同是 $-\sin\nu/r^2$($=$ 负常数)。

此定理使得我们从一常全曲率的曲面,造出同一常全曲率的曲面,即从 SG-方程的一解造出新解。

如释 $\varphi(u,t)$为直线 u 上的波动,t 为时间,则 SG-方程有孤立子解,而上述变换可引至新解,增减其孤立子个数。这样可得任意个孤立子的 SG-方程的解。

负常全曲率曲面在高度的一个推广是 E^{2n-1}($=(2n-1)$ 维欧氏空间)内的 n 维常曲率支流形。这种支流形相当于一偏微分方程组,可能是 SG-方程在高维的推广。滕楚莲和巴西女数学家特南布莱特证明了贝克隆德定理在高维的推广。

常中曲率的曲面或最小曲面在理论物理上有同样多的应用。如 $f: X \to Y$ 是两个黎曼流形间的映射,可以定义它的能(Energy) $E(f)$。这个泛函的临界映射称为调和映射。这是调和函数和最小支流形的推广。调和映射适合一组椭圆式的二阶偏微分方程。如果 X 是紧致的,调和映射是比较稀有的。因为它的出发点是变分原则,这些映射就可能在物理上有用。

从几何的观点讲,已知流形 X, Y ($\dim X < \dim Y$),如何把 X 嵌入或浸入 Y 成为最小子流形,是一极有兴味的问题,即使 $X = S^2$ 为二维球面,此问题亦不简单,在此假设下,早年 E. 卡拉比、陈省身和 L. 巴尔博扎研究了 $Y = S^n$ (n 维球面)的情形。1980 年物理学家 A.M. 丁和 W.J. 扎克热夫斯基确定了所有的调和映射 $f: S^2 \to P_n(\mathbf{C})$ (n 维复投影空间),称为 σ-模型。Y 为其他空间的情形,如 $SU(n)$, $Q_n(\mathbf{C})$(复二次超曲面),或 $G(n,k)$(格拉斯曼流形),其中的最小二维球面为何,亦为大家所渴欲了解的。此问题至今未全解决。

对于最小曲面数学分析上有强的“有理性(Regularity)”性质,即在某种边界条件下,有有理的或光滑的最小曲面存在,这个重要的结果在几何上有无数应用。在广义相对论 R. 舍恩和丘成桐用来证明所谓“正质量猜想”。

3. 规范场论

规范场论的数学基础是矢量丛的观念。这个演进在数学上是十分自然的:牛顿的微积分讨论函数 $y = f(x)$。我们可推广自变数为 m 维空间的坐标,因变数为 n 维空间的矢量,即得 m 变数的矢量值函数。通常也可把函数记为映射 $f: X \to Y$,其中 $X = \mathbf{R}^m$, $Y = \mathbf{R}^n$。这个映射可以表为一个“图(Graph)” $F: X \to X \times Y$, $F(x) = (x, f(x))$, $x \in X$。映射 F 的右端是两个拓扑空间的积。命 $\pi: X \times Y \to X$,使 $\pi(x,y) = x$, $x \in X$, $y \in Y$,则 F 合于性质 $\pi \circ F(x) = x$。

矢量丛的概念,在近代数学有决定的重要性,要点是把乘积 $X \times Y$ 易为空间 E,它只是局部的乘积。易言之,有空间 E 及映射 $\pi: E \to X$,使每点 $x \in X$ 有邻域 U 合于条件: $\pi^{-1}(U)$ 与 $U \times Y$ 是拓扑相等的。

局部乘积的空间是否必然是整体的乘积?即上述的 E 是否必与 $X \times Y$ 拓扑相等?这在数学上是一个极为微妙的问题,它的解答引至示性类(Characteristic Classes)的观念。(答案是 E 不必是 $X \times Y$。)

设矢量丛 $\pi: E \to X$。映射 $F: X \to E$ 合于条件 $\pi \circ F(x) = x$, $x \in X$,称为截面(Section)。截面的微分须要联络(Connection)。量度微分的非交换性是曲率。

规范场就是矢量丛的联络,物理学家称为规范势,曲率则称为 Strength。微分几何与理论物理真是“同气连枝,同胞共哺”了。

据我了解,一切物理的理论最终要“量子化(Quantization)”。在数学上我们需要研究无穷维的空间及分离(Discrete)现象。

4. 结论

我当然还需要提到广义相对论与黎曼几何的关系。没有相对论,黎曼几何是不易受数学界的重视的。

杨振宁先生曾用一个图来表示数学与物理的关系①。另作一图以结束此文。



① 参见 Chen-Ning Yang. *Fibre Bundles and the Physics of the Magnetic Monopole*. The Chern Symposium 1979, Springer-Verlag, 1980.

61. 微分几何的过去与未来

陈省身于1980年在北京大学讲授“微分几何”，讲课记录由陈维桓整理成书。两人合作，以《微分几何讲义》的书名，于1983年由北京大学出版社出版。这是陈省身为该书所写的文稿，作为“代序”。

微分几何的出发点是微积分：一条曲线的切线和微分是同一个概念。同样，一条封闭曲线所包围的面积的理论就是积分论。“微积分在几何上的应用”演变成曲线论及曲面论。微分几何初期作重要的贡献的，当推 L. 欧拉(1707 ~ 1783)和 G. 蒙日(1746 ~ 1818)。

微分几何的始祖是 C.F. 高斯(1777 ~ 1855)。他的曲面论建立了曲面的第一基本式所奠定的几何，并把欧氏几何推广到曲面上“弯曲”的几何。B. 黎曼(1826 ~ 1866)在1854年有名的演讲把这个理论推广到 n 维空间。黎曼几何就在此年出生。

黎曼的演讲直到他死后的1868年才发表，当即引起许多新工作来处理和推展他的新几何。主要的作者包括 E.贝尔特拉米、E.B.克里斯托费尔、R. 李普希茨；他们的论文都发表在1870年左右。克里斯托费尔是一位开拓的大师。他一度在瑞士的苏黎世任教授，因此影响及于意大利的数学家，有 L.比安基及 T.里奇。前者是第一个用“微分几何”作书名的(Lezioni di Geometria Differenziale. Pisa, 1893)；后者是“张量分析”的始祖。

黎曼几何之大受重视，由于爱因斯坦之广义相对论。爱氏把引力现象释成黎曼空间的曲率性质，因之，物理现象变成几何现象。微分几何的了解遂为理论物理学者所必需。

同在1870年 F. 克莱因发表了他的埃尔朗根纲领。这个计划把几何学定为一个变换群下的不变性质。视变换群的选择，我们有欧氏或非欧几何学、投影几何学、仿射几何学等等。这些空间内的支流形的研究成为相当的微分几何学。20世纪初期投影微分几何的研究相当活跃，领导者为美国的 E.J. 维尔钦斯基及意大利的 G. 富比尼，苏步青教授作过重要的贡献并指导了很多学生。在仿射微分几何作决定性工作的当推 W. 布拉施克。

把两种观点融合的是埃利·嘉当(1869～1951)。他的广义空间把联络作为主要的几何观念。他建立的外微分和他在李群的工作,是近代微分几何的两大柱石。

微分几何的主要问题是整体性的,即研究空间或流形的整个的性质,尤其是局部性质与整体性质的关系。高斯-博内公式(见第五章§4)就是一个例子。

要研究整个流形,流形论的基础便成为必要。流形内的坐标是局部的,本身没有意义;流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质(如切矢量、微分式等)。这是与一般数学不同的地方。这些观念经过几十年的演变,渐成定型。将来数学研究的对象,必然是流形;传统的实数或复数空间只是局部的情形(虽然在许多情况下它会是最重要的情形)。所以我相信本书的内容会对一般数学工作者有用。

讲到微分几何的未来,当然预测是很困难的。19世纪的深刻的结果(如单复变函数论),多半是单元的。20世纪内高维流形的发展是辉煌的。但整个宝藏发掘未及十一,可以发展的方向,多不胜数。数学的前途无量是可以预卜的。

这份讲义是我在1980年春季在北京大学的讲课记录,由陈维桓整理而成的。因时间限制,内容甚不齐备,错误亦难免。北大同仁尤其是段学复教授的支持和江泽涵教授的关心,是这个课的主要动力。吴光磊教授在讲义整理过程中提供了许多宝贵意见。吴大任教授曾读过书稿,并提了不少改进的意见。田畴同志也读过书稿,并特为讲义翻译了附录一(欧氏空间中的曲线和曲面)。此外,我在北大讲课时,章学诚、尤承业、刘旺金、韩念国、周作领、刘应明、孙振祖、李安民和陈维桓等同志为记录和辅导做了不少工作。今天很高兴有机会向这些同志们说一声“谢谢”。

62. 德·拉姆著《微分流形》英文版序

原书为《Differentiable Manifolds》, Springer-Verlag, 1984 年。陈省身为该书作序。张莫宙译。

威廉·霍奇的调和积分理论既大胆又富有想像力。他一下子发现了将几何函数论推广到 n 维的关键。他在基本定理的证明上有严重的缺陷。赫曼·外尔用他早先在位势理论中的结果巧妙地加以弥补了。

德·拉姆教授的这本书是一本关于微分流形的导论性著作。看来它的主要目的是要用不同于霍奇-外尔的方法,给出霍奇基本定理的第一个详细的证明。由于霍奇理论是德·拉姆理论的一个自然的顶峰,在撰写这本书时,他一定得到极大的快乐。

在 n 维几何中,一个基本的观念是链与上链,或积分域与被积函数之间的"对偶性"。边缘算子是一个全局算子,而上边缘算子,即外微分法,则是局部的。这使得上同调理论不论对于解析处理或者对于应用来说都成为一个更加方便的工具。埃利·嘉当发展了外微分代数的基础并把它用于力学、微分组和微分几何,与此同时庞加莱则看出了多重积分的重要性,给出了一些主要的"定理"。这一整体理论在 1931 年由德·拉姆的著名论文完成了。这篇论文很长,因为当时的拓扑学只有同调论,上同调的观念还不存在。

概括链和上链两者的观念是"流"(current)。这是德·拉姆引进的,并自始至终有效地用于本书。零维流就是广义函数(在罗朗·施瓦尔茨意义上),它现在是数学中的一个基本概念。

霍奇定理现在有一些其他证明。也许最自然的处理方法是借助伪微分算子;参看[5, 6]。米尔格拉姆-罗森布鲁姆用热方程方法的证明是一个具有广泛影响的想法[3]。莫里、伊尔斯和弗里德里希斯给出了一个利用变分法的证明[4]。

霍奇定理可以有各种推广。最重要的一种牵涉到勒雷的层系数的上同调群。亨利·嘉当和塞尔把它成功地推广到了复结构[1, 6]。它的调和理论是由小平邦彦首先作出的[2]。在某种几何条件下,根据调和理论可以用博赫纳的办法,证明上同调群的"消没定理"(vanishing theorems)。这种消没定理非常重要。

"流形上的椭圆算子"一般领域的最近发展,例如指标理论和谱论,已经超出了

本书的范围。但是我相信,一个数学家在积极探究新结果时,能在这个里程碑上停留一下是值得的。在这里,他将会学到许多数学以及数学的风范。

参考文献

[1] Griffiths P, Harris J. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley, 1978
[2] Kodaira K. *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*. Proc. Nat. Acad. Sci., USA 1953, **29**: 1268 ~ 1273
[3] Milgram A N, Rosenbloom P C. *Harmonic forms and heat conduction*, Ⅰ, Ⅱ. Proc. Nat. Acad. Sci., USA 1951, **37**: 180 ~ 184, 435 ~ 438
[4] Morrey C B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Gr. undlehren der math. Wiss. **130**, Springer 1966
[5] Nirenberg L. *Pscudo-differential operators, global analysis*. Proc. Symp. Pure Math., **16**, Amer. Math. Soc. 1970: 149 ~ 167
[6] Wells R O. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Prentice Hall, Inc. 1973; second edition. Graduate Texts in Mathematics, **65**, Springer 1980

63. 什么是几何学——在台湾大学的演讲

这是 1987 年 4 月 21 日在台湾大学的演讲记录，由林丽明整理。原载《数学传播》第 11 卷第 2 期，1987 年。

在差不多一百年前，几何就是欧几里得。他在公元前三百年左右写了一部大书，中文叫做《几何原本》(Elements of Geometry)。从这本书我们可以看出：在当时的社会，几何并不被大家所注意，所以像欧几里得这样伟大的人，我们也不大知道他的生平。大致说起来，他是属于公元前 365～275 年间的人物，这是大致算的时间，并不表示他活了 90 岁。

这本书是人类文化史上一部非常伟大、有意义的著作，它的主要结论有两个：

(一) 毕达哥拉斯定理：有一直角三角形 ABC，则长边的平方等于其他两边的平方和。由几何方面来说，如果我们在三边上各作一个正方形，那么两个小正方形的面积和就会等于大正方形的面积(如图 1)。

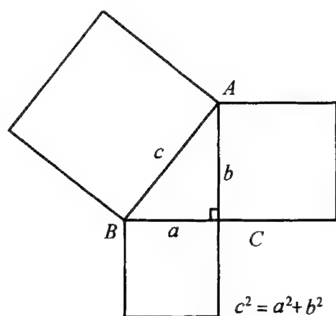


图 1

(二) 三角形三内角之和等于 180°，如果以弧度(radian)为单位，也可以说三角形三内角之和等于 π。

这本书受到重视，不单只是为了学几何，主要还要学一种逻辑推理的方法。欧几里得用几个很明显的事实——公理(axiom)，把几何的结论从公理用逻辑的方法推出。而在他所列出的公理当中，较受争议的是平行公理。平行公理原来是说：有两条直线被一直线所截，如果截角的和小于 180°，那么这两条直线在充分延长后，必相交于一点(如图 2)。另一个简单的说法是：假使有一直线和线外一点，那么通过那个点就刚刚好只有一条直线和原来的直线平行，平行者就是这两条直线不相交(如图 3)。

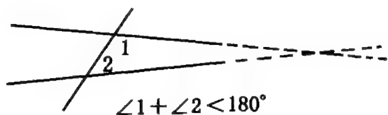


图 2



图 3

这个平行公理在所有公理之中是最不明显的，所以数学家或是对数学有兴趣的人便想从其他的公理去推得平行公理。而这努力延持了几百年，后来证明这是不可能的，于是有了非欧几何学的发现，这在人类思想史上是非常特别、有意思的事实。因此我感觉到这是西洋数学和中国数学不同的地方。九章算术是中国古代最有名的数学书，一共九章，第九章谈的是所谓勾股，勾、股就是直角三角形中较短的两个边，一个叫做勾，另一个就叫做股，而最长的那个边便称为弦。勾股定理也就是刚才所谓的毕达哥拉斯定理，所以它的发现，中国人也应该有份。但是在中国的几何中，我无法找到类似三角形三内角和等于180°的推论，这是中国数学中没有的结果。因此，得于国外数学的经验和有机会看中国数学的书，我觉得中国数学都偏应用；讲得过分一点，甚至可以说中国数学没有纯粹数学，都是应用数学。这是中国科学的一个缺点，这个缺点到现在还存在，大家都讲应用，不注意基础科学，当然应用很要紧，但是许多科学领域基本的发现都是在基础科学。

因为三角形三内角之和等于180°这个结论，而有接下来的重要发展：

（一）球面几何

所讨论的三角形，不一定是要在平面上，也可以是一个球面三角形，在这个情形下，三角形三内角之和必然大于180°，并且有一个非常重要的公式：

$$A + B + C - \pi = \frac{\text{面积}}{R^2}。$$

R 是球的半径，R^2 则是度量球面的曲率，因此由曲率的观念跑到这样一个简单的公式里。这在数学或物理上是一个重要发展，因为在爱因斯坦的相对论中，曲率 $= \frac{1}{R^2}$ 代表一个场的力，所以几何度量和物理度量便完全一样。

（二）非欧几何（双曲式的）

在这个情形下，三角形三内角之和是小于180°的，即有如下的重要公式：

$$A + B + C - \pi = -\frac{\text{面积}}{R^2}。$$

此时 R^2 代表非欧几何的一个绝对的度量，换句话说在非欧几何的平面上，它的曲率是负的，即曲率 $= -\frac{1}{R^2}$。因此，在空间或者平面的曲率，可以是正的，像球面几何，也可以是负的，像非欧几何，而其相对应的三角形三内角和，也分别有大于或小于180°之情形，不再满足欧几里得的平行公理。

欧几里得几何之后，第二个重要的发展是坐标几何。这是法国的哲学家、数学家勒内·笛卡儿（1596～1650），对于研究几何，引进了坐标的概念，因此可用解析的方法来处理几何的问题。坐标就是说：假使在 $x-y$ 平面上，有两个轴，x 轴和 y 轴，那么一个点的两个 x、y 坐标，就分别以如图4中的两个相对应的度量来表示。

因此几何的讨论可用解析的方法，即

点→(x,y)，

直线→ $ax+by+c=0$，

圆周→ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$；

圆心：(a,b)，

半径 $=r$。

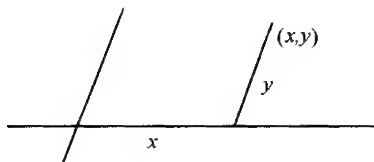


图 4

于是几何的问题便成为代数的问题。

这样的发展不但使几何问题的处理容易些，更有其重大的意义：

（一）解析化之后，可使研究的图形的范围扩大，除了直线的一次方程式，或者圆周的二次方程式，我们还可以取任意的方程式 $f(x,y)=0$，讨论坐标 (x,y) 适合这样方程的所有点的轨迹，因此许多用几何的方法很难处理的曲线，在解析化之后，都可从表示它的方程式中得到有关的几何性质。

（二）研究的图形不再局限在二维的平面上，可推广至高维的空间。世界上的事情，如果只用二维的平面，往往不足以表示，需要取更多的坐标。例如我们所在的空间是三维，有 x、y、z 三个度量，假使要用几何来表示物理的问题，那么三个度量之外，尚须加一个时间 t，所以物理的空间就变成了四维的空间；不但如此，假使有一点在三维空间运动，那么除了需要 (x,y,z) 来表示点的位置，还需要这三个坐标对时间的微分（derivative）来表示它的速率，即 $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$，这就成了六维的空间。所以种种的情形都指示我们有必要考虑更高维的空间，来表示自然的现象。

解析几何把几何研究的范围大大地扩大了，而科学发展的基本现象，就是要扩大研究的范围，了解更多的情形，笛卡儿的解析几何，便达到了这个目的，使几何学迈入一个新的阶段。

第三个发展是群的观念，这是数学上一个基本的结构。数学上总是要运算，加、减、乘、除。研究几何的话，把这个东西从这个位置移动到其他的位置，也是个运算。而这样的运算，也称为运动，有一个特别的性质，也就是说：把一个物体从甲地移到乙地，再移到丙地，可直接把物体从甲地移到丙地，即两个运动的结果，可经由一次运动来达成，具有这个特殊性质的，便称其成一群。研究几何的对象，应是研究几何的性质，经运动群后是不变的。这个观念立刻便有了重要的发展。

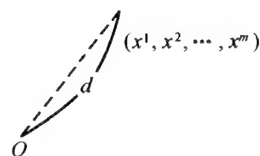
既然讨论运动群，有时我们还想讨论更大的群，看是不是有些性质不但在运动群下不变，在更大的群之下也是不变。历史上最主要的例子是投影。假使两条直线在空间中相交，从一点投影，被一新平面所截，则所得之二直线仍旧是相交，像这种“直线相交”的几何性质，经过一种比运动还广的投影之后，所得的图形仍具有如此的几何性质，即在投影下不变。这也有许多应用，如艺术家画画，讲求透视，远近合乎几何的条件。

研究几何性质在投影群之下不变的是所谓投影几何。投影几何的发展，把几

何的观念推广了,不只是有普通的欧几里得几何讨论几何性质经运动群后不变的,也可以讨论投影几何中,投影后仍是不变的性质。有许多经运动群后不变的性质,在投影变换后是变了的,像距离、角度,但是还有些更重要的性质在大一点如投影下是不变的,而这些性质能经过投影群不变,在几何上自有其重要的意义。

法国的数学家彭赛列(1788~1867),在投影几何发展史上是一个主要的人物。他曾追随拿破仑攻打俄国,被俄俘虏,囚禁在俄之监狱中,讲他的主要著作,也就是在此时完成的。因此,大家常常抱怨科学研究的设备不好,相形之下,这个例子可以证明这不是科学研究最主要的问题——当然这情形非常例外。

在几何学的发展之中,有许许多多几何学,像欧几里得几何学、投影几何学……及其他种种几何学,自然就要有一个人把它综合集结起来,那就是德国的数学家菲力克斯·克莱因(1849~1925)。他在23岁的时候前往德国小城埃尔朗根的一所大学任教,依据德国的习惯,新教授上任必须做一次公开讲演,而他讲演的内容——埃尔朗根纲领,就是这个新几何学。他把几何学建立在群的观念上:一个空间有一个变换群,允许把空间的图形从这个位置移到另一个位置,因此有了一个群之后,便有一种几何,研究所有图形的几何性质经过这个变换群不变的。这个群可以是欧几里得运动群,也可以是投影变换群,或者其他种种的群,因为群的选择不同,也就得到许多种不同的几何学。其中包括非欧几何学,根据克莱因的观点,非欧几何学只要在空间中有一个所谓二次的超曲面,讨论在所有的投影变换下,使这个二次超曲面不变的。例如:在平面上有一个圆周,非欧几何就是要讨论在投影变换群下圆周仍不改变的性质。所以非欧几何就变成研究圆内点所构成的空间的性质,也就是在双曲平面(hyperbolic plane)上讨论。因此由克莱因的观点,非欧几何学就变得极易处理。



$d^2 = \sum g_{ik}x^ix^k$

图 5

其实,在这个阶段之前,还有黎曼所创立的几何。他把几何局部化,可以说是几何学的第四个发展。这是笛卡儿坐标几何的自然推广。在笛卡儿坐标系中,如果我们取 m 维的空间,一个点就可以用 m 个坐标(x^1, $x^2, \cdots, x^m$)来表示,而此点到原点的距离如果是 d,那么就有 $d^2 = \sum g_{ik}x^ix^k$ (如图5)。即这个点到原点距离的平方,是坐标的一个二次式。而黎曼不但用坐标,他还用坐标的微分,于是便把笛卡儿几何局部化,因此黎曼几何可说是一个局部化的几何。黎曼几何主要建构在弧长 s 上,弧长微分的平方会等于坐标的一个二次微分式,即 $\mathrm{d}s^2 = \sum g_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k$;用弧长即可建立一个几何,因为既然有了 $\mathrm{d}s$,便可计算两点所连接的曲线的长度,也就是弧长。"测地线"(geodesic)是指在两点间使弧长最短的那条曲线,它是平面上直线的推广,此外还可以有面积及其他种种观念。

黎曼几何最初在二维的情形是高斯(1777~1854)发展的,他在1827年写了一本差不多50页的小册子,研究在二维即曲面的情形及在这样的 $\mathrm{d}s^2$ 之下,所能够发

展的几何性质，他的目的是为了应用，因为当时的德国政府要他主持一个测量工作，为了给这个测量工作一个理论基础，于是高斯写下了这篇在微分几何上最要紧的论文，微分几何自此诞生。以前关于把微积分用在几何上的问题，只能说是微积分在几何学上的应用，在高斯这篇文章之后，微分几何便成了一门独立的学问，就是从 ds^2 得到一切的几何性质。

黎曼(1826～1866)在 1854 年，在为取得大学教授资格的公开演讲上，发表了黎曼几何的第一篇论文。黎曼几何并不像其他我们所谈的欧几里得几何，或者克莱因的埃尔朗根纲领几何，或者是投影几何，需要整个的空间，在黎曼几何的情形下，我们只需要空间的一部分，因为 ds^2 有意义，我们便可量弧长、面积、角度……等几何性质，不需要知道全部的空间，也就是说，在这样的一个小块里，便可发展全部的几何性质，这是黎曼几何革命性的观念，使几何局部化，这个和物理上的场论是完全符合的。

真正使黎曼几何受到重视的是爱因斯坦的广义相对论。大致说起来，爱因斯坦的广义相对论是要把物理几何化，也就是说把物理的性质变为几何的性质，因此黎曼几何就成为物理学家一定要念的一门数学。到了黎曼空间一样有曲率的概念，只是因为黎曼空间是高维的，所以它的曲率概念就变得相当复杂。在爱因斯坦的广义相对论中的基本公式里，大致说起来，物理的力是一个曲率；数学家讲曲率和物理学家讲力其实是同一个观念。

在黎曼几何中，列维-齐维塔平行性是一个重要的观念。列维-齐维塔以为在黎曼几何，或者是广义相对论里的洛伦茨几何，都有一个很基本的性质，那就是平行性；在这个时候，空间不再是只用一个坐标系表示的空间，而是需要很多不同的坐标系才能表现的“流形”(manifold)，这样又把几何研究的空间推广了。所以我常有个比喻，如果我们把几何空间的推广和人类穿衣服的过程相对照，那么一开始的欧几里得几何，便好比人在原始社会中没有穿衣服，是裸体的；然后笛卡儿把坐标的概念加入了“赤裸”的空间，就好比人类开始穿衣服；而到了流形的阶段，就好比现代人，不只穿一件衣服，还要常常换。也许有些人不太能接受这样“奇装异服”式的换坐标，但是没有关系，爱因斯坦也花了 7 年的时间，才终于接受坐标可以转换的概念，而能从特殊相对论进展到广义相对论，空间中有不同的坐标系，那么麻烦就来了，因为几何的性质是和坐标系的选取有关，不过不要紧，只要我们能控制坐标变换的性质，使在变换前即有的性质，经过变换之后仍为我们所控制，那么换坐标就没关系了，这是近代几何学比较困难的地方。

用以表示流形的坐标系是任意的，因此可能是非线性的坐标，这在处理上就变得比较困难；但是我们可以取线性的空间去逼近流形，换句话说，虽然流形本身是非线性的，但在流形上的一点，都有一个和普通空间一样的线性空间，即切空间。这些切空间之间原本是没有关系的，而列维-齐维塔平行性就是要建立二点之间的

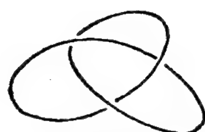
切空间的关系；之后，微分几何学家发现，这个平行性是非常基本的性质。又因为拓扑(topology)学的发展，我们把这个观念推广了，不一定要谈切空间，任意一个空间都可以，于是就有向量丛(vector bundles)和联络(connections)的概念，也就是说流形的切空间差不多是平的，但是矢量丛却可以是一个竖起来的空间，任何的矢量空间都可以，这是今天在几何上大家所公认的一个基本结构，从黎曼几何推广到有联络的矢量丛，这也就是物理上规范场论(gauge field)的数学基础。

黎曼几何把几何局部化，但我们不能永远只在一个小区域里头，所以局部化之后又要整体化，又要把它扩充到全空间。这可说是几何学的第五个发展。而在这个整体化的扩充当中，最要紧的就是拓扑学(topology)(即俞大维先生说的《橡皮几何学》)。只要我们不把一个图形扯破，那么就有些几何性质虽经过放大、缩小……等很大的变换，也不会改变，例如亏格(genus)的性质，比方说我们在一个二次的曲面上挖两个洞(如图6)，那么它的亏格就等于2，也可以等于3，4，…，或者像美国的甜甜圈只有一个洞，亏格就是1，即亏格等于洞的个数，这个数目是把曲面放大缩小之后仍旧不变的，这是拓扑不变式的一个例子。另外还有一个例子是有关于结(knot)，如图7，这是一个三维空间中封闭的曲线，没有办法把它解开成一圆周，即所谓结。不要把这想成几何学家没有事在玩的东西，在应用上，这有非常重要的意义。



$g=2$

图 6



(trifold)

图 7

刚才说过，物理上的空间是四维的，如果再加上电磁场，就成了五维的空间。在麦克斯韦方程中，底空间是一个四维的流形，在那上头的每一点都突出去一条一维的空间(矢量丛)，这一维的空间，在物理上必须是封闭的，所以是一个圆周，数学家称此为圆周丛(circle bundles)；也就是说，底空间是四维，每一点又有一个圆周，所以整个空间就是五维的，但是这并不是一个任意的五维空间，它必须满足这样特别的一个几何结构。利用这个观念，麦克斯韦方程就可写成下面这样简单的形式：

$$\delta F = J, \mathrm{d}F = 0。$$

其中 F 是这个圆周丛的一个联络的曲率，这曲率是一个二次微分式，d 是代表此微分式的外微分，$\mathrm{d}F = 0$ 就是说这个二次微分式是封闭的。另外一个方程式是 δ，$\delta = *\mathrm{d}*$ 即所谓余微分(codifferential)。在一般的电磁学书上，是用一组方程来表现麦克斯韦方程，现在由于数学或几何的发展，不但把一组方程式简化，而且可由这化简的方程式去推得数学、几何、物理上的结论，并不一定要回来把方程式全展开才可获得相同的结论，所以这观念上的发展，的确使得科学进步。如果大家有兴

趣,可试着去证明这组方程和平常我们所见的麦克斯韦方程是一样的。

在物理上有一个伯姆-阿哈拉诺夫实验,就是说:通常把麦克斯韦方程写成那样的形式是不对的,因为它没有把所有的电磁现象都表示出来,应该利用圆周丛联络 A, $dA = F$ 才是描写所有电磁现象的方程式, $dF = 0$ 只是 $dA = F$ 的一种结果。伯姆-阿哈拉诺夫实验是如图 8 的装置,有一个内有磁场的圆筒,外面没有磁场,而在圆筒的外围接有线圈,那么圆筒内的磁场,便和通电之路径有关,杨振宁先生有一篇文章把这情形说得很清楚。总而言之,就是应该把麦克斯韦方程写成:

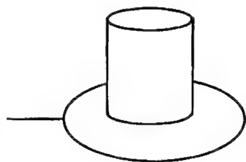


图 8

$$dA = F,\ \delta F = J$$

的形式(也就是杨-米尔斯方程式),用以处理更复杂的实验,也才能真正代表所有电磁现象,除此之外,杨-米尔斯方程式是一切场论的基础,是规范场论的基本方程式,它的重要性就如同麦克斯韦方程在电磁场或爱因斯坦方程在引力场的重要性。不过在这个情形下,矢量丛就变成二维而不是一维了,那么作用在这个二维矢量丛上的群就不再是可交换,因此数学上的处理就变得很复杂了。

最后谈谈詹姆斯·怀特的公式,这在分子生物学,DNA 方面是一个基本公式。DNA 在几何上的结构是双螺线,是两条封闭的曲线互相绕着,所以很自然的,研究 DNA 几何结构的基础是很简单的微分几何的曲线理论,和刚刚谈的结有关,即打了一个结,结的数学性质就对应到 DNA 的生物反应,这方面的实验,目前王倬教授正在南港从事。DNA 分子虽是一个螺线,却不像我们所想像的,它的螺线是以最经济的方式互相缠绕,而产生了许多复杂而有意思的几何问题;之中有一个就是怀特的公式: $L_k = T_w + W$。两个封闭曲线套起来的话有一个套数 L_k,它会等于挠率和拧数之和。套的数目可以很大很大,分子生物的现象,不仅是可以使它套起来,也可以使它解开,恢复原来的形状。总而言之,我不懂这些生物学,只是道听途说。

大家觉得微分几何应该是很有用的,因为在物理学发展之中,电磁学对人类日常生活是最有影响的;而在遗传工程及其他方面,DNA 的结构也是生物科学对人类生活最有影响的一门学问。很巧,我刚好就是研究这两门学问的数学基础:微分几何。这让我联想到一个有名的理论物理学家 E. 威格纳所写的一篇文章:《数学的不可思议的有效性》,为什么数学会有用?光玩玩亏格(genus)、结,竟也能找到有用的数学性质,提供了很好的应用,他觉得很不可思议。在这篇文章的开头,他举了一个更简单的例子:有两个中学同学,毕业后各奔前程,若干年后,两个人再度碰面,甲便问乙近几年在研究什么?乙说他在研究人口问题,甲便欣赏了一下乙的论文,发现论文里头总有个 π。我们都知道 π 是圆周率,怎么可以和人口问题发生关系?这也是一个最粗浅的例子,告诉我们:基本的发现,有时候也不一定要求立刻的应用,可能结果有更大的应用。

64. 具有联络的向量丛

原题为《Vector Bundles with Connection》，美国伯克利加利福尼亚大学数学科学研究所预印本，MSRI 02808 - 87。中译文见《陈省身文选》，科学出版社，1989 年；虞言林译，侯自新校。

1. 引论

黎曼几何是高斯内蕴曲面论的高维推广，它给出一个完全是局部的几何结构。后来认识到这个几何结构的大多数性质是从列维-齐维塔平行性导出，这种平行性是切丛上的联络。数学和物理的近代发展表明了流形上“具有联络的向量丛”观念的重要性。本文给出这个观念的导引性描述以及它的一些应用。

2. 向量丛

我们将处理 C^∞ 流形和它们的 C^∞ 映射。流形 M 上一个向量丛是一个映射

$$\pi:\ E \to M, \tag{1}$$

满足下列条件：

B1）对任意 $x \in M$，$\pi^{-1}(x)$ 是一个（实或复）q 维向量空间 Y；$\pi^{-1}(x)$ 或 Y 将称为纤维。

B2）E 局部上是一个乘积，即对每一点 $x \in M$，它有一个邻域 U 使得存在一个微分同胚

$$\varphi_U:\ U \times Y \to \pi^{-1}(U) \tag{2}$$

满足

$$\pi \circ \varphi_U(x, y_U) = x, \qquad y_U \in Y。 \tag{3}$$

(x, y_U) 是 E 关于 U 的局部坐标。

B3）对于两个邻域 U, V，当 $U \cap V \neq \varnothing$ 时，关系

$$\varphi_U(x, y_U) = \varphi_V(x, y_V), x \in U \cap V; y_U, y_V \in Y \tag{4}$$

成立当且仅当

$$y_U = g_{UV}(x) y_V, \tag{5}$$

其中 $g_{UV}(x)$是 Y 上一个非退化自同态。如果 y_U, y_V 表为单列的矩阵,那么 g_{UV}就是非退化的 $(q \times q)$ 阵。条件 B3)意指纤维上的线性结构是有意义的。

E 称为底流形 M 上一个向量丛。一个向量丛可看作为一族向量空间,它由一个流形参数化,使得局部是平凡的而且纤维上定义了线性结构。

一个截面是一个映射 $s: M \to E$,使得 $\pi \cdot s = \mathrm{id}$。两个截面可以相加,一截面可以乘上一个(实或复值)函数,得到的仍是一截面。所有截面构成一个向量空间,记作 $\Gamma(E)$。

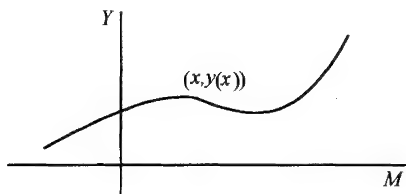
函数 $g_{UV}(x)$, $x \in U \cap V \neq \varnothing$, 取值于 $GL(q;\mathbf{R})$或 $GL(q;\mathbf{C})$,它们称为转移函数。如果$\{U, V, W, \cdots\}$构成 M 的一个覆盖,那么转移函数满足下列条件:

$$\begin{aligned} g_{UU}(x) &= \mathrm{id}, \\ g_{UV}(x) g_{VU}(x) &= \mathrm{id}, \text{在非空的 } U \cap V \text{ 中}, \\ g_{UV}(x) g_{VW}(x) g_{WU}(x) &= \mathrm{id}, \text{在非空的 } U \cap V \cap W \text{ 中。} \end{aligned} \tag{6}$$

可以证明:关于覆盖的转移函数族,当它满足条件(6)时,则确定一个向量丛。

我们给出一些向量丛的例子。

例 1 $E = M \times Y$, π 是向第一因子的投射。一个截面就是 $M \times Y$ 中的一个图象,它恰是 M 上一个向量值函数(见下图)。



例 2 $E = TM$,它是 M 的切丛。关于 M 的局部坐标u^i, $1 \leqslant i \leqslant n (= \dim M)$,一个切向量可表为$\sum y_U^i \frac{\partial}{\partial u^i}$。在坐标 u^i 与v^j 共同有效的开集中,

$$\sum y_U^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum y_V^j \frac{\partial}{\partial v^j}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \tag{7a}$$

成立的充要条件是

$$y_U^i = \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} y_V^j。 \tag{7b}$$

于是转移函数用雅可比矩阵给出。$TM \to M$ 的一个截面是M 上一个向量场。

例 3 如果 M 浸入到 $n+q$ 维欧氏空间 E^{n+q},那么 M 的法向量构成 M 的法丛。

3. 联络

考察例1中平凡丛 $E = M \times Y \to M$。一个截面 $s \in \Gamma(E)$ 是 M 上一个 Y 值函数。如果 X 是 M 上一个向量场,那么 s 沿 X 的方向导数依旧是一个截面,记作 $\nabla_X s$。我们试图推广这个“微分法”到任意的向量丛。

一个联络是一个映射

$$D: \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes T^* M), \tag{8}$$

其中 $T^* M$ 是 M 的余切丛,使得下列条件成立

D1) $$D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2,$$

D2) $$D(f \cdot s) = f Ds + s \otimes df,$$

这里 $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, f 是 M 上一个(实或复值)函数。从 Ds 用下列配对我们得到方向导数的概念

$$\nabla_X s = \langle X, Ds \rangle。 \tag{9}$$

为了分析上描述一个联络,我们局限在一个邻域来考虑,在其内取一个标架场,即 q 个截面 e_i, $1 \leqslant i \leqslant q$,它们处处线性无关。因为诸 e_i 在每个纤维中构成一个基,故我们可记

$$De_i = \sum \omega_i^j \otimes e_j, \tag{10}$$

其中 ω_i^j, $1 \leqslant i,j \leqslant n$,是一次微分式。一次微分式矩阵:

$$\omega = (\omega_i^j) \tag{11}$$

称为关于标架场 e_i 的联络矩阵。

联络矩阵完全决定联络。因为任意截面可以表为

$$s = \sum s^i e_i, \tag{12}$$

利用性质 D1)和 D2)我们有

$$Ds = \sum (ds^i + s^j \omega_j^i) \otimes e_i。 \tag{13}$$

截面 s 称为是平行的,如果 $Ds = 0$。

在标架场的一个改变下,联络矩阵间我们有基本公式。事实上,令

$$e_i' = \sum a_i^j e_j \tag{14}$$

是一个新的标架场,其中 $\det(a_i^j) \neq 0$。令

$$De_i' = \sum \omega_i'^j \otimes e_j', \quad \omega' = (\omega_i'^j)。\tag{15}$$

这里用矩阵方程式来算最简易。我们记

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix}, \quad e' = \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_q' \end{pmatrix}, \quad A = (a_i^j)。\tag{16}$$

于是我们有矩阵方程

$$\begin{aligned} De &= \omega e, \quad De' = \omega' e', \\ e' &= Ae。\end{aligned}\tag{17}$$

微分最后一个方程,利用性质 D1),D2),我们立得基本公式

$$\omega' A = \mathrm{d}A + A\omega。\tag{18}$$

这个关系满足相容性条件,即如果 e'' 是第三个标架场,ω'' 是关于 e'' 的联络矩阵,那么 ω 与 ω'' 间的关系又可从 ω 与 ω' 间,ω' 与 ω'' 间的关系导出。

一个联络也称为是一个协变或绝对微分。在物理学中它称为是一个规范势,其理由在以后给出。关于一个标架场用一次微分式矩阵给出,并具有变换规律(18)。

注: 从(18)我们看出在向量丛上联络是存在的。证明的主要思路如下:取 M 的一个由坐标邻域组成的开覆盖 $\{U_\alpha\}$,在覆盖中每一开集上选取一个标架场。只须用对 m 做归纳来定义 $\bigcup_{1\leqslant\alpha\leqslant m} U_\alpha$ 上的联络。假设联络已经定义在 $V = \bigcup_{1\leqslant\alpha\leqslant m-1} U_\alpha$ 上。关于 U_m 中标架场,联络矩阵已经在 $V \cap U_m$ 上确定了。剩下来利用欧氏空间中标准的扩张定理将联络矩阵扩张到 U_m 上。完整的论证需小心点,因为扩张定理仅对定义在闭集上的函数才成立的。细节请读者补出。

取(18)的外导数,并利用该方程本身,我们得

$$\Omega' A = A\Omega,\tag{19}$$

其中 Ω 是二次微分式的 $(q \times q)$ 阶矩阵,它由下式给出

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega。\tag{20}$$

在最后一项中我们用矩阵的乘法,微分式的乘法是外乘。矩阵 Ω 称为关于标架场 e_i 的曲率矩阵

将(20)外微分给出

$$\mathrm{d}\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega。\tag{21}$$

这称为比安基恒等式。

练习：设 X,Y 是 M 上两个向量场，令

$$R(X,Y)=\langle X\wedge Y,\Omega\rangle,\quad R'(X,Y)=\langle X\wedge Y,\Omega'\rangle,\tag{22}$$

则 $R(X,Y)$ 与 $R'(X,Y)$ 是矩阵，它们满足方程

$$R'(X,Y)=AR(X,Y)A^{-1}。\tag{23}$$

对于(12)式中截面 s，令

$$\sigma=(s^1,\cdots,s^q),\tag{24}$$

则 $\sigma Re=\sigma'R'e'$ 不依赖于标架场的选取。映射

$$K(X,Y):s=\sigma e\to\sigma R(X,Y)e\tag{25}$$

称为曲率算子。

曲率衡量协变微分的不可交换性。作为 $\Gamma(E)$ 上的算子，试证

$$K(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}。\tag{26}$$

4. 陈示性式和陈示性类

我们考察复向量丛，令

$$\det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)=1+c_1(\Omega)+\cdots+c_q(\Omega),\tag{27}$$

其中 I 是单位矩阵；$c_i(\Omega)$，$1\leqslant i\leqslant q$，是 $2i$ 次微分式。由(19)知它们不依赖于标架场的选取，即有

$$c_i(\Omega)=c_i(\Omega')。\tag{28}$$

由此得：$c_i(\Omega)$ 是整体定义在 M 上。因为我们能取 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，并在每个 U_α 上选取一个标架场，所得到的 c_i 在覆盖中任两个开集之交上一致。我们记

$$c_i(E;D)=c_i(\Omega),\tag{29}$$

以表明微分式现在仅依赖于联络 D（自然是在丛 E 上的）。这些 c_i 称为陈示性式。

我们在 M 上引进另一类微分式如下：

$$b_i(\Omega)=\mathrm{Tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^i\right),\quad 1\leqslant i\leqslant q。\tag{30}$$

当 Ω 是对角阵时，$c_i(\Omega)$ 与 $b_i(\Omega)$ 皆是对角元素的对称函数。在它们之间牛顿公式成立

$$b_i-c_1b_{i-1}+c_2b_{i-2}+\cdots+(-1)^{i-l}c_{i-l}b_l+\cdots+(-1)^i ic_i=0,\quad 1\leqslant i\leqslant q。\tag{31}$$

因为 $c_i(\Omega)$ 与 $b_i(\Omega)$ 在(19)式的改变下皆不变,故我们能用(19)式化 Ω 为一个标准型,因而不难看出(31)式对一般情形是成立的。由此得知 b_i(或 c_i)是 $c_1,\cdots,c_i$(或 $b_1,\cdots,b_i$)的多项式,具有整(或有理)系数。

定理 1. 微分式 b_i 和 c_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, 是闭的。

由于上面的说明,只需证明 b_i 是闭的。由(21)式我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{dTr}\Omega^i &= i\mathrm{Tr}(\mathrm{d}\Omega \wedge \Omega^{i-1}) \\ &= i\mathrm{Tr}(\omega \wedge \Omega^i - \Omega \wedge \omega \wedge \Omega^{i-1}) = 0。\end{aligned}$$

这就证明了定理。

下列定理给出联络的改变对这些微分式产生的影响。

定理 2. 设 D 和 D_1 是丛 E 上两个联络,那么微分式

$$b_i(E,D) - b_i(E,D_1), c_i(E,D) - c_i(E,D_1), \quad 1 \leqslant i \leqslant q,$$

皆是正合的。

也还只需证明关于 b_i 的定理。我们看出

$$D_t = (1-t)D_0 + tD_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad D_0 = D \tag{32}$$

也是一个联络。令 ω_t 是 D_t 关于标架场 e_i 的联络矩阵。它的曲率矩阵由下式给出:

$$\Omega_t = \mathrm{d}\omega_t - \omega_t \wedge \omega_t。\tag{33}$$

实施外微分,我们有比安基等式

$$\mathrm{d}\Omega_t = -\Omega_t \wedge \omega_t + \omega_t \wedge \Omega_t。\tag{34}$$

令

$$\eta = \omega_1 - \omega_0, \tag{35}$$

当改变标架场时,由(18)我们有

$$\eta' A = A\eta。\tag{36}$$

因此微分式

$$\alpha = \mathrm{Tr}(\eta \wedge \Omega_t^{i-1}) \tag{37}$$

是整体定义在 M 上的。利用(34),我们发现

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{Tr}\{(\mathrm{d}\eta - \eta \wedge \omega_t - \omega_t \wedge \eta) \wedge \Omega_t^{i-1}\}$$

(微分每一个因子并且依次相撞缩并!)圆括号间的表达式等于

$$\beta = \mathrm{d}\eta - \eta \wedge \omega_0 - \omega_0 \wedge \eta - 2t\eta \wedge \eta。$$

另一方面,(33)中关于 t 的表达式导出

$$\Omega_t = d\omega_0 - \omega_0 \wedge \omega_0 + t(d\eta - \omega_0 \wedge \eta - \eta \wedge \omega_0) - t^2\eta \wedge \eta,$$

所以

$$\frac{d}{dt}\Omega_t = \beta。$$

由此得

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(\Omega_t^i) = d\alpha,$$

对 t 做积分,得

$$\mathrm{Tr}(\Omega_1^i) - \mathrm{Tr}(\Omega_0^i) = i \cdot d\int_0^1 \alpha dt。 \tag{38}$$

这就证明了定理中关于 b_i 的断言,于是定理得证。

微分流形的德·拉姆上同调简述如下:令 A^r 是 M 上 r 次 C^∞ 微分式的空间,C^r 是它的子空间,其中的微分式是闭的。商空间

$$H^r(M;C) = \frac{C^r}{dA^{r-1}} \tag{39}$$

称为是 M 的 r 维德·拉姆上同调群。$H^r(M;C)$中元素称为是 r 维德·拉姆上同调类。如果 $\alpha \in C^r$,我们记它的德·拉姆类为$\{\alpha\}$。

定理 2 表明德·拉姆上同调类$\{c_i(E;D)\}$不依赖于联络 D。它被称为丛 E 的第 i 个陈类,记为 $c_i(E)$,$1 \leqslant i \leqslant q$。

如果 M 是一个紧致定向流形,它的维数是偶数 $2m$ 并且 $i_1 + \cdots + i_p = m$,则

$$\int_M c_{i_1}(E)\cdots c_{i_p}(E) = c_{i_1\cdots i_p}(E) \tag{40}$$

称为 E 的一个陈数。

这是一个值得注意的情节。从定义本身看不出是不是存在非平凡的向量丛,即是否每个向量丛整体上必是一个直乘积。必须引进一个协变微分而它又可能是非交换的,这才导出曲率。曲率应看做为一个 2 次微分式(矩阵)。曲率的某些初等组合给出了向量丛的第一批最重要的不变量。这些组合本质上基于矩阵的特征值及它们的对称函数。

向量丛 E 称为是埃尔米特的,如果存在一个 C^∞ 正定埃尔米特内积场$(\,,\,)$,使得

$$\overline{(s,t)} = (t,s), \quad s,t \in \pi^{-1}(x), x \in M。 \tag{41}$$

设 e_i 是一标架场,令

$$(e_i, e_j) = g_{i\bar{j}}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant q, \tag{42}$$

于是矩阵

$$(g_{i\bar{j}}) \tag{43}$$

是正定埃尔米特的。如果

$$s = \sum s^i e_i, \quad t = \sum t^i e_i, \tag{44}$$

那么

$$(s, t) = \sum g_{i\bar{j}} s^i t^{\bar{j}}, \quad t^{\bar{j}} = \overline{t^j}。 \tag{45}$$

若 s 和 t 平行移动,即指 $Ds = Dt = 0$, 总使(s, t)保持不变,这时的 D 称为是可容许的。实际上在平行移动的假设下,我们得到

$$\mathrm{d}(s, t) = \sum (\mathrm{d}g_{i\bar{j}} - \omega_{i\bar{j}} - \omega_{\bar{j}i}) s^i t^{\bar{j}},$$

其中

$$\omega_{i\bar{j}} = \sum \omega_i^k g_{k\bar{j}}, \quad \omega_{\bar{j}i} = \overline{\omega_{j\bar{i}}}。 \tag{46}$$

因此,一个可容许的联络的条件便是

$$\mathrm{d}g_{i\bar{j}} = \omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i}。 \tag{47}$$

由扩张的论证(见§3中注)可得:在一个给定的埃尔米特向量丛上存在可容许的联络。

标架 e_i 称为是酉正的,如果

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}(当\ i = j\ 时为\ 1,其余情形为零)。 \tag{48}$$

在具有一个可容许的联络的埃尔米特向量从上,我们可以用酉正标架。于是由(47)我们有

$$\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} = 0, \tag{49}$$

即联络矩阵是斜埃尔米特的。由(20)推知曲率矩阵也如此。这蕴含(27)中的 $\det\left(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)$ 是实的。微分式 $c_i(\Omega), 1 \leqslant i \leqslant q$, 也是实的。这个微分几何的论证表明陈类 $c_i(E)$是实的上同调类。可以证明它们是整上同调类,即是 $H^{2i}(M;\mathbf{Z})$ 中的元素。

类似的概念对实向量丛情况也可引进,以致我们有黎曼向量丛和它们的可容

许的联络。采用幺正标架,就是满足下列条件的标架

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \tag{50}$$

我们得知联络矩阵和曲率矩阵皆是反称的。这就导出：当 i 是奇数时，$c_i(\Omega) = 0$，$4i$ 次微分式

$$p_i(\Omega) = (-1)^i c_{2i}(\Omega) \tag{51}$$

称为实向量丛 E 的庞特里亚金示性式,类 $p_i(E) = \{p_i(\Omega)\}$ 是一个 $4i$ 维上同调类,称为一个庞特里亚金类。

5. 欧氏空间中的子流形

我们考察一个 n 维流形 $M^n = M$ 到 $n + q$ 维欧氏空间的浸入

$$x: M^n \to E^{n+q}。 \tag{52}$$

记号 x 既表示一个点 $x \in M$,也表示该点相对于 E^{n+q} 中一固定点的位置向量。在 M 上我们考虑幺正标架 xe_A,使得 $x \in M$, e_α 是 M 在 x 点的切向量，因而 e_i 是 M 的法向量。本节中我们采用下列的指标范围：

$$\begin{gathered} 1 \leqslant A, B, C \leqslant n + q, \\ 1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant n, \\ n + 1 \leqslant i, j, k \leqslant n + q。 \end{gathered} \tag{53}$$

我们记

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \sum \omega_\alpha e_\alpha, \\ \mathrm{d}e_A &= \sum \omega_{AB} e_B, \end{aligned} \tag{54}$$

其中

$$\omega_{AB} + \omega_{BA} = 0。 \tag{55}$$

对(54)的第一方程作外微分,e_i 的系数等于零,便得

$$\sum_\alpha \omega_\alpha \wedge \omega_{\alpha i} = 0。 \tag{56}$$

因为 x 是浸入,故 ω_α 是线性无关的,于是再用嘉当引理得

$$\omega_{\alpha i} = \sum h_{i\alpha\beta} \omega_\beta, \tag{57}$$

其中

$$h_{i\alpha\beta} = h_{i\beta\alpha} \tag{58}$$

(通常的)二次微分型

$$\Pi_i = \sum \omega_\alpha \omega_{\alpha i} = \sum h_{i\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta \tag{59}$$

是 M 的第二基本形式。第二基本形式也记为 $\Sigma\Pi_i e_i$,它是一个取值在法丛的二次微分型。

对(54)的第二方程作外微分给出

$$\mathrm{d}\omega_{AB} = \sum \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}。 \tag{60}$$

(54)中沿法丛投影得

$$De_\alpha = \sum \omega_{\alpha\beta} e_\beta。 \tag{61}$$

这确定了切丛中一个联络,因为§3 中的条件 D1)和 D2)成立。局部黎曼几何的一个基本定理断言联络 D 仅仅依赖于 M 上的诱导度量,D 是列维-齐维塔联络,原先为列维-齐维塔定义的。

类似地,有一个法丛上的联络

$$D^\perp e_i = \sum \omega_{ij} e_j, \tag{62}$$

称为法联络。

我们考虑 $n = 2, q = 1$ 的情形,即通常欧氏空间 E^3 中的曲面。设 M 是定向的,于是单位法向量 e_3 是确定的,切平面上幺正标架 e_1, e_2 相差下列变换:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{63}$$

下是确定的。关于 e_1, e_2 的联络矩阵是

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}。 \tag{64}$$

在标架经(63)改变下,由(18)得知

$$\omega_{12}' = \omega_{12} + \mathrm{d}\theta。 \tag{65}$$

曲率矩阵是

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} \\ -\Omega_{12} & 0 \end{pmatrix}。 \tag{66}$$

它在标架的改变下不变。

曲率微分式 Ω_{12} 有一个简单的几何解释。事实上,由(20)我们有

$$\Omega_{12} = \mathrm{d}\omega_{12}。\tag{67}$$

后者因(60)而等于

$$\mathrm{d}\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23} = -(h_{311}h_{322} - h_{312}^2)\omega_1 \wedge \omega_2,\tag{68}$$

其中圆括号内的表达式是由第二基本式确定的,它等于 M 的高斯曲率 K。于是我们有

$$\mathrm{d}\omega_{12} = \Omega_{12} = -K\mathrm{d}A。\tag{69}$$

这里 $\mathrm{d}A = \omega_1 \wedge \omega_2$ 是面积元。这就直接导出:

高斯-博内定理 . 设 M 是 E^3 中的紧致定向曲面,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\mathrm{d}A = \chi(M),\tag{70}$$

其中 $\chi(M)$是 M 的欧拉数。

为了证明这个定理,令 E_0 是 M 上单位切向量 xe_1' 构成的空间,E_0 可以等同于 M 的切丛中幺正标架的空间,这是因为 e_1'决定 e_2',该 e_2'是垂直于 e_1'的单位切向量并且 $e_1'e_2'$与 M 的定向一致。E_0 是一个三维流形。我们可以取 M 的局部坐标和(63)中的 θ 作为 E_0 的局部坐标。在 E_0 上我们有一个整体的一次微分式

$$\omega_{12}' = (\mathrm{d}e_1', e_2') = \omega_{12} + \mathrm{d}\theta。\tag{71}$$

它的外微分是

$$\mathrm{d}\omega_{12}' = -K\mathrm{d}A。\tag{72}$$

在 M 上我们定义一个向量场,它的奇点在一个有限点集 x_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, 上。这样的向量场总是存在的。令 Δ_k 是一个小圆盘,它以 x_k 为中心,上述向量场把 $M - \bigcup_{1\leqslant k\leqslant r} \Delta_k$ 升为 E_0 中一张曲面,它的边界是$\partial\Delta_k$。对(72)用斯托克斯定理我们得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{M-\cup\Delta_k} K\mathrm{d}A = \frac{1}{2\pi}\sum\int_{-\partial\Delta_k}\mathrm{d}\theta + \omega_{12}。$$

当 Δ_k 趋于点 x_k 时,我们有极限

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\mathrm{d}A = \sum_{1\leqslant k\leqslant r} I_k,\tag{73}$$

其中 I_k 是向量场在 x_k 点的指数。于是我们证明了左端的积分等于指数和,因而指数和不依赖于向量场的选取。

关于高斯-博内定理的另外论述,我们请读者参考文章“欧氏空间中的曲线与曲面”。

选取一个特别的向量场,我们能证明它的指数和等于 $\chi(M)$。我们对定理的

证明同时也证出：M 上一个具有有限个奇点的向量场的指数和等于 $\chi(M)$。

甚至 $n=1,q=2$ 的情形，即 E^3 中曲线的情形，也能导出有趣的结论。在这个情形，法平面 xe_2e_3 构成法丛。它的法联络 $D^{\perp}$ 由矩阵

$$\omega=\begin{pmatrix} 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{74}$$

给出。如前所述，当法标架经受变换

$$\begin{pmatrix} e_2' \\ e_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{75}$$

时，联络式按下式改变

$$\omega_{23}'=\omega_{23}+\mathrm{d}\theta。 \tag{76}$$

因为底流形 M 是一维的，故没有曲率式。

但是一个有趣的不变量可如下引进：设 M 是一条闭曲线，令 e_2 是一个连续光滑的法向量场，那么

$$T(e_2)=\frac{1}{2\pi}\int_M\omega_{23} \tag{77}$$

是一个实数。由(76)我们看到：如果 e_2' 是另外一个光滑的法向量场，$T(e_2')$ 与 $T(e_2)$ 差一个整数，因此 $T(e_2)\bmod 1$ 是闭曲线 M 的一个不变量，称为是 M 的**全扭率**。假若 M 的曲率处处不为零而且 M 是 C^3 的，我们便能选 e_2 为主法向量，$T(e_2)$ 就是全挠率了。不过全扭率对 C^1 曲线就已定义了。

全扭率在分子生物学中起重要作用，T. 班科夫和 J. 怀特证明了它在共形变换下是不变的[2]。

6. 复线丛

$q=1$ 的复向量丛称为**复线丛**。它在数学的许多部分中起重要作用。

对于一个复线丛，联络和曲率矩阵 ω,Ω 分别是一次、二次微分式，(20)成为

$$\Omega=\mathrm{d}\omega。 \tag{78}$$

由(27)我们有

$$c_1(\Omega)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega。 \tag{79}$$

如果丛是埃尔米特的，联络是可容许的，那我们就采用酉正标架，此时 ω 与 Ω 是斜埃尔米特的：

$$\omega + \overline{\omega} = 0, \quad \Omega + \overline{\Omega} = 0, \tag{80}$$

即$\sqrt{-1}\omega$ 和$\sqrt{-1}\Omega$ 是实的。我们强调本节中的 ω 和Ω 是微分式而不是矩阵。

也许最重要的复线丛是霍普夫丛,定义如下:映射

$$\pi: \mathbf{C}_{n+1} - \{0\} \to P_n(\mathbf{C}) \tag{81}$$

把 n 维复投影空间 $P_n(\mathbf{C})$定义为 $\mathbf{C}_{n+1}$中过原点的所有直线构成的空间。如果 $(z_0, z_1, \cdots, z_n) = Z \in \mathbf{C}_{n+1} - \{0\}$, $\pi Z = [Z]$ 是 P_n 中的点。它以 Z 为齐次坐标向量。

为了研究 $P_n(\mathbf{C})$中的几何,我们在 $\mathbf{C}_{n+1}$中引进埃尔米特数积

$$(Z, W) = \sum z_A \overline{w}_A, \tag{82}$$

其中

$$Z = (z_0, \cdots, z_n), \quad W = (w_0, \cdots, w_n), \tag{83}$$

并在这节中采用指标变化范围

$$0 \leqslant A, B, C \leqslant n。\tag{84}$$

Z_A 称为是一个酉正标架,如果

$$(Z_A, Z_B) = \delta_{A\overline{B}}。\tag{85}$$

所有酉正标架构成的空间可等同于酉群 $U(n+1)$。我们有下列图表

$$\begin{array}{ccl} \{Z_0, Z_1, \cdots, Z_n\} & \in & U(n+1) \\ \downarrow & & \pi_0 \downarrow \\ Z_0 & & \in S^{2n+1} = \{Z \in \mathbf{C}_{n+1} \mid (Z, Z) = 1\} \\ \downarrow & & \pi \downarrow \\ [Z_0] & & \in P_n(\mathbf{C}) \end{array} \tag{86}$$

映射 π 确定 $P_n(\mathbf{C})$上一个圆丛,称为霍普夫丛。当 $n = 1$ 时, $P_1(\mathbf{C}) = S^2$, 得到的映射

$$\pi: S^3 \to S^2 \tag{87}$$

即霍普夫映射,是最先发现的映射,它把一个流形映到低一维的流形并且不同伦于一个常值映射(常值映射是把流形映为像空间中一个点)。

在酉正标架 Z_A 的空间中我们可记

$$\mathrm{d}Z_A = \sum \omega_{A\overline{B}} Z_B, \tag{88}$$

其中

$$\omega_{A\bar{B}} + \omega_{\bar{B}A} = 0, \quad \omega_{\bar{B}A} = \overline{\omega_{B\bar{A}}}。 \tag{89}$$

$\omega_{A\bar{B}}$是$U(n+1)$的毛雷尔-嘉当式。他们满足下列毛雷尔-嘉当方程，此方程由外微分(88)得：

$$d\omega_{A\bar{B}} = \sum_C \omega_{A\bar{C}} \wedge \omega_{C\bar{B}}。 \tag{90}$$

活动标架法是利用$U(n+1)$中的这些方程来研究$P_n(\mathrm{C})$或S^{2n+1}上的几何。

S^{2n+1}由复线丛(81)中单位向量组成。由(88)，

$$DZ_0 = \omega_{0\bar{0}} Z_0 \tag{91}$$

确定这个丛上一个可容许的联络。它是一个联络，这因为§3中条件D1)和D2)成立，它是可容许的，这是因为(89)推出$\omega_{0\bar{0}}$是斜埃尔米特的。联络式是

$$\omega = \omega_{0\bar{0}}。 \tag{92}$$

由(90)，这个联络的曲率式是

$$\Omega = d\omega = \sum \omega_{0\bar{\alpha}} \wedge \omega_{\alpha\bar{0}} = -\sum \omega_{0\bar{\alpha}} \wedge \omega_{\bar{0}\alpha}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n。 \tag{93}$$

与此相应是埃尔米特微分型

$$\sum \omega_{0\bar{\alpha}} \omega_{\bar{0}\alpha} = (dZ_0, dZ_0) - (dZ_0, Z_0)(Z_0, dZ_0)。 \tag{94}$$

最后的表达式在经历$Z_0 \to \lambda Z_0$，$|\lambda| = 1$的改变下不变。因此它是$P_n(\mathbf{C})$上一个正定埃尔米特微分型，确定$P_n(\mathbf{C})$中一个埃尔米特度量，该度量的凯勒式是

$$K = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum \omega_{0\bar{\alpha}} \wedge \omega_{0\alpha} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Omega, \tag{95}$$

它显然是闭的。从而这个度量是凯勒的，称为$P_n(\mathbf{C})$上施图迪-富比尼度量。

一个基本事实如下：由于有了复结构，联络式ω有一个“势”，也就是说它可以“求积分”。事实上，设$Z \in \mathbf{C}_{n+1} - \{0\}$，令

$$Z_0 = \frac{Z}{|Z|}, \quad |Z|^2 = (Z, Z)。 \tag{96}$$

于是我们得

$$\begin{aligned} \pi_0^* \omega_{0\bar{0}} &= (DZ_0, Z_0) = (dZ_0, Z_0)。 \\ &= \frac{1}{2|Z|^2} \{(dZ, Z) - (Z, dZ)\} \\ &= (\partial - \bar{\partial}) \log |Z|, \end{aligned} \tag{97}$$

其中∂和$\bar{\partial}$是$\mathbf{C}_{n+1}$中分别关于全纯坐标z_A和反全纯坐标$\bar{z}_A$的微分。但是最后那个

表达式是 $\mathbf{C}_{n+1}-\{0\}$ 中的式子。为了得到 $P_n(\mathbf{C})$ 中的式子，我们取一个固定的向量 $A\in\mathbf{C}_{n+1}-\{0\}$。于是方程

$$(Z,A)=0 \tag{98}$$

在 $P_n(\mathbf{C})$ 中定义一个超平面 L。函数

$$\frac{|Z,A|^2}{|Z|^2} \tag{99}$$

在 $P_n(\mathbf{C})-L$ 中是确定的，因为当 Z 乘以一个因子时它不变。这里 $|Z,A|^2=|(Z,A)|^2$。显然

$$\partial\bar{\partial}\log|Z,A|^2=0。 \tag{100}$$

（这可表述为：一个解析函数绝对值的对数是调和的。）因此我们在 $P_n(\mathbf{C})-L$ 中有关系

$$\Omega=\partial\bar{\partial}\log\frac{|Z,A|^2}{|Z|^2}。 \tag{101}$$

这包含了下列定理的分析内容：

定理 （魏廷格）。设 M 是紧致黎曼曲面，f: $M\to P_n(\mathbf{C})$ 是一个全纯映射，则像集 $f(M)$ 与 $P_n(\mathbf{C})$ 中所有超平面相交于相同的次数，这个次数等于 $f(M)$ 的（适当规范化了的）面积。

我们规范化 $P_n(\mathbf{C})$ 中面积元为 $\frac{K}{\pi}$，其中 K 是由(95)定义的凯勒式。于是

$$\begin{aligned}\frac{K}{\pi}&=-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega=-\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\partial\bar{\partial}\log\frac{|Z,A|}{|Z|}\\&=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{d}(\partial-\bar{\partial})\log\frac{|Z,A|}{|Z|}。\end{aligned} \tag{102}$$

我们留给读者证明 $P_1(\mathbf{C})$ 的总面积是 1。

按假设 $f(M)$ 是一条紧致全纯曲线。我们假定它不在超平面 L 中，于是它与 L 相交于有限个点，比如说 $x_k\in M, 1\leqslant k\leqslant r$。围绕每一 x_k 我们取一圆盘 Δ_k。公式(102)允许我们对 $M-\bigcup\Delta_k$ 用斯托克斯定理。容易看出：当 Δ_k 收缩到 x_k 时，边界项趋于解析函数 (Z,A) 的零点个数，定理得证。

魏廷格定理也可以用拓扑方法证。我们的方法的最大长处是它以最清晰的方式把问题的局部与整体这两个侧面联系起来，并且可以推广到 M 是非紧的情形。在我们的微分几何讨论中引出的这个想法是非紧全纯曲线的值分布理论的基础。无须说明，非紧的情形是更精妙得多了。关于它的发展见[6]，[9]。

在§5 中讨论过的 E^3 中曲面的切丛和 E^3 中曲线的法丛也可以看做为复线丛。因为纤维是具有一个内积定向平面，而且定义了一个复结构使得乘 $\sqrt{-1}$ 的运

算是旋转 90°角。§5 末尾的结果可用这一节的记号来处理。我们留此做为练习。

7. 麦克斯韦方程和杨-米尔斯方程

时空 $(x^1, x^2, x^3, t = x^0)$ 中麦克斯韦方程,照通常给法可写为

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \\ &\operatorname{curl}\ \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 4\pi\vec{j}, \end{aligned} \tag{103a}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ &\operatorname{curl}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0, \end{aligned} \tag{103b}$$

其中

$$\begin{aligned} &\vec{E} = (E_1, E_2, E_3) = \text{电场}, \\ &\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) = \text{磁场}, \\ &\rho = \text{荷密度}, \\ &\vec{j} = (j_1, j_2, j_3) = \text{电流向量。} \end{aligned} \tag{104}$$

这些可以写成另一形状,它易于有自然且重要的推广。

事实上,引进反对称矩阵

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{105}$$

并令

$$\begin{aligned} J &= \rho \mathrm{d}x^0 + j_1 \mathrm{d}x^1 + j_2 \mathrm{d}x^2 + j_3 \mathrm{d}x^3 \\ F &= \sum F_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\alpha。 \end{aligned} \tag{106}$$

在时空中我们用洛伦兹度量

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2, \tag{107}$$

以及在霍奇意义下对应的 * 算子。利用这些记号直接验证(103a),(103b)能分别写为

$$\mathrm{d}^* F = 4\pi J, \tag{108a}$$

$$\mathrm{d}F = 0, \tag{108b}$$

其中 d^* 是余微分，它定义为

$$d^* = *d*。\tag{109}$$

当 M 是一个 4 维洛伦兹流形，E 是 M 上一个埃尔米特线丛，这恰是上一节讨论过的情形。我们的记号与术语和物理学家的有分歧，我们作下列对照表：

数学	物理
联络式 ω	规范势 A
曲率式 Ω	法拉第(电量单位) F 或场强

方程(103b)或(108b)是比安基恒等式，它是方程

$$dA = F \tag{110}$$

的推论。(110)是(78)的改写。正是由于这个事实 A 称为规范势。

近来认识到，为了描述电磁学中所有现象，人们应该用(110)来代替经典的方程(108b)。(108b)是(110)的一个推论，它对大多数应用来说是足够的。上述认识到的事实是一个重要实验的后果，这个实验在 1959 年被 Y. 阿哈拉诺夫和 D.伯姆提出，在 1960 年被 R.G.钱伯斯实现了，见[10]。换句话说，麦克斯韦方程中的未知量应该是联络式或规范势 A，而不应是曲率式或场强 F，方程应该是

$$d^* F = 4\pi J, \quad dA = F。\tag{111}$$

当人们推广到杨-米尔斯方程时，这事就清楚了，见[1]。这里的对象是 M 上一个 $SU(2)$ 丛，M 仍是一个 4 维洛伦兹流形。因为规范群是非交换的，人们必须使用协变微分 D_A。杨-米尔斯方程是

$$D_A^* F = 4\pi J, \quad D_A A = F, \tag{112}$$

其中

$$D_A A = dA - A \wedge A。\tag{113}$$

于是我们看出杨-米尔斯方程是麦克斯韦方程的一个直接推广，它们分别是纤维维数 q 为 1,2 的情形。杨-米尔斯方程在 4 维流形的研究中正起着影响深远的作用(S.唐纳森的工作)，其主要道理是方程的解给出一些流形，它们有重要的几何意义。

参考文献

（不包括微分几何的标准著作）

[1] Atiyah M F. *Geometry of Yang-Mills Fields*. Pisa, 1979
[2] Banchoff T and White J. *The behaviour of the total twist and the self-linking number of a closed space curve*

under inversions. Math. Scandinavica, 1975, **36**: 254 ~ 262

[3] Chern S. *Complex Manifolds Without Potential Theory*. 2nd edition, Springer, 1979

[4] Chern S. *Circle Bundles*. Geometry and Topology, Ⅲ. Latin Amer. School of Math., Lecture Notes in Math., **597**, 114 ~ 131, Springer, 1977

[5] Dupont Johan L. *Curvature and Characteristic Classes*. Lecture Notes in Math. **640**, Springer, 1978

[6] Griffiths P. *Entire holomorphic mappings in one and several complex variables*. Annals of Math. Studies, **85**, Princeton Univ. Press, 1976

[7] Milnor J W and Stasheff J. *Characteristic Classes*. Annals of Math. Studies **76**, Princeton, 1974

[8] Pittie H V. *Characteristic Classes of Foliations*. Pitman, San Francisco, 1976

[9] Wu H. *The Equidistribution Theory of Holomorphic Curves*. Annals of Math. Studies **64**, Princeton Univ. Press, 1970

[10] Wu T T and Yang C N. *Concept of non-integrable phase-factors and global formulation of gauge fields*. Physical Review D, 1975, **12**: 3845 ~ 57

65. 美国的微分几何——一些个人的评说

1987 年,美国数学会为纪念成立 100 周年,出版《A Century of Mathematics in America》3 卷集,陈省身应邀写成此文,刊于该书第 1 卷,375 ~ 377 页。中译文收于《陈省身文选》,科学出版社,1989 年;张洪光译,李文林校。

1. 射影微分几何

我从事于几何大都亏了我的大学老师姜立夫博士。1919 年,姜博士在哈佛的 J. 库里奇指导下获得其哲学博士。他一返回中国,就在刚刚创办的天津南开大学——一所当时大约有三百名学生的私立大学,筹建了一个“一人”系。在我的班级里,有五名数学专修生。我给讨论班报告取自库里奇的书《非欧几何学》、《圆和球的几何学》以及其他来源的材料。

当 1930 年我从南开大学毕业时,或许在中国做研究的唯一的数学家是那时北平清华大学的教授孙镛博士。1928 年,孙镛在芝加哥大学 E.P.莱恩的指导下获得其哲学博士。为了跟孙博士工作,我成了清华大学的助教,一年过后,成为研究生。我开始知道,有一个芝加哥的 E.J.威尔辛斯基创建的射影微分几何的“美国学派”。威尔辛斯基关于这个主题的第一篇论文出现于 1901 年。1906 年,他是美国数学会的纽黑文演讲的主讲者。这个主题一直盛行到 30 年代。1931 年,P. 斯佩里编辑的关于射影微分几何的文献目录包含了二百多篇论文。我那时特别喜欢读哈佛的 G.M.格林的论文。

还有一个由 G. 富比尼和 E.切赫于 1918 年创建的射影微分几何的“意大利学派”。美国学派采用偏微分方程组作为解析基础,并把李群理论用来产生不变式,但是这个意大利学派却采取微分形式作为解析基础。

注意到这一点或许是有趣的,即当我 1949 年加入芝加哥大学为教授时,我实际上成了 E.P.莱恩的继任人。他是一个典型的正派的人。在这门学科上,我消耗了最好的一些年华。但是到了德国,我却毅然离开它而去开垦新的沃土了。

2. 道路几何

研究微分几何的另一群活动的人物是在普林斯顿,其代表人物是 L.P. 艾森哈特、O. 维布伦和 T.Y. 托马斯。艾森哈特的《黎曼几何》是一本第一流著作和知识的源泉。维布伦有广泛的数学兴趣,包括几何基础、代数拓扑、微分几何和数学物理。他在把普林斯顿发展成为一个世界数学中心中,起了重要的作用。

我第一次与维布伦接触,发生在 1936 年。他写信给 E. 嘉当谈射影正规坐标。这对"道路几何"的普林斯顿学派来说是紧要的事,因为它们要用于定义张量的"正规开拓"。射影正规坐标可以用不同的定义给出,而每一种定义都有不足之处。在维布伦的信以后,我提出了一个基于 E.嘉当的几何方法的定义。这个结果由维布伦推荐并发表在 1938 年的《数学纪事》上。1937 年,在我回中国之后,他把我和我的学生们的其他几篇论文推荐到年鉴和别的期刊。1942 年,他邀请我访问高级研究所。1943 ~ 1945 年是我一生中最丰饶多产的时期之一。维布伦对现代数学和美国数学具有深邃的眼光。他在自己的研究和美国数学的发展两方面都有非常大的贡献。1960 年他去世以后,为了纪念他,美国数学会设立了几何方面的"维布伦奖"。我想,作这个提议的是 W. 吉文斯和我本人。

3. 拓扑学的发展

本世纪初,整体微分几何开始引人注目。例如,美国数学会会报的前几卷就含有希尔伯特和庞加莱两人从事曲面论的论文。在那里,希尔伯特给出了他著名的利布曼球面刚性定理的证明,庞加莱给出了凸面上的闭测地线的存在证明。(我相信这些论文是应邀请而来的,表现了他们对新期刊的支持。)

美国对微分几何的最重要的贡献多半来自拓扑学。M. 莫尔斯的临界点理论有它的变分法的起源。它成了黎曼几何中一个适当与必需的工具。测地线的研究现在也是一个有活力的论题。

另一个重要的贡献是 H. 惠特尼的球丛理论,它导致了微分几何中的一个基本概念——一般的纤维丛。惠特尼看出了上同调在拓扑学应用中的重要,引导出了拓扑学范围的示性类。

66. 示性类与示性式

本文分三讲。前两讲在台湾“中央研究院”讲述(1990 年 10 月 19 日、26 日),第三讲在台湾大学进行(11 月 2 日)。由康明昌、胡锴整理。原载《陈省身文选》,台湾联经出版公司,1993 年。

第一讲 纤维丛与示性类

§0 前言

我今天看了中央研究院数学所现在蓬勃发展的情形和大家努力工作的精神,非常的高兴。数学所李国伟先生刚才讲过,这个所是我开始的。经过是这样,1946 年我从美国回到上海,1943 ~ 1946 年我在美国普林斯顿高级研究所开始做示性类这方面的工作,就是今天要讲的东西。那时候的旅行不像现在,那时候是坐轮船。经过二十多天的轮船旅行,我终于到了上海,预备到清华大学教书。可是中央研究院告诉我,在抗战时已经准备设立数学研究所,并且在昆明成立筹备处,由姜立夫先生任筹备处主任,所以数学所要成立时请姜先生担任所长;可是战争结束时,姜先生奉派出国进修,他们就要我帮助姜先生办这个所。我答应了这件事。

当时数学研究所的筹备处设在上海。由于日本退回的庚子赔款在上海法租界成立自然科学研究所;自然科学研究所有很多部分,我们就接收了数学的部分。数学部分的设备很好,当时重要的杂志,如 Math. Annalen, Crelle's Journal, Liouville Journal,都保存了一整套。

刚开始时,我最重要的工作是训练新人。我找了一些刚毕业的大学生,一共有十几个,大部分是大学毕业三年以内。他们能做什么?我跟他们讲数学,因为当时要求他们做研究,除了少数例外,大部分不知如何着手。我想,数学里面不需太多预备知识的是代数拓扑。所以,我一个礼拜跟他们讲 6 个小时的代数拓扑,基本的参考书是亚历山德罗夫与霍普夫的《拓扑学》,是当时一本经典的书。

在这群人中,后来有好几位都有很好的成就。例如,吴文俊日后到法国研究,在示性类有很重要的成就;廖山涛最先做紧致空间映射的不动点定理,后来搞动态系统,他现在在北京大学,他因为动态系统的贡献得了第三世界科学院的数学奖;

还有杨忠道先生，他是本院的院士；又如陈国才，他在微分几何和李群有很杰出的贡献，陈国才是很有独创性的数学家，他的工作比美国有名的数学家邓尼斯·沙利文做得还完全，也比较早，当然沙利文才华很大，做的范围比较广。

§1 斯蒂弗尔-惠特尼类与庞特里亚金类

我们今天要讲的是示性类。

示性类重要的原因是由于近代数学一个基本的概念：纤维丛。

纤维丛最简单的例子是这样子的。你们都学过解析几何，笛卡儿怎么决定平面上点的坐标呢？取 x 轴，再取任意一条与 x 轴相交而不重合的直线 l，则所有与 l 平行的直线族盖满平面。如果通过 P 点并且平行于 l 的直线在 x 轴截出的点的坐标是 x，P 点在这直线的坐标是 y，那么 (x, y) 就是 P 点的坐标(图 1)。

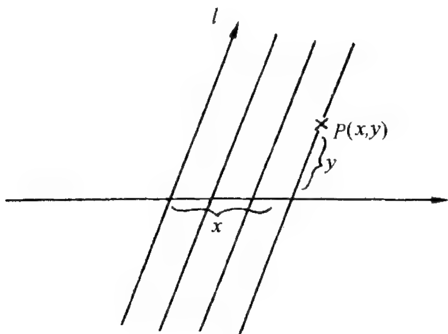


图 1

注意，笛卡儿这样定出的 x 与 y 是不对称的。后来研究数学的人把它们变成正交，有了 x 轴与 y 轴，这是比较特殊的情形，所有与 l 平行的直线都是纤维，整个平面是 x 轴与 l 的乘积，它是这两条直线的拓扑积。

一般的纤维丛是把“乘积”这个限制放松，我们不要求整体是个乘积，只要求局部是个乘积。这个放松意义大极了，范围也大得多，包括许多有意思的情形。什么是局部积？

如果 E 是空间 M 的纤维丛，设 $\pi: E \longrightarrow M$ 是 E 在 M 的投影。所谓的局部积就是，对于 M 的每一个点 x，都有一个邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 是个乘积。因为 $\pi^{-1}(U)$ 是个乘积，它里面的点有两种坐标 x 与 y，x 是 U 里的点的坐标，y 是纤维上的坐标(图 2)。这跟笛卡儿的情形完全一样。

但是，y 坐标的选择和 U 有关，通常把它记为 y_U。如果 x 有另一个邻域 V 使得 $\pi^{-1}(V)$ 也是乘积，那么 $\pi^{-1}(x)$ 上的点就有两种坐标 (x, y_U) 与 (x, y_V)。y_U 与 y_V 当然有些关系，我们假定这个关系是线性变换，也就是，

$$y_U \cdot g_{UV} = y_V,$$

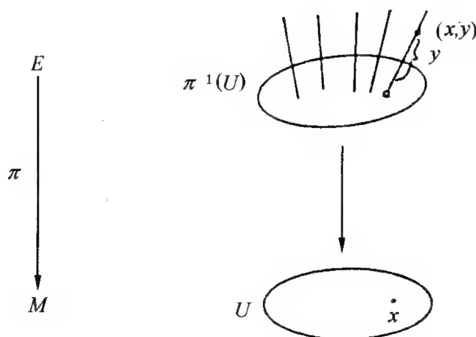


图 2

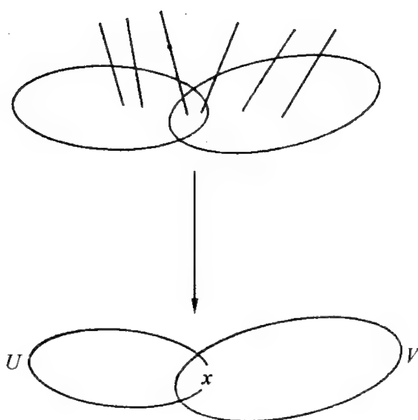


图 3

其中 g_{UV}是一般线性群的元素。这个假定主要是使纤维上的线性结构有意义,因此我们得到的不是一般的纤维丛,而是向量丛。

更详细的说,设 M 是微分流形,E 是M 上的向量丛, $x \in M$, π: $E \longrightarrow M$ 是E 到 M 的投影。我们要求所有的空间与映射都是平滑的。考虑以下的图形,

$$\begin{array}{ccc} Vq & \xrightarrow{\ i\ } & E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & M \end{array} \tag{1}$$

向量丛 E 是由所有的向量空间 V_q 组成,其中 $V_q = \pi^{-1}(x)$, x 是M 上任意一点。我们还要求:

(a) 对于 M 上任意一点 x,都存在 x 的某一邻域 U 使得$\pi^{-1}(U)$变成积流形 $U \times Y$,其中 Y 是 q 维的向量空间;因此,$\pi^{-1}(U)$的局部坐标是(x, y_U), $x \in U$,

$y_U \in Y$。

(b) 若邻域 U 与 V 有非空交集,其坐标 y_U 与 y_V 必存在以下的线性关系:

$$y_U \cdot g_{UV}(x) = y_V, \tag{2}$$

其中 $g_{UV}(x) \in GL(q)(=GL(q;\mathbf{R})$ 或 $GL(q;\mathbf{C}))$,变换群 $GL(q)$从右边作用于 Y。

紧接的一个问题:局部积是否恒为整体积?这个问题可不简单,它相当于要找出局部积的不变量。回答这个问题的是庞加莱与霍普夫的定理:

定理(庞加莱-霍普夫)

设 M 是紧致定向的流形,TM 是 M 的切向量丛,$s: M \longrightarrow TM$ 是 M 上之一般切向量场。则

$$\chi(M) = s \text{ 的零点的个数总和}, \tag{3}$$

此处之 $\chi(M)$是流形 M 的欧拉-庞加莱示性数。

在 M 是二维的情形,庞加莱证明这个定理,霍普夫把它推广到 n 维流形。如果切向量丛 TM 是整体积,我们显然可以找一个处处不为零的切向量场。因此,如果 $\chi(M) \neq 0$,根据庞加莱-霍普夫定理,我们得知切向量丛不是整体积。这就有意思了,既然切向量丛不是整体积,我们就可以接下去问它有什么样不同的性质。

庞加莱-霍普夫定理还有更深一层的意义。我们知道,欧拉-庞加莱示性数是个拓扑不变量,而庞加莱-霍普夫定理告诉我们,随便取个一般的切向量场,把它的零点个数加起来是个拓扑不变量。因此,我们把这个想法推广。

既然一个向量场可以定义欧拉-庞加莱示性数,霍普夫就有这么一个想法,如果取 k 个向量场会怎样?若 $s_1, s_2, \cdots, s_k$ 是 k 个在一般位置的向量场,那么在 M 上使 $s_1(x), \cdots, s_k(x)$线性相关的点形成一个维数是 $k-1$ 的轨迹。这样的 $k-1$ 维的轨迹是个下闭链吗?如果是个下闭链,它的下同调类与这些向量场的选择无关吗?这些问题并不是那么简单,因为这个 $k-1$ 维的轨迹不一定是个 $k-1$ 维的下闭链。

做这工作的是在霍普夫指导之下的 E. 斯蒂弗尔,斯蒂弗尔的博士论文是 1936 年完成的。同时做这工作的还有 H. 惠特尼。惠特尼在示性类的贡献比斯蒂弗尔重要多了。

美国有一个时期,由于维布伦的鼓励,代数拓扑有很大的发展。可是我想惠特尼是几十年来美国最伟大的代数拓扑学家。惠特尼第一个看到微分拓扑的重要性,他建立微分拓扑的基础理论。惠特尼在纤维丛与示性类有非常大的贡献,他用的是上同调类。他了解上同调类的重要,它不仅是群,还可以定义乘法使它变成环,这个乘法是很要紧的。惠特尼在分层流形(stratified manifolds)也有很基本的工作。我个人觉得,分层流形在数学的发展中占有很重要的地位。在微分几何通常假定流形是平滑的,因为我们可以使用微积分的工具,但是这是不自然的。有很多

实际的例子都不是平滑的,像桌子、椅子。当然,分层流形是比较复杂的,因为它有奇异点,而处理奇异点在数学上是一个困难的问题。不过,这样的发展是很自然的。惠特尼在美国数学会一百周年纪念的历史论文集有一篇文章讲拓扑学的发展,值得一读。

回到原来的问题。我们本来希望这个 $k-1$ 维的轨迹是个下闭链。惠特尼说,不应该把它看成下闭链,应该找个上闭链。真正要紧的是上同调类。仔细想想,这其实是很自然的,因为表示一个向量等于零或一组向量是线性相关的条件是一组方程式,这些条件应该用上同调类表示。同时,由于使用上同调类的缘故,我们所讨论的向量丛也不必限制在切向量丛,任意的向量丛都可以。怎样推广欧拉-庞加莱示性数?这个推广就叫斯蒂弗尔-惠特尼示性类。

其实,想法是很简单的。设 $\pi: E \longrightarrow M$ 是流形 M 上的纤维丛;映射 $s: M \longrightarrow E$ 如果满足 $\pi \cdot s = \mathrm{id}$, 则 s 称为 E 的截面。怎么找出一个纤维丛的截面?

用胞腔剖分把流形 M 切成小块,不妨要求切得相当细使得纤维丛 E 限制在每个胞腔时都变成拓扑积。因此,要决定 E 的截面时只需定出每个胞腔在纤维的影像即可。

我们从较低维的胞腔做起,再把它延拓到较高维数的情形。例如,假设在两个顶点已选好映射的影像,考虑连接这两点的一维胞腔。只要纤维是连通的,我们不难把这个映射延拓出去。由归纳法,假设在某个 k 维胞腔 σ 的边界(即所有的 $k-1$ 维胞腔)都已经定义一个到纤维 Y 的映射,也就是存在映射 $s: S^{k-1} \longrightarrow Y$, 我们要把它延拓到 σ。这正是同伦理论的延拓问题。如果把 s 看成同伦群 $\pi_{k-1}(Y)$ 的元素并且它等于零,则 s 可以延拓出去。

所以,能否延拓的障碍因素只有在同伦群不为零时才会发生。那时只好停住了。不但停住了,我们可以得到流形本身的不变量。这是左右逢源的:同伦群等于零时可以延拓,不为零时得到一个不变量。

在考虑实向量丛的 k 个截面时,对应的纤维就是斯蒂弗尔流形 $V_{q,k}$。$\mathbf{R}^q$ 的 k 维标架是 $\mathbf{R}^q$ 中一组 k 个有序线性独立的向量;斯蒂弗尔流形 $V_{q,k}$ 是 $\mathbf{R}^q$ 中所有的 k 维标架的集合。因此,我们要决定 $V_{q,k}$ 的第一个不为零的同伦群,也就是它的第一个不为零的下同调群。

在 1930 年代,要计算某个特定空间的下同调群都不一定顶有办法的。不过,斯蒂弗尔做了这件事,惠特尼也做了。在这里我们不详细叙述这些结果,我推荐大家参考斯廷罗德的书[4],这本书是这方面的经典名作。

这些研究的终局是示性类的诞生:实向量丛的斯蒂弗尔-惠特尼类

$$w^k \in H^k(M, \mathbf{Z}_2), \ 1 \leq k < q, \tag{4a}$$

与有向丛的欧拉类

$$w^q \in H^q(M, \mathbf{Z})。\tag{4b}$$

(4a)式所以把系数限制在 $\mathbf{Z}_2$ 是由于斯蒂弗尔流形的拓扑性质，因其上同调群具有挠元。

惠特尼另外有个想法，就是所谓的通用丛。惠特尼把它从切向量丛推广到任意的向量丛，这个推广是了不得的。

惠特尼观察到，在 $q+n$ 维的向量空间里所有的 q 维子空间形成一个维数是 qn 的流形，这就是格拉斯曼流形 $Gr(q,n)$，$Gr(q,n)$ 上面有一个现成的向量丛 E_0。为什么呢？因为 $Gr(q,n)$ 里的一点，本身是个向量空间，我们就把它看成纤维就是了。这个向量丛

$$\pi_0: E_0 \longrightarrow Gr(q,n) \tag{5}$$

就是通称的重言丛。现在我们也称它为通用丛，因为对于任意的向量丛，只要 n 足够大时，它必可由通用丛经由某一映射

$$f: M \longrightarrow Gr(q,n)$$

所诱发产生的。

同样的，在 n 足够大时，庞特里亚金发现，与以上 f 同伦的任意映射都产生同样的向量丛。因此，示性类很自然的是以下像集的元素

$$f^* H^*(Gr(q,n)) \subset H^*(M)。$$

由此可见格拉斯曼流形的重要性。格拉斯曼流形的拓扑结构与代数几何的相交理论是一个基本的问题。把拓扑问题做出来，最要紧的人是 C. 埃雷斯曼。他早在 1934 年的博士论文就已开始这方面的研究。确定了格拉斯曼流形的下同调群的结构之后，我们就可以得到任意流形上任意向量丛的示性类。当系数是 $\mathbf{Z}_2$ 时，我们得到斯蒂弗尔-惠特尼类。不过我们有兴趣的是整系数或有理系数的情形。

庞特里亚金看出来，事实上埃雷斯曼也看出了，除了(4b)式的欧拉类之外，实向量丛的整系数示性类都发生在维数 $4k$ 时。这就是所谓的庞特里亚金类，记为

$$p_k(E) \in H^{4k}(M, \mathbf{Z})。$$

这些关于示性类的工作都在 1940 年左右。

我在 1943 年到普林斯顿高级研究所。我的出发点是微分几何的高斯-博内公式，它把曲率与欧拉-庞加莱示性数连起来。

定理(高斯-博内)

设 M 是有向的封闭曲面，K 是它的高斯曲率，$\mathrm{d}A$ 是面积分。则

$$\frac{1}{2\pi}\int K\mathrm{d}A = \chi(M)。\tag{6}$$

事实上，高斯没有写过(6)式这种式子，博内也没有。高斯当时考虑一个常曲率的测地三角形，如图4所示。

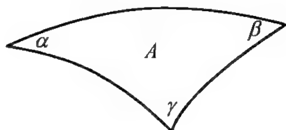


图4

他证明了

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=KA。$$

博内把测地线的限制放松，推广到任意曲线，但是要把它们的测地曲率补上去。

从高斯与博内的式子到现在的(6)式之间，是花了相当长的时间，因为19世纪的人对于欧拉-庞加莱示性数，三角剖分这些观念还没弄清楚，所以在文献中大家各说各的，不大能连接得起。不过，在所有这些之中，“亏格”是一个重要的观念。

亏格是有向封闭曲面的拓扑不变量，它是曲面上的洞数；事实上，令 g 是亏格，则

$$\chi=2-2g。$$

另一方面，有向曲面一定有复结构，因此可以考虑它的全纯微分式。代数曲线理论的一个定理说，有向封闭曲面上的所有全纯微分式形成维数等于 g 的复向量空间。这是不简单的，因为它在拓扑不变量与复结构不变量之间建立关系。把这些结果推广到高维的情形，示性类是一项有力的工具。

1943年我在普林斯顿遇到A. 韦伊。

第二次世界大战开始时，法国参战后实行征兵，韦伊主张和平就躲到国外，被法国政府抓到关在监狱。韦伊那本 L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications 的序就是在监狱写的。不久法国投降，不需要打仗了，韦伊也被释放出来。他到美国以后，由于战争，每个单位都在紧缩，他找不到工作，只好到利哈伊大学教微积分。在韦伊这是很痛苦的。

这时韦伊刚和C. 艾伦多弗合写一篇多面体的高斯-博内公式，这是很了不起，很有发展的文章。因为多面体有奇异点，讨论上面的积分就很复杂。韦伊跟我谈起，为什么多面体的情形会这么麻烦。

我根据我对二维情形的了解想推广到高维的情形。高斯-博内公式在二维时把欧拉-庞加莱示性数和曲率拉上关系，因此我就想到如何在高维时也把斯蒂弗尔-惠特尼示性类与曲率也拉上关系。

有一个星期天，我到办公室。普林斯顿大学的数学馆星期天是不开门的，但是

每个人都有一把大门钥匙可以进去。我到图书馆随便翻翻，突然想到：何不用复向量丛试试看？有些向量丛本身没有复结构，但是它的纤维仍然有复结构。以往关于斯蒂弗尔-惠特尼类或庞特里亚金类，因为限制在实系数，斯蒂弗尔流形与格拉斯曼流形的上同调群具有挠元，所以只能考虑系数在 $\mathbf{Z}_2$ 的上同调群。可是在复系数的斯蒂弗尔流形与格拉斯曼流形情形就很简单了。

所以，我就把斯蒂弗尔与惠特尼的方法推广到复系数，并且考虑复向量丛，这就得到陈类。

$$c_k(E) \in H^{2k}(M,\mathbf{Z})。$$

这是最要紧的示性类。因为斯蒂弗尔-惠特尼类的系数在 $\mathbf{Z}_2$，不太好用，庞特里亚金类也不好用。陈类在局部表现为曲率，在整体是整系数上同调类，这是用途最大的示性类。

第二讲 陈类与陈式、超度

§2 示性类与曲率

在示性类里面，我个人觉得陈类是最要紧的。

现在考虑流形上的复向量丛。如果 E 是流形 M 上的 q 维复向量丛，我们将定义一组 E 的不变量，陈类 $c_k(E)$。

$$c_k(E) \in H^{2k}(M,\mathbf{Z}), \quad 1 \leqslant k \leqslant q。$$

当 M 是 q 维的紧致复流形，E 是它的全纯切向量丛时，$c_q(E)$落在最高维的上同调群并且

$$\int_M c_q(E)$$

是个整数，其实它等于 M 的欧拉-庞加莱示性数。所以，陈类是欧拉-庞加莱示性数的自然推广。我们将用三种不同的方法定义陈类：障碍理论的方法、通用丛的方法与曲率的方法。

(Ⅰ) 障碍理论的方法

和上一次演讲中实向量丛的斯蒂弗尔-惠特尼类的定义一样，把复流形 M 作胞腔剖分，不过我们现在考虑复系数的斯蒂弗尔流形 $V_{q,k}(\mathbf{C})$。

对于 q 维复向量丛E，$1 \leqslant k \leqslant q$，如果 Σ_k 代表M 的胞腔剖分中所有的k 维胞腔，我们得到一个映射

$$\gamma_k:\ \Sigma_{2k} \longrightarrow \pi_{2k-1}(V_{q,q-k+1}(\mathbf{C}))。$$

可以证明 γ_k 是个上闭链，并且它的上同调类与这 k 个截面的选择方式无关，我们把它记为 $c_k(E)$。

因为 $V_{q,k}(\mathbf{C})$的同伦群有一大串是零，

$$\pi_i(V_{q,q-k}(\mathbf{C})) = \begin{cases} 0, & 当 0 \leqslant i \leqslant 2k, \\ \mathbf{Z}, & 当 i = 2k+1。\end{cases}$$

所以我们得到

$$c_k(E) \in H^{2k}(M,\mathbf{Z})。$$

这是想在 E 寻找 $q-k+1$ 个线性独立截面的障碍因素。

附带一笔。关于实系数斯蒂弗尔流形 $V_{q,k}(\mathbf{R})$的同伦群，

$$\pi_i(V_{q,q-k}(\mathbf{R})) = \begin{cases} 0, & 当 0 \leqslant i \leqslant k-1, \\ \mathbf{Z}_2, & 当 i = k 是奇数且 1 \leqslant k \leqslant q-2, \\ \mathbf{Z}, & 当 i = k 是偶数或 k = q-1 或 q。\end{cases}$$

不管如何，恒有一个不全为零的同态映射

$$\pi_k(V_{q,q-k}(\mathbf{R})) \longrightarrow \mathbf{Z}_2,$$

因此实向量丛的斯蒂弗尔-惠特尼类是系数在 Z_2 的上同调类。

(Ⅱ) 通用丛的方法

也跟上一次演讲时的通用丛一样，不过我们现在考虑复系数的格拉斯曼流形 $Gr(q,n;\mathbf{C})$。

埃雷斯曼在 1934 年用代数几何里的舒伯特胞腔来作 $Gr(q,n;\mathbf{C})$的胞腔剖分。任取一组整数 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q$ 与一组 $\mathbf{C}^{q+n}$的子空间 $L_1,L_2,\cdots,L_q$ 使得

$$\begin{cases} 0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \cdots \leqslant \sigma_q \leqslant n, \\ \dim L_i = \sigma_i + i。\end{cases}$$

由于 $Gr(q,n;\mathbf{C})$上的一点$[W]$代表 $\mathbf{C}^{q+n}$的 q 维子空间 W，定义舒伯特符号$(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q)$为

$$(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q) = \{[W] \in Gr(q,n;\mathbf{C}):\ \dim(W \cap L_i) \geqslant i\}$$

当 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q$ 变动时，这些舒伯特符号就变成 $Gr(q,n;\mathbf{C})$的胞腔剖分的胞腔，并且它们还是下闭链，因此代表一个下同调类。请注意，在实系数的情形，舒伯特符号不一定是 $Gr(q,n;\mathbf{R})$的下闭链。我们用同样的符号$(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q)$表示舒伯特符号的对偶上同调类。这些舒伯特符号形成下同调类群 $H_*(Gr(q,n;\mathbf{C}),\mathbf{Z})$的一组基底。因此，上同调类与下同调类的配对关系变成

$$\langle(\sigma_1,\cdots,\sigma_q),(\tau_1,\cdots,\tau_q)\rangle=\begin{cases}0, & (\sigma_1,\cdots,\sigma_q)\neq(\tau_1,\cdots,\tau_q),\\ 1, & (\sigma_1,\cdots,\sigma_q)=(\tau_1,\cdots,\tau_q)。\end{cases}$$

在这些舒伯特符号代表的上同调类中,有一个最基本的上同调类

$$\sigma^{(k)}=(0,\cdots,0,1,\cdots,1)\in H^{2k}(Gr(q,n;\mathbf{C}),\mathbf{Z}),$$

其中有 k 个 1, $q-k$ 个零。当 n 足够大时,$\sigma^{(k)}$是 $Gr(q,n;\mathbf{C})$的通用丛的第 k 个陈类。

对于流形 M 的任意 q 维复向量丛 E,先选取足够大的整数 n 与适当的映射 f,

$$f:\ M\longrightarrow Gr(q,n;\mathbf{C})$$

使得 $E=f^*(E_0)$,其中 E_0 是 $Gr(q,n;\mathbf{C})$的通用丛。定义

$$c_k(E)=f^*(\sigma^{(k)})\in H^{2k}(M,\mathbf{Z}),$$

这就是 E 的第 k 个陈类。

(Ⅲ) 曲率的方法

我认为最有用的是这个用曲率定义的方法。

设 E 是流形 M 上的 q 维复向量丛,$\Gamma(E)$是 E 上所有的截面,它形成一个复向量空间。

我们希望对于 $\Gamma(E)$的元素能作微分。这需要“联络”的概念。所谓的联络是一种映射,

$$D:\quad \Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(E\otimes T^*M),\tag{7}$$

其中 T^*M 是 M 上的复数值余切向量丛,并且满足以下条件:

$$(D1):\qquad D(s_1+s_2)=D(s_1)+D(s_2),\tag{8}$$

$$(D2):\qquad D(f(x)s)=\mathrm{d}f\otimes s+f\cdot Ds,\tag{9}$$

其中 $s,s_1,s_2\in\Gamma(E)$并且 $f(x)$是 M 上的平滑函数。这种联络不只在复向量丛时存在,在实解析向量丛时甚至有实解析的联络。

现在我们要导出联络的局部表示式。首先定义标架:q 个有序的截面 s_1, $s_2,\cdots,s_q$ 如果使得 $s_1\wedge\cdots\wedge s_q$ 在邻域 U 上恒不为零,则 $s_1,\cdots,s_q$ 叫做邻域 U 上的一组标架。

设 $s_1,\cdots,s_q$ 是向量丛 E 在 U 上的一组标架。把 Ds_i 写成

$$Ds_i=\Sigma\omega_i^j\otimes s_j,\ 1\leqslant i,j\leqslant q,\tag{10}$$

其中 ω_i^j 都是一阶微分式,并且设

$$\omega=(\omega_i^j)。\tag{11}$$

ω 叫做联络矩阵。采用简便的矩阵记法,(10)式可写成

$$Ds = \omega s。\tag{12}$$

由于任意截面都可写成标架截面的线性组合,有了 ω 之后,显然可完全定出联络 D。

如果 $s_1',\cdots,s_q'$ 是 U 上另一组标架,那么 $s_1,\cdots,s_q$ 所决定的联络矩阵 ω 与 $s_1',\cdots,s_q'$ 所决定的联络矩阵 ω' 有什么关系呢?

令

$$s'(x) = g(x)s(x),\ x \in U,\tag{13}$$

其中 $g(x)$ 是非奇异的 $q\times q$ 阶矩阵,矩阵内的元素都是 U 上的平滑函数。把(13)式微分并利用($D1$)与($D2$)可得

$$\mathrm{d}g + g\omega = \omega' g。\tag{14}$$

现在取(14)式的外微分,得

$$g\Omega = \Omega' g\tag{15}$$

其中 Ω 与 Ω' 定义为

$$\Omega = \mathrm{d}\omega - \omega\wedge\omega,\quad \Omega' = \mathrm{d}\omega' - \omega'\wedge\omega'。\tag{16}$$

根据 Ω 的定义,Ω 是一个 $q\times q$ 阶矩阵,矩阵内的元素都是二阶微分式。Ω 叫做曲率矩阵。

(15)式使我们考虑以下的行列式

$$\det\left(I + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega\right) = 1 + c_1(\Omega) + \cdots + c_q(\Omega),\tag{17}$$

其中 $c_k(\Omega)$ 是 U 上的 $2k$ 阶微分式 $(1\leqslant k\leqslant q)$。$c_k(\Omega)$ 的值与标架 $s_1,\cdots,s_q$ 的取法无关。

现在设 $\{U_\alpha\}$ 是流形 M 的开集覆盖。在每个开集 U_α 上定义 $c_k(\Omega)$。(15)式与(17)式显示这些 $c_k(\Omega)$ 在任意两开集的交集一致,因此我们得知 $c_k(\Omega)$ 是 M 上的 $2k$ 阶微分式。这些微分式 $c_k(\Omega)$ 其实是闭微分式。根据德·拉姆的理论,$c_k(\Omega)$ 对应到一个上同调类

$$c_k(E) \in H^{2k}(M,\mathbf{R})。$$

微分式 $c_k(\Omega)$ 叫做陈式。不难证明用陈式定义的陈类 $c_k(E)$ 和障碍理论或通用丛定义的陈类是一致的,主要是利用通用丛。原因是,我们以上的计算都跟

$$f:\ M \longrightarrow Gr(q,n;\mathbf{C})$$

是交换,所以我们把这个比较的工作拿到 $Gr(q,n;\mathbf{C})$ 上面的通用丛来观察。可是

在通用丛上面,所有的东西都可以很清楚,很具体地写出来。

只要把实向量丛予以复化,就可把庞特里亚金类用陈类表示出来。这种把 $c_k(E)$用曲率表示的方法日后有重大的发展,请参考[1]与[2]。

F. 希策布鲁赫的"Topological methods in algebraic geometry"还有一种定义陈类的方法。它用一组公理来确定示性类,这种方法虽然简便,它一下子就把各种示性类包括在里面,对于希策布鲁赫心目中想要应用的问题是足够了,但是它的缺点是没有说明示性类的意义。

回到复向量丛的示性类。设 E_1 与 E_2 分别是流形 M 上 q_1 维与 q_2 维的复向量丛。考虑 E_1 与 E_2 的惠特尼和 $E_1 \oplus E_2$。如何用 E_1 与 E_2 的示性类来表示$E_1 \oplus E_2$的示性类? 惠特尼提供一种简便的公式,这公式就是所谓的惠特尼对偶公式。

惠特尼原来的证明长得不得了,大约有一百多页。我上次演讲提到惠特尼在美国数学会一百周年纪念的历史论文集的文章。惠特尼说,后来 R. 托姆找到一个新方法。这是不对的。找到新方法的不是托姆,而是吴文俊,他的文章发表在 Ann. Math.吴文俊第一次遇到我的时候,还不懂拓扑学是什么,可是不到三年他就给出惠特尼对偶公式的简单证明。惠特尼的原来证明从未发表。

让我们把复向量丛 E 的陈类加在一起,

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_q(E) \in H^*(M, \mathbf{Z})。$$

它是 M 上同调环的元素,这个上同调环的乘法是上同调类的上积。惠特尼对偶公式说,

$$c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \cdot c(E_2)。$$

我们先把 $c(E)$写成

$$c(E) = \prod_{i=1}^{q} \{1 + \gamma_i(E)\},$$

这个写法只是形式的写法,我们不必深究 $\gamma_i(E)$是什么,它只告诉我们这些 $\gamma_i(E)$的基本对称式就是 $c_k(E)$, $1 \leqslant k \leqslant q$。现在定义陈特标

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^{q} e^{\gamma_i(E)}。$$

陈特标的好处是把乘法变成加法,因此我们得到以下公式

$$\mathrm{ch}(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{ch}(E_1) + \mathrm{ch}(E_2),$$

$$\mathrm{ch}(E_1 \otimes E_2) = \mathrm{ch}(E_1) \cdot \mathrm{ch}(E_2),$$

其中 $E_1 \otimes E_2$ 是两个向量丛的张量积。

现在大家都知道,在拓扑、分析或算子代数有一个重要的发展,那就是 K 理论。把流形 M 上所有的(任意维数)复向量丛集合起来,经过适当的同化(格罗腾

迪克建构方法)，把加法定为向量丛的惠特尼加法，把乘法定为向量丛的张量积，我们得到一个交换环 $K(M)$。以上讨论的陈特标的两个公式可以叙述为：陈映射 ch

$$\mathrm{ch}:\ K(M) \longrightarrow H^*(M,\mathbf{Z})$$

是环 $K(M)$ 到环 $H^*(M,\mathbf{Z})$ 的同态映射。阿蒂亚与希策布鲁赫证明，如果 M 是有限复形，则

$$\mathrm{ch}:\ K(M)\otimes\mathbf{Q} \longrightarrow H^{2*}(M,\mathbf{Q})$$

是同构映射。

陈特标在指标理论也有重要作用。设

$$D:\ E \longrightarrow F$$

是向量丛 E 与 F 间的椭圆算子。阿蒂亚与辛格的指标定理是这样的：

定理(阿蒂亚-辛格)

设 $\mathrm{ind}(D) = \dim(\mathrm{Ker}\ D) - \dim(\mathrm{Coker}\ D)$，$\mathrm{Td}(M)$ 是有向紧致流形 M 的托德类。则

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \mathrm{ch}(D)\cdot \mathrm{Td}(M)。$$

请注意，我们只定义复向量丛的陈特标，我们还没有定义椭圆算子的陈特标。即使如此，大家仍然可以体会这个公式的重要性，因为它的左边是个解析指标，右边却是个几何指标。这是一个整体的结果，是一个十分深刻而重要的结果。

§3　超度

我们曾提过，由陈式 $c_k(\Omega)$ 决定的陈类 $c_k(E)$ 是向量丛 E 的不变量，因此它与我们选取的联络 D 无关。事实上这件事可以直接证明，若 D 与 D' 是复向量丛 E 上的联络，Ω 与 Ω' 是 D 与 D' 所决定的曲率矩阵，我们可以找到定义在流形 M 整体上的 $2k-1$ 阶的微分式 Q 使得

$$c_k(\Omega) - c_k(\Omega') = \mathrm{d}Q。$$

这种过程叫做超度。

我们还可以用高斯-博内公式的证明来说明超度的现象。

设 M 是二维有向黎曼流形，$x \in M$。任取在 x 的单位切向量 e_1，则存在唯一的单位切向量 e_2，使得 e_1 与 e_2 垂直并且 e_1, e_2 形成一组与 M 的定向一致的标架。令 ω_1, ω_2 是 e_1, e_2 的对偶标架，它们是定义在 M 的单位切向量丛 E 之上。设映射

$$\pi:\ E \longrightarrow M \tag{18}$$

是 E 到 M 的投影。事实上 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 是 M 的微分式，它是 M 的面积元素。

定义联络式 ω_{12}使它是满足以下式的唯一的一阶微分式,

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}。\tag{19}$$

(19)式告诉我们这种联络没有挠率。

现在对(19)式作外微分,得

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{20}$$

其中 K 是高斯曲率。

(20)式是极端重要的,因为高斯-博内公式说$\frac{1}{2\pi}K\omega_1 \wedge \omega_2$ 正是欧拉类,而(20)式说把它拉到 E 时它可以积分,并且积分值正是联络式。这个式子给出高斯-博内公式最自然的证明,这个证明可以推广到高维的情形,它还有许多其他的应用。

超度的现象也可以发生在主丛或标架丛。我们用陈-西蒙斯式来加以说明。

在(13)式中,若 g 是任意的非奇异的 $q \times q$ 阶矩阵,我们就得到 M 上各种可能的标架,所以标架丛 P 的局部坐标可以设为(x,g)。

在标架丛 P 之上,设 φ 是一个联络式。根据(14)式,φ 的局部表示式是

$$\varphi = dg \cdot g^{-1} + g\omega g^{-1}。\tag{21}$$

可见以下的曲率式也定义于 p 之上,

$$\Phi = d\varphi - \varphi \wedge \varphi = g\Omega g^{-1}。\tag{22}$$

由(17)式,我们发现

$$c_1(\Phi) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\Phi。$$

由于 $\mathrm{Tr}(\varphi \wedge \varphi) = 0$,根据(22)式可得

$$c_1(\Phi) = \frac{i}{2\pi}d\mathrm{Tr}\varphi。\tag{23}$$

换句话说,在标架丛 P 上,第一个陈式 $c_1(\Phi)$变成恰当微分式。

现在可以定义陈-西蒙斯式。

同样的根据(17)式,可知

$$c_2(\Phi) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\{c_1(\Phi)^2 - \mathrm{Tr}(\Phi \wedge \Phi)\}。\tag{24}$$

对(22)式作外微分,得

$$d\Phi = \varphi \wedge \Phi - \Phi \wedge \varphi, \tag{25}$$

这就是所谓的比安基恒等式。

由(22)和(25)可得

$$d\{\mathrm{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \varphi)\} = 3\mathrm{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \Phi),$$
$$d\mathrm{Tr}(\varphi \wedge \Phi) = -\mathrm{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \Phi) + \mathrm{Tr}(\Phi \wedge \Phi)。$$

设

$$CS(\varphi) = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \varphi) + \mathrm{Tr}(\varphi \wedge \Phi)。\tag{26}$$

很容易验证

$$dCS(\varphi) = \mathrm{Tr}(\Phi \wedge \Phi)。\tag{27}$$

(26)式中的微分式叫做陈-西蒙斯式,它是标架丛上超度第二个陈式 $c_2(\Phi)$的微分式。它本身是个三阶微分式,从它的定义可知它并不涉及 M 上的度量。当 M 是三维流形时,维数的限制使它不得不是个闭微分式。陈-西蒙斯式最近在理论物理扮演一个重要的角色,请参考[6]。

杨振宁先生最近跟我讲,我们都很幸运。像杨-米尔斯理论,杨-巴克斯特方程,现在都是正红的时候。有些人在科学上也许有很重要的贡献,大家也承认他们的贡献,可是贡献完了,工作就结束,不能再发展。像他的情形,我的情形,陈-西蒙斯式,现在做的人很多。

我在普林斯顿认识很多做拓扑的人。除了我之外,他们都受到斯廷罗德的影响,他们都坚持用上闭链,而不是微分式。可是使用上闭链,乘法就很难应付,用微分式就容易多了,可是它不是风尚。所以我想这也是一点教训。大家都做的东西,我不做。当年在汉堡大学时,许多人都念数论,阿廷、赫克、彼得森都是好极了的数论学者,我同他们都有友谊。可是我不念数论,虽然我觉得数论是很有趣的。研究贵独创,不要跟着人走。

第三讲　复线丛与全纯复丛性

§4　全纯线丛与奈望林纳理论

向量丛是一个内容丰富的数学观念。如果纤维是一维的,则称为线丛。复线丛在许多数学及理论物理都有巨大的作用。这时纤维是 $\mathbf{C}$,构造群是 $GL(1,\mathbf{C}) = C^* = \mathbf{C}\setminus\{0\}$,是一个可交换群。所以线丛之间可定义加法,而得复线丛群。

我们先看层论的上同调群与复线丛的陈类之间的关系。

根据层论上同调群的定义,复线丛群与

$$H^1(M, C_M^*)$$

同构,其中 C_M 是 M 上的复值函数芽层,C_M^* 是 M 上不取零值的复值函数芽层。

考虑以下之正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow C_M \xrightarrow{e} C_M^* \longrightarrow 0,$$

其中映射 e 定义为

$$e(f) = \exp(2\pi i f)。$$

因此我们得到一列长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H^1(M, C_M) \longrightarrow H^1(M, C_M^*) \xrightarrow{c} H^2(M, \mathbf{Z}) \longrightarrow \cdots,$$

其中映射 c 就是把复线丛映到它的第一个陈式的函数。

因为芽层 C_M 是个强层(fine sheaf),其不为零维的上同调群都是零。由上面的正合序列得

$$H^1(M, C_M^*) \cong H^2(M, \mathbf{Z})。$$

这个关系给了二维整系数上同调群的一个几何意义:它与复线丛群同构。

如果 M 是复流形,一切映射都是全纯的,则得全纯线丛的观念。全纯线丛群与

$$H^1(M, O_M^*)$$

同构,其中 O_M^* 是 M 上不取零值的全纯函数芽层。它的结构精密,性质也丰富多了。它推广了除子(divisor)的观念,是复流形的基本性质。

现在采用通用丛的观点。

因为我们的向量丛是一维的,所以通用丛的底空间是 $Gr(1, n; \mathbf{C})$。注意 $Gr(1, n; \mathbf{C}) = P^n(\mathbf{C})$就是复射影空间,通用丛抽掉零截面得 $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$,仍旧以 π_0 表示,

$$\pi_0: \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow P^n(\mathbf{C})。 \tag{28}$$

若 $Z = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$,$\pi_0(Z)$ 之值为

$$\pi_0(Z) = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in P^n(\mathbf{C}),$$

其中$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$表示 $P^n(\mathbf{C})$的齐次坐标。

如果把映射 π_0 限制在单位球 S^{2n+1},

$$S^{2n+1} = \{Z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid x_0 \bar{x}_0 + \cdots + x_n \bar{x}_n = 1\},$$

我们就得到 S^{2n+1}的霍普夫纤维化。当 $n = 1$ 时,

$$\pi_0:\ S^3 \longrightarrow P^1(\mathbf{C}) = S^2,$$

这是有名的霍普夫映射，它是第一个从高维空间到低维空间且非零伦映射的例子。

回到 $P^n(\mathbf{C})$的通用丛。

先考虑 $P^n(\mathbf{C})$的下同调群。

因为

$$H_i(P^n(\mathbf{C}),\mathbf{Z}) = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \text{ 是奇数时,} \\ \mathbf{Z}, & \text{当 } i \text{ 是偶数时}, i \leqslant 2n。\end{cases}$$

事实上，$P^n(\mathbf{C})$的射影子空间 $P^k(\mathbf{C})$，$1 \leqslant k \leqslant n$，是下闭圈，它是 $H_{2k}(P^n(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$的生成元。

令 $\xi \in H^2(P^n(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$是$2n-2$维下闭圈 $P^{n-1}(\mathbf{C})$的对偶上同调类。ξ就是$P^n(\mathbf{C})$之通用丛的陈类。ξ有个好处，$2k$ 维下闭圈 $P^k(\mathbf{C})$的对偶上同调类就是

$$\xi^{n-k} \in H^{2n-2k}(P^n(\mathbf{C}),\mathbf{Z})。$$

若 E 是流形上的复线丛，而映射

$$f:\ M \longrightarrow P^n(\mathbf{C})$$

使得 $E = f^*(E_0)$，其中 E_0 是 $P^n(\mathbf{C})$的通用丛。因此 E 的陈类

$$c_1(E) = f^*(\xi) \in H^2(M,\mathbf{Z})。$$

我们回到(28)式通用丛的几何性质。先决定这个通用丛的联络与曲率。设 Z，$W \in \mathbf{C}^{n+1}$ 为

$$Z = (x_0, x_1, \cdots, x_n), W = (y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{C}^{n+1}, \tag{29}$$

定义它们的内积为

$$\langle Z, W\rangle = x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}。\tag{30}$$

一组向量 $Z_0, Z_1, \cdots, Z_n \in \mathbf{C}^{n+1}$如果满足

$$\langle Z_A, Z_B\rangle = \delta_{A\bar{B}},\quad 0 \leqslant A, B \leqslant n, \tag{31}$$

则 $Z_0, Z_1, \cdots, Z_n$，称为一组单式标架。

所有的单式标架与酉群 $U(n+1)$ 的元素成一对一对应。

定义 $U(n+1)$ 的毛雷尔-嘉当式 $\omega_{A\bar{B}}$为

$$\omega_{A\bar{B}} = \langle \mathrm{d}Z_A, Z_B\rangle。$$

因此，$\mathrm{d}Z_A$ 可表为

$$\mathrm{d}Z_A = \sum_{B=0}^{n} \omega_{A\bar{B}} Z_B。\tag{32}$$

对(31)式微分，得

$$\omega_{A\bar{B}} + \omega_{\bar{B}A} = 0, \text{其中 } \omega_{\bar{B}A} = \overline{\omega_{B\bar{A}}}。 \tag{33}$$

再对(32)式作外微分，得

$$\mathrm{d}\omega_{A\bar{B}} = \sum_{C=0}^{n} \omega_{A\bar{C}} \wedge \omega_{C\bar{B}}, \tag{34}$$

(34)叫做毛雷尔-嘉当方程。

现在怎么定义 $P^n(\mathbf{C})$的通用丛的联络呢？我们只要在局部定义联络就可以。

任取 $Z_0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ 使得$\langle Z_0, Z_0 \rangle = 1$。$Z_0$ 可以看成 $P^n(\mathbf{C})$ 的点，其纤维是 Z_0 代表的直线。只要知道 Z_0 是如何微分，就知道纤维上其他点的微分。

取 $Z_0, \cdots, Z_n \in \mathbf{C}^{n+1}$使得 $Z_0, Z_1, \cdots, Z_n$ 变成一组单式标架。仿照以前列维-齐维塔的方法，定义联络

$$DZ_0 = \omega_{0\bar{0}} Z_0。 \tag{35}$$

再根据(34)式，以上联络 D 的曲率是

$$\Omega = \mathrm{d}\omega_{0\bar{0}} = \sum_{k=0}^{n} \omega_{0\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{0}} = -\sum_{k=0}^{n} \omega_{0\bar{k}} \wedge \omega_{\bar{0}k}。 \tag{36}$$

请注意，(36)式是通用丛上的超度，因为它的右边是 $P^n(\mathbf{C})$的二阶微分式。

在另一方面，

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{k=0}^{n} \omega_{0\bar{k}} \omega_{\bar{0}k} \tag{37}$$

是 $P^n(\mathbf{C})$富比尼-施图迪的度量。它的凯勒形式 K 是

$$K = \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{k=0}^{n} \omega_{0\bar{k}} \wedge \omega_{\bar{0}k} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \Omega。 \tag{38}$$

若 $P^1(\mathbf{C})$是 $P^n(\mathbf{C})$中的复直线，把(38)式在 $P^1(\mathbf{C})$上积分，得

$$\int_{P^1(\mathbf{C})} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Omega = 1。$$

令 $\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Omega$，把它看成二维上同调类，它的对偶下同调类可以看成 $P^n(\mathbf{C})$的超平面 A。ξ 是通用丛的第一个陈式。

更一般的，若 X 是任意紧黎曼面，f 是非常数的全纯映射

$$f: X \longrightarrow P^n(\mathbf{C})$$

把 X 映进 $P^n(\mathbf{C})$，因此 $f(X)$可看成 $P^n(\mathbf{C})$的代数曲线。设 E_0 是 $P^n(\mathbf{C})$的通用线

丛,则

$$c_1(f^*(E_0)) = f^*(\xi) = \frac{1}{2\pi i} f^*(\Omega),$$

$$\int_X c_1(f^*(E_0)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(X)} \Omega = f(X) \text{ 的面积。}$$

在另一方面,由上同调类与下同调类配对关系可知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f(X)} \Omega = \langle f(X), A\rangle = f(X) \text{ 的次数。}$$

可见

$$f(X) \text{ 的次数} = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(X)} \Omega = f(X) \text{ 的面积。} \tag{39}$$

换句话说,$P^n(\mathbf{C})$中代数曲线的次数正好是它的面积。

这个看法的优点是可以推到有边界的黎曼面 X,这时 $f(X)$的面积还是有意思。仍然设 A 是 $P^n(\mathbf{C})$的超平面,$n(f(X)\cap A)$是 $f(X)$与 A 的交点。这时,

$$n(f(X) \cap A) - \{f(X) \text{ 的面积}\}$$

不再是等于零,它其实与 Ω 在$f(X)$边界的积分有关。

(36)式的超度公式可以帮助我们计算这个积分。利用(36)式与斯托克斯定理,根据联络式 $\omega_{0\bar{0}}$这个积分可以算出来。

因为我们考虑的对象都是全纯的,因此连络式 $\omega_{0\bar{0}}$可以积出来,所以(36)式变成二重超度公式。事实上,当 $Z \in \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, 设

$$Z_0 = \frac{Z}{|Z|}, \quad \text{其中 } |Z|^2 = \langle Z, Z\rangle\text{。} \tag{40}$$

我们可证明

$$\begin{aligned}\omega_{0\bar{0}} &= \langle DZ_0, Z_0\rangle = \langle dZ_0, Z_0\rangle = \frac{1}{2|Z|^2}\{\langle dZ, Z\rangle - \langle Z, dZ\rangle\}\\ &= (\partial - \bar{\partial})\log|Z|,\end{aligned}$$

其中 $d = \partial + \bar{\partial}$。因此,

$$\Omega = d(\partial - \bar{\partial})\log|Z| = -2\partial\bar{\partial}\log|Z|, \tag{41}$$

这个二重超度公式是奈望林纳理论中第一基本定理的关键。

在古典的奈望林纳理论,我们考虑的黎曼面 X 不是紧致的。如果有一组半径是 r 的紧致圆盘 D_r 趋近 X,X 边界上的积分可以用 D_r 边界上的积分来逼近。当我们可以取一组同心圆盘来逼近时,情形会更简化。

利用(41)式,我们可以计算 $f(D_r)$与 A 的交点数与$f(D_r)$的面积的差。设

$$d^C = i(\partial - \bar{\partial}),$$

$n(f(D_r) \cap A) = f(D_r)$ 与 A 的交点数，

$\mathrm{area}(f(D_r)) = f(D_r)$ 的面积，

$A^{\perp} = A$ 的正交补空间之任一非零向量，

$$|Z, A^{\perp}| = |\langle Z, A^{\perp}\rangle|, \ |Z| = |\langle Z, Z\rangle|^{\frac{1}{2}}, \ |A^{\perp}| = |\langle A^{\perp}, A^{\perp}\rangle|^{\frac{1}{2}}。$$

那么我们可以得出一个关系，

$$n(f(D_r) \cap A) - \mathrm{area}(f(D_r)) = \frac{1}{2\pi}\int_{f(\partial D_r)} d^C \log \frac{|Z, A^{\perp}|}{|Z| \cdot |A^{\perp}|}。\tag{42}$$

我们准备把(42)式对 r 积分。先定义

$$N(r, A) = \int_0^r \frac{n(f(D_t) \cap A)}{t} dt,$$

$$T(r) = \int_0^r \frac{\mathrm{area}(f(D_t))}{t} dt,$$

$T(r)$称为奈望林纳特征函数，它与 A 的选取无关。

现在不难得到值分布的第一基本定理。

定理(值分布理论第一基本定理)

存在常数 C 使得

$$N(r, A) \leqslant T(r) + C。$$

这是一个很要紧的定理。它说明，在非紧致黎曼面时，虽然它与超平面 A 的交点个数不是常数；但是 $N(r, A)$，一个与交点个数有关的函数却被 $T(r)$控制住，$T(r)$与 A 的选取无关。

奈望林纳理论的第二基本定理是要估计

$$\sum_{i=1}^{s} N(r, A_i)$$

的下界，其中 A_i 是一组超平面。从我们的观点，它是把(41)式应用到典范丛的情形。它是黎曼-胡尔维茨与普吕克公式的推广。

有了第二基本定理，就可考虑奈望林纳亏值公式。若 A 是超平面，定义

$$\delta(A) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, A)}{T(r)},$$

这叫做平面 A 的亏值。

定理(奈望林纳亏值公式)

设 $C_0 = \{Z \in \mathbf{C} \mid |Z| < 1\}$，$f: C_0 \longrightarrow P^1(\mathbf{C})$ 是不为常数的全纯映射，$A_1, \cdots,$

A_s 是 $P^1(\mathbf{C})$上相异的点。则

$$\sum_{i=1}^{s} \delta(A_i) \leqslant 2。$$

皮卡定理说,不是常数的亚纯函数除了两个值可能例外,它将对其他的数取值。奈望林纳亏值公式显然涵盖了皮卡定理。

由于奈望林纳的值分布理论最近被当做代数论的极限情形处理,近年它又引起许多人的注意。事实上,只要适当地把它的第二基本定理推广到算术几何,它可以统摄丢番图逼近理论中的罗特定理与莫德尔猜测中的法尔廷斯定理。请参考[5]。

代数数论最近一个基本的认识,是整数与整函数的相似性。丢番图方程

$$F(x, y) = 0$$

有无整数解,同复系数同一个方程有无整函数的解极为相似(复数的情形容易多了!)。这个关系最后必然澄清,当为数学上划时代的杰作。

参考文献

[1] Chern S. *Complex Manifolds without Potential theory*. Second Edition, Springer-Verlag, 1979

[2] Chern S. *Vector bundles with a connection*. "Global Differential Geometry," Studies in Mathematics, **27**, Mathematical Association of America, 1989: 1 ~ 26

[3] Ehresmann C. *Sur la topologie de certains espaces homogènes*. Annals of Math. 1934, **35**: 396 ~ 443

[4] Steenrod N. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1951

[5] Vojta Paul, *Diophantine Approximation and Value Disribution Theory*. Lecture Notes in Mathematics, **1239**, *Springer-Verlag*, 1987

[6] Witten E. *Quantum field theory and the Jones polynomial*. In *Braid Group*, *Knot Theory*, *and Statistical Mechanics*. edited by Yang C N and Ke M L. World Scientific, 1989: 239 ~ 329.

67. 关于芬斯勒几何

陈省身于1990年代呼吁重视芬斯勒几何的研究。本文比较通俗和简明,读者可以从中了解作者的学术观点。原文发表于法国的《Comptes Rendus Acad. Sci. Paris》第314卷Ⅰ系列,第757~761页,1992年。原文为英文,王善平译。

摘要: 在芬斯勒几何中引进了新的联络,同时解决了等价问题。利用这种联络把曲率分成了两部分,分别叫闵科夫斯基曲率与黎曼曲率。导出了关于弧长的二阶变分的公式,它仅与黎曼曲率有关。

1. 基于弧长元素

$$ds = F(x^1, \cdots, x^n, dx^1, \cdots, dx^n) \tag{1}$$

的几何可以追溯到黎曼本人,这里 F 是关于 dx^i[①] 正定一阶齐次的。由于芬斯勒1918年论文的结果,它现在被称为芬斯勒几何。从微分几何的角度看,最重要的结果是嘉当在1934年定义的欧几里得联络。布斯曼运用纯几何的方法作了广泛深入的研究。

我提议给出一个关于联络和曲率的定义,它们都是黎曼几何中相应概念的自然推广。取代截面曲率的是下面将要定义的旗曲率(flag curvature)的概念。该方法如此简单自然,黎曼的限定看来只是个习惯而已。特别是我们导出了弧长元素的二阶变分公式,它是黎曼公式的翻版。这看来打通了研究正或负曲率的芬斯勒流形的道路,使我们可以比较和提炼定理。

度量的一般化有可能提供应用的灵活性。复分析中的卡拉西奥多里度量与小平度量——都是芬斯勒度量——就是例子。我倾向于认为,如果在一个分层流形中引进度量,那么用芬斯勒度量更自然些。

2. 局部芬斯勒几何实际上非常简单,如果我们从等价问题——两个芬斯勒度量何时仅差一个坐标变换——的角度来看的话。令 M 表示我们的流形, TM 和 TM^* 表示它的切丛和余切丛。令 PTM 表示射影化切丛(线元素丛),其中的"点"就

---

① 我们在整篇论文中约定:小写拉丁字母的指标跑过1到 n,小写希腊字母的指标跑过1到 $n-1$,重复的指标隐含求和。

是那些由仅差一个因子的非零切向量组成的类。投射 p：$PTM \to M$ 导出一个丛 p^*：$TM \to PTM$。以后要在这个丛上引入一个联络。

我们令 $dx^i = y^i dt$。(1)中的弧元素定义了一个形式

$$\omega = F(x^i, y^i) + \lambda_i(dx^i - y^i dt),$$

这里，λ_i 是任意的。利用条件

$$d\omega \equiv 0 \bmod (dx^i - y^i dt), \tag{2}$$

我们得到　$\lambda_i = \partial F / \partial y^i$ 与

$$\omega = F_i dx^i。\tag{3}$$

今后，F 的下标将表示关于 y^i 的偏微分。形式 ω 被称为希尔伯特不变积分。由于 y^i 可以被当作 PTM 中的齐次坐标并且 F_i 是关于 y^i 零阶齐次的，所以 ω 是 PTM 中的普法夫形式。

令 T_x 和 T_x^* 分别是 M 上点 x 的切向量空间和余切向量空间。$Y = y^i(\partial/\partial x^i) \in p^* T_x$。它的对偶空间 $p^* T_x^*$ 由其零化子 $Y^\perp$ 和 ω 张成。我们在 $p^* T_x$ 中选择一组基 ω^l，使得 $\omega^n = \omega$ 并且 ω^α 张成 $Y^\perp$，于是 ω^l 在仅差一个线性变换的意义上是定义好的。

条件(2)可以写成

$$d\omega \equiv 0 \bmod \omega^\alpha,$$

由此得

$$d\omega^n = \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^n。$$

另一方面，我们有

$$d\omega^\alpha \equiv \omega^n \wedge \omega_n^\alpha \bmod \omega^\beta。$$

引理　存在 $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$，使得

$$\omega_\alpha^n + A_{\alpha\beta}\omega_n^\beta \equiv 0 \bmod \omega^\gamma。$$

二次微分形式

$$A_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta + (\omega^n)^2 = \left(\frac{1}{2}F^2\right)_{ij} dx^i dx^j \tag{4}$$

在 PTM 中是明确定义的。

在黎曼几何的情况下我们有

$$F^2 = g_{ij}(x) y^i y^j,$$

从而在(4)中我们重新得到二次微分形式 $g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$。一般情况下(4)中的形式依赖于 Y。它在 p^*T_x 与 $p^*T_x^*$ 中定义了一个内积。我们现在作以下的猜测：

正则性猜测 (4) 中的形式是正定的。

于是讨论余标架(coframes)的正规正交性(orthonormal)就有意义了。假设 ω^i 是正规正交的，我们就有

$$A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}。 \tag{5}$$

我们将称之为优先余标架(preferred coframes)。它们的空间 P 的维数是

$$(n-1)(n-2)/2 + 2n - 1 = n(n+1)/2。$$

关于存在联络的基本定理是：

定理 1 P 中存在一组唯一确定的普法夫形式 ω_i^j，它们满足方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ \omega_i^n + \delta_{ij}\omega_n^j = 0, \\ \delta_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma + \delta_{\beta\gamma}\omega_\alpha^\gamma = -H_{\alpha\beta\rho}\omega_n^\rho。 \end{cases} \tag{6}$$

形式 ω_i^j 在 P 上定义了一个联络。它在以下的意义上解决了等价问题：形式 ω^i，ω_i^j，$i<j$ 是线性独立的，并构成 P 中外微分形式代数的乘法基。令 $F^*(x^{*i}, \mathrm{d}x^{*i})$是另一个芬斯勒度量，其相应的量我们用星号(*)来表示。则两个芬斯勒度量是局部等价的，当且仅当 P 与 P^* 之间存在一个局部的微分同胚，使得

$$\omega^i = \omega^{*i}, \quad \omega_i^j = \omega_i^{*j}。$$

通过对这些方程作外微分，得到称作曲率的不变标量。

定理 2 芬斯勒度量是黎曼度量，当且仅当 $H_{\alpha\beta\rho} = 0$。此时形式 ω_i^j 定义了列维-齐维塔联络。

我们找到结构方程

$$\mathrm{d}\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k + \Omega_i^k, \tag{7}$$

这里

$$\Omega_i^k = \frac{1}{2}R_{ijl}^k\omega^j \wedge \omega^l + P_{il\alpha}^k\omega^l \wedge \omega_n^\alpha, \tag{8}$$

以及

$$R_{ijl}^k + R_{ilj}^k = 0, \quad P_{il\alpha}^k = P_{li\alpha}^k。 \tag{9}$$

这些方程有若干独特的性质。1° ω_α^n 中没有二次项；2° 利用(7)的外微分，即利用比安基恒等式，我们可以证明，$P_{il\alpha}^k$ 可以用 $H_{\alpha\beta\rho}$ 的共变导数来表示；3° 只要 $P_{il\alpha}^k$ 中两个拉丁字母的指标等于 n，它就为 0。

3. 令 e_i 是 $p^* T_x$ 中对偶于余标架 ω^k 的标架。联络由

$$\mathrm{D}e_i = \omega_i^k \otimes e_k \tag{10}$$

定义。则定理 1 中的解析条件可以几何地解释为以下性质：

1° 联络是无扭的；

2° 保持内积 (e_i, e_n)；

3° 当 e_n 作平行移动时，内积 (e_α, e_β) 仍然保持。

我们令

$$R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\gamma} R^{\gamma}_{n n\beta}。 \tag{11}$$

则 $R_{\alpha\alpha}$ 作为 PTM 上的函数就是里奇曲率。更一般地，如果 $b = b^\alpha e_\alpha$，则量

$$R(b) = -R_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta \tag{12}$$

是旗(flag) $\{x, e_n, e_n \wedge b\}$ 的函数，我们将称之为旗曲率。它是截面曲率的自然推广，因为在黎曼几何中它仅依赖于平面元素 $\{x, b \wedge e_n\}$，并且是截面曲率。

于是曲率被分成两部分：黎曼曲率 R^k_{ijl} 与我们称为闵科夫斯基曲率的 $H_{\alpha\beta\rho}$。

正是这个旗曲率在芬斯勒几何的变分问题中起着重要的作用。人们在弧长的一阶变分与二阶变分中找到证据。事实上，把单位正方形 (t, τ) 映入 P，使得它在 M 中的投射给出以 t, τ 为参数族的一族曲线。假设 e_n 是曲线上的单位切向量，我们可以通过拉回(pullback)得到

$$\begin{aligned} \omega^\alpha &= b^\alpha \mathrm{d}\tau, \quad \omega^n = a^n \mathrm{d}t + b^n \mathrm{d}\tau, \\ \omega_i^j &= a_i^j \mathrm{d}t + b_i^j \mathrm{d}\tau。 \end{aligned} \tag{13}$$

曲线 τ 的长度为

$$L(\tau) = \int_0^1 a^n \mathrm{d}t。 \tag{14}$$

表达式(13)满足结构方程(6)，特别地有

$$\frac{\partial a^n}{\partial \tau} = \frac{\partial b^n}{\partial t} + b^\alpha a_\alpha^n。$$

由此得弧长的一阶变分是

$$\delta s = \left.\frac{\partial L(\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = b^n \Big|_0^1 + \int_0^1 b^\alpha a_\alpha^n \mathrm{d}t。 \tag{15}$$

于是测地线由条件 $a_\alpha^n = 0$ 所刻画。换句话说，测地线由微分方程组

$$\omega^\alpha = \omega_\beta^n = 0 \tag{16}$$

所定义。

为了导出二阶变分,我们来考虑一族满足 $a_\alpha^n = 0$ 的测地线。

利用式(6),我们得到公式

$$
(17)\qquad \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} L(\tau) = \frac{\partial b^n}{\partial \tau} + b^\alpha b_\alpha^n \Big|_0^1 + \int_0^1 \{(b_\alpha^n)^2 - R(b)\} a^n \mathrm{d}t。
$$

它与黎曼几何中的公式相同,只是用旗曲率代替了截面曲率,而闵科夫斯基曲率不起作用。使(17)式成立的一个关键性质是,$P_{i\lambda\alpha}^k$ 当它的拉丁字母指标中有两个等于 n 时就为 0,从而这些 P 不会在二阶变分中出现。

种种迹象表明,那些旗曲率的正负号保持不变的芬斯勒流形会成为有趣的研究课题。

1991 年 6 月 28 日又及——帕特里克·佛伦博士友善地通知我说,这篇注记中的一些结果,包括旗曲率的概念(他称之为雅可比同态)和弧长的二阶变分公式,与他的动力系统的工作重复。另一方面,在一篇发表于 43 年前但长期被忽视的论文[2]中,已经有主要的计算。本文的目的是要求人们注意这样的事实,即如果处理适当,则芬斯勒几何的基础或许还包括其测地线的性质,与黎曼几何的情况没有多大的差别。无庸说,芬斯勒几何中的其他问题——如用曲率形式表达特征类以及体积的概念——更加微妙,值得作进一步的研究。复芬斯勒几何也很重要,它会在多复变函数的研究中发挥作用,因为卡拉西奥多里与小平的区域度量都是芬斯勒度量。

参考文献

[1] Cartan E. *Les espaces de Finsler*. Actualites **79**, Paris, 1934

[2] Chern S -S. *Local equivalence and euclidean connections in Finsler spaces*. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. 1948, **5**A: 95 ~ 121. or, In *Selected Papers*, Ⅱ. Springer 1989: 194 ~ 212

[3] Rund H. *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer, 1959

68. 什么是几何学——在复旦大学的演讲

这是作者于 1999 年 9 月 24 日，在复旦大学参加求实基金会科学奖的颁奖仪式上所作的学术报告。这也是复旦大学杨武之讲座的第一讲。

今天授奖的仪式很隆重，听了许多人的演讲，我非常感动。有机会在此演讲，自己觉得非常之荣幸，也非常之高兴。我想从现在起，我们就像平常上课一样，不怎么严肃，随便一点。我带了一些材料，非常遗憾的是没法投影。不投影也可以，我没有什么准备。大家希望我讲一点几何学，题目是《什么是几何学》。我虽然搞了几十年的几何工作，但是很抱歉的一点是，当你们听完演讲后，不会得到很简单的答案，因为这是一门广泛而伟大的学问。在最近几千年来，几何学有非常重要的发展，跟许多其他的科学不但有关系、有作用，而且是基本的因素。

讲到几何学，我们第一个想到的是欧几里得。除了基督教的《圣经》之外，欧几里得的《几何原本》在世界出版物中大概是销售最多的一本书了。这本书在中国有翻译，译者是徐光启与利玛窦。徐光启(1562 ~ 1633)是中国了不得的学问家，利玛窦(M. Ricci)是到中国来的意大利传教士。他们只翻译了六章，中文本是在 1607 年出版的。我们现在通用的许多名词，例如平行线、三角形、圆周等这类名词我想都是徐光启翻译的。当时没有把全书翻译完，差不多只翻译了半本，另外还有半本是李善兰和伟烈亚力翻译的。伟烈亚力(A. Wylie)是英国传教士。很高兴的是，李善兰是浙江海宁人。海宁是嘉兴府的一县，我是嘉兴人，所以我们是同乡(掌声)。对了，查济民先生也是海宁人(掌声)。

推动几何学第二个重要的、历史性发展的人是 Descartes(1596 ~ 1650)，中国人翻译成为笛卡儿。他是法国哲学家，不是专门研究数学的。他用坐标的方法，把几何变成了代数。当时没有分析或者无穷的观念。所以他就变成代数。我想笛卡儿当时不见得觉得他这贡献是很伟大的，所以他的几何论文是他的哲学书里面最后的一个附录，附属于他的哲学的。

这个思想当然在几何上是革命性的，因为当把几何的现象用坐标表示出来时，就变成了代数现象。所以你要证明说一条直线是不是经过一个点，你只要证明某

个数是不是等于零就行了。这样就变成了一个简单一点的代数问题。当然并不是任何的几何问题都要变成代数问题,有时候变为代数问题后比原来的问题更加复杂了。但这个关系是基本性的。笛卡儿发现的坐标系,我们大概在中学念解析几何都学到。有一点是这样的(我的图可惜现在没法投影出来):给定一条直线,直线上有一个原点,其他的点由它的距离 x 来确定,然后经过 x 沿一定的方向画一条直线,那么 y 坐标就是在那条线上从 x 轴上这个点所经的距离,这就是笛卡儿的坐标,英文叫 Cartesian 坐标。它的两条线不一定垂直。不知道哪位先生写教科书时把两条线写成垂直了,因此 x 坐标与 y 坐标对称了。笛卡儿的两个坐标不是对称的,这是个非常重要的观念,我们现在就叫纤维丛。这些跟 y 坐标平行的直线都是纤维,是另外的一个空间。原因是这样的:你把它这样改了之后,那条直线就不一定要直线,可以是任何另外一个空间了。这样可以确定空间里的点用另外一组坐标来表示。所以有时候科学或数学不一定完全进步了,有时候反而退步了(笑声)。笛卡儿用了这个坐标,就发现,我们不一定要用 Cartesian 坐标,可以用其他坐标,比如极坐标。平面上确定一个点,称为原点,过这点画一条射线,称为原轴。这样平面上的点,一个坐标是这点与原点的距离,另外一个是角度,是这点与原点的连线与原轴的相交的角度,这就是极坐标。因此极坐标的两个坐标,一个是正数或零,另外一个是从零到 360 度的角度。当然我们都知道,还可以有许多其他的坐标,只要用数就可以确定坐标。因此,后来大家弄多了的话,就对几何作出了另外一个革命性的贡献,就是说,坐标不一定要有意义。只要每组数能定义一个点,我们就把它叫坐标。从而几何性质就变成坐标的一个代数性质,或者说分析的性质。这样就把几何数量化了,几何就变成形式化的东西了。这个影响非常之大,当然这个影响也不大容易被接受,比如爱因斯坦。爱因斯坦发现他的相对论,特殊相对论是在 1908 年,而广义相对论是在 1915 年,前后差了 7 年。爱因斯坦说,为什么需要 7 年我才能从特殊相对论过渡到广义相对论呢?他说因为我觉得坐标都应该有几何或物理意义。爱因斯坦是一个对学问非常严谨的人,他觉得没有意义的坐标不大容易被接受,所以耽误了他很多年,他才不能不接受,就是因为空间的概念被推广了。

我忘掉了一段。我现在是讲书,讲书忘掉了补充一下是无所谓的,讲错了也不要紧(笑声)。同样我回头再讲一点欧几里得。那时的欧几里得的《几何原本》并不仅仅是几何,而是整个数学。因为那时候的数学还没有发现微积分,无穷的观念虽然已经有了,不过不怎么普遍。我再说一点,就是很可惜的是欧几里得的身世我们知道得很少,只知道他大概生活在纪元前三百年左右。他是亚历山大学校的几何教授,他的《几何原本》大概是当时的一个课本。亚历山大大学是希腊文化最后集中的一个地方。因为亚历山大自己到过亚历山大,因此就建立了当时北非的大城,靠在地中海。但是他远征到亚洲之后,我们知道他很快就死了。之后,他的大将托勒密(Ptolemy Soter)管理当时的埃及区域。托勒密很重视学问,就成立了一个大学。

这个大学就在他的王宫旁边，是当时全世界伟大的大学，设备非常好，有许多书。很可惜由于宗教的原因，由于众多的原因，现在这个学校被完全毁掉了。当时的基督教就不喜欢这个学校，已经开始被毁了，然后回教人占领了北非之后，就大规模地破坏，把图书馆的书都拿出来烧掉。所以现在这个学校完全不存在了。

几何是很重要的，因为大家觉得几何就是数学。比方说，现在还有这一印象，法国的科学院，它的数学组叫做几何组。对于法国来讲，搞数学的不称数学家，而叫几何学家，这都是受当时几何的影响。当时的几何比现在的几何的范围来得广。不过从另一方面讲现在的范围更广了，就是我刚才讲到的坐标不一定有意义。一个空间可以有好几种坐标，那么怎样描述空间呢？这就显得很困难啦，因为空间到底有什么样的几何性质，这也是一个大问题。高斯与黎曼建立和发展了这方面的理论。高斯是德国人，我想他是近代数学最伟大的一个数学家。黎曼实际上是他的继承人，也是德国数学家。他们都是格丁根大学的教授。可惜的是黎曼活着时身体不好，有肺结核病，四十岁就死了。他们的发展有一个主要目的，就是要发展一个空间，它的坐标是局部的。空间里只有坐标，反正你不能讲坐标是什么，只知道坐标代表一个点，所以只是一小块里的点可以用坐标表示。因此虽然点的性质可以用解析关系来表示，但是如何研究空间这就成了大问题。

在这个之前，我刚才又忘了一个，就是基础的数学是欧几里得的书，但是欧几里得的书出了一个毛病。因为欧几里得用公理经过逻辑的手段得到结论。例如说，三角形三角之和一定等于 180 度，这是了不得的结果。欧几里得可以用公理几步就把它证明了，是一个结论。这个比现代的科学简单得多了。我们刚才听了很多话，科学家做科学研究，第一样就是跟政府要钱，跟社会要钱，说你给了我钱，我才能做实验。

当然实验是科学的基础。但是这样一来就会有许多的社会问题和政治问题。欧几里得说，你给我一张纸，我只要写几下，就证明了这个结果。不但如此，我是搞数学的，我说数学理论还有优点，数学的理论可以预测实验的结果。不用实验，用数学可以得到结论，然后用实验去证明。当然实验有时的证明不对，也许你的理论就不对了，那当然也有这个毛病。欧几里得的公理是非常明显的，但是他有一个有名的公理叫第五公设出了问题。这个第五公设讲起来比较长，但是简单地说，就是有一条直线与线外一点，经过这点只有一条直线与这条已给的直线平行。这个你要随便画图的话，觉得相当可信。可是你要严格追问的话，这个公理不大明显，至少不如其他公理这样明显。所以这个第五公设对当时数学界喜欢思想的人是个大问题。当时最理想的情形是：第五公设可以用其他的公理推得，变成一个所谓的定理。那就简单化了，并且可做这个实验。我们搞数学的人有一个简单的方法，就是我要证明这个公理，我先假定这个公理不对，看是不是可以得到矛盾。如果得到矛盾，就证明它是对的了。这就是所谓间接证明法。有人就想用这个方法证明第

五公设,但是都失败了。我们现在知道这个第五公设并不一定对,经过一点的平行线可以有无数条,这就是非欧几何的发现。非欧几何的发现,它的社会意义很大,因为它表示空间不一定只有一个。西洋的社会相信上帝只有一个,怎么会有两个空间,或者很多个空间呢?当时这是个很严重的社会问题。不止是社会问题,同时也是哲学问题。像德国大哲学家康德,他就觉得只能有欧氏几何,不能有非欧几何。所以当时这是一个很大的争论。非欧几何的发现一个是J. 波尔约,匈牙利人,在1832年;一个是罗巴切夫斯基,俄国人,在1847年。不过我刚才讲到大数学家高斯,我们从他的种种著作中知道他完全清楚,但他没有把它发表成一个结论,因为发表这样一个结论,是可以遭到别人反对的。因此就有这么一个争论。等到意大利的几何学家贝尔特拉米,他在欧几里得的三维空间里造了一个曲面,这个曲面上的几何就是非欧几何,这对于消除大家的怀疑是一个很有利的工具。因为上述结果是说,假定有一个三维的欧几里得空间,就可以造出一个非欧几何的空间来,所以在欧几里得的几何中亦有非欧几何。你假定欧几里得几何,你就得接受非欧几何,因此大家对非欧几何的怀疑有种种的方法慢慢给予解除。

我刚才讲到高斯与黎曼把坐标一般化,使坐标不一定有意义,这对几何学产生的问题可大了。因为空间就变成一块一块拼起来的东西。那么怎么去研究它呢?怎么知道空间有不同的性质呢?甚至怎么区别不同的空间?我这里有几个图,画了几个不同的空间,可惜我没法把它投影出来。不过,总而言之空间的个数是无穷的,有很多很多不同的空间。现在对于研究几何的人就产生一个基本问题,你怎样去研究它。这样一个基本的学问现在就叫Topology,拓扑学。它是研究整个空间的性质,如什么叫空间的连续性,怎样的两个空间在某个意义上是相同的,等等。这样就发展了许多许多的工具。这个问题黎曼也讨论了。黎曼生活在1826~1866年。德国的教学制度在博士毕业之后,为了有资格在大学教书,一定要做一个公开演讲,这个公开的演讲就是所谓的Habilitationsschrift。黎曼在1854年到格丁根大学去做教授,做了一个演讲,这个在几何上是非常基本的文献,就讨论了这些问题。如何研究这种空间呢?要研究这种空间,如果你只知道空间是随便这么一块块拼起来的话,就没有什么可以研究的了。于是你往往需要一个度量,至少你知道什么叫两点之间的距离,你怎么去处理它呢?就需要解析的工具。往往你把距离表为一个积分,用积分代表距离。黎曼的这篇1854年的论文,是非常重要的,也是几何里的一个基本文献,相当一个国家的宪法似的。爱因斯坦不知道这篇论文,花了7年的时间想方设法也要发展同样的观念,所以爱因斯坦浪费了许多时间。黎曼这篇论文引进的距离这个观念,是一个积分,在数学界一百多年来有了很大的发展。第一个重要的发展是黎曼几何应用到广义相对论,是相对论的一个基本的数学基础。现在大家要念数学,尤其要念几何学的话,黎曼几何是一个最主要的部分,这个也是从黎曼的演讲开始的。现在黎曼几何的结果多得不得了,不但是几何的基

础，可能也是整个数学发展的基础。

我刚才提到一百多年来的发展。所谓的黎曼几何实际上是黎曼的论文的一个简单的情形，是某个情形。黎曼原来的意思，广义下的意思，有个人做了重要的工作，是一个德国人芬斯勒。所以这部分的几何就叫芬斯勒几何。1918 年他在格丁根大学写了一篇博士论文，就讲这个几何。这个几何后来发展不太多，因为大家不知道怎么办。如果这个度量的积分广了一点，对应的数学就变复杂了，不像黎曼的某个情形这样简单。黎曼这情形也不简单。黎曼普通地就写了一个 ds 的平方等于一个两次微分式，这个两次微分式积分一下就代表弧的长度。怎样研究这样的几何，这是需要一个像黎曼这种天才才有这个办法。黎曼就发展了他所谓的 Riemann curvature tensor，黎曼曲率张量。你若要搞这类几何的话，就要有张量的观念。而空间的弯曲性，这个弯曲性解析表示出来也比较复杂了，就是黎曼的曲率张量。我们现在大家喜欢讲得奖。我们今天发奖，有奖金，要社会与政府对你的工作尊重。当年的时候你要搞数学的话，如果没有数学教授的位置，就没有人付你工资。一个主要的办法就是得奖金。有几个科学院它给奖金，得了奖金后你当然可以维持一段时间，因此就很高兴。不过很有意思的是我想黎曼-克里斯托费尔曲率张量是一个很伟大的发现，黎曼就到法兰西科学院申请奖金。科学院的人看不懂，就没有给他。所以诸位，今天坐在前排几位你们都是得奖人，都是得到光荣的人，我们对于你们寄予很大的期望，后面几排的大多数人没有得过奖，不过我安慰大家，没得过奖不要紧，没得过奖也可以做工作。我想我在得到学位之前，也没有得过奖。得不得到奖不是一个很重要的因素，黎曼就没有得到奖。他的黎曼-克里斯托费尔张量在法兰西的科学院申请奖没有得到。

最近虽然在黎曼几何上有很多发展，非常了不得的发展，但是大家对于一般的情形，黎曼论文的一般情形：芬斯勒几何，没有做很多贡献。很巧的是我在 1942 年曾写了一篇芬斯勒几何的论文，就是我能把黎曼几何的结果做到芬斯勒几何的情形。最近，有两位年轻的中国人，一个叫鲍大维，一个叫沈忠民，我们合写了一本关于芬斯勒几何的书。这本书就要在斯普林格出版社出版，属于它的 Graduate Texts 数学丛书。编辑对于我们的书也很喜欢，给了我们一个很有意思的书号：2 000 号。书就在这里，我想这本书等会我会交给谷超豪教授，就把它放在复旦大学的某个图书馆里(掌声)。我们这本书有一个小小的成就，就是把近一百年来最近在黎曼几何上的发现，我们把它推广到一般的情形，即黎曼-芬斯勒情形。这是黎曼当年的目的。黎曼当然非常伟大，不过他对于一般的情形不是很重视，他甚至在他的文章里讲这里没有新的东西，我们就把他说的没有新的东西做了一些出来。

我知道我旁边坐了两位伟大的物理学家。接下去我想班门弄斧一下，谈一下物理与几何的关系。我觉得物理学里有很多重要的工作，是物理学家要证明说物理就是几何。比方说，你从牛顿的第二运动定律开始。牛顿的第二定律说，$F =$

ma，F 是力，m 是质量，a 是加速度，加速度我们现在叫曲率。所以右边这一项是几何量，而力当然是物理量。所以牛顿费了半天劲，他只是说物理就是几何（大笑，掌声）。不但如此，爱因斯坦的广义相对论也是这样。爱因斯坦的广义相对论的方程说

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 8\pi K T_{ik}。$$

R_{ik}是里奇曲率，R 是 scalar curvature，即标量曲率，K 是常数，T_{ik}是 energy-stress tensor，即能量—应力张量。你仔细想想，他的左边是几何量，是从黎曼度量得出来的一些曲率。所以爱因斯坦的重要方程式也就是说，几何量等于物理量（掌声）。不止是这些，我们可以一直讲下去。我们现在研究的空间叫流形，是一块块空间拼起来的。这个流形不好研究。流形上的度量，你如果要把它能够用方程写下来的话，你一定要把流形线性化，一定要有一个所谓的矢量空间，叫 vector space。矢量空间有一个好处，它的矢量可以相加，可以相减，它还有种种不同的乘法。所以你就可以用解析的方法处理几何的情形。那么一般的流形怎么处理呢？数学家的办法很简单，就是在流形的每一点弄一个切平面。每一点都有个矢量空间，叫切空间，跟它相切。欧几里得空间只有一个切空间。现在的空间情况复杂了一些，每点都有一个切空间，但都是平坦空间。这个现象在几何上有一个重大的发展，就是把切空间竖起来。反正是一把矢量空间，给流形的每点一个矢量空间，不一定要是流形的切面或切空间。我们就叫它为纤维丛，或叫矢量丛，矢量空间丛。这个我想比爱因斯坦的（相对论）还要重要。麦克斯韦方程就是建立在一个矢量丛上。你不是要一把矢量空间吗？最好的是一把筷子，这里一维最好是复一维。这把筷子每个都是复空间，它是骗人的一维，其实是二维，是复数空间。复数就有玩意儿了。现在是一把复线，你如果能有法子从这个纤维到另外一个纤维有一个我们所谓的平行性的话，你就立刻得到麦克斯韦方程。现代文明都靠电，控制电的方程的是麦克斯韦方程。现在纤维丛上有一个平行性，这个平行性的微分，等于电磁场的强度 F，然后你把这个 F 再求它的另外一种微分（余微分）的话，就得到 current vector J，即流矢量。用下面两个简单的式子，就把麦克斯韦方程写出来了，$dA = F$，$\delta F = J$。

普通你要念电磁学的书的话，当然需要了解电磁的意义。我不了解。但是要了解电磁学的意义，把方程全部写出来的话，书上往往是一整页，种种的微分呀什么的讲了一大堆。其实简单地说，也就是平行性的微分是场的强度，而场的强度经过某个运算就得到它的流矢量。这就是麦克斯韦方程，与原来的完全一样。所以麦克斯韦方程就是建立在一维的纤维丛上，不过是一个复一维的纤维丛。你怎样把每个纤维拼起来呢？我们需要群的观念。有一个群，群里有一个运算，把一个纤维可以挪到其他一个纤维。纤维如果是一维的，即使是复一维的话，我们需要的群

仍旧是可交换的群，叫做阿贝尔群，杨振宁先生了不得。他可以用到一个非阿贝尔群，也很简单，我们叫做 SU(2)群。用 SU(2)联络，把同样的方程式写出来，就是杨-米尔斯方程，$DA = F$，$\delta F = J$。

这有不得了的重要性。我们搞几何学的人觉得有这样的关系，物理学家说你这个关系跟物理有关系，这是非常困难的，并且有基本的重要性。比方说像去年获诺贝尔奖的，我想大家都知道崔琦的名字，做理论方面的所谓霍尔效应，也用到我们这些工作。我们说我们专搞曲率。你要开一个车，路如果弯得多了的话你就要慢下来，直的话你就冲，这就是曲率。曲率要是在高维就比较复杂了，不过也是一些代数，并且可以做得很巧妙。我的一个朋友，也是学生，叫西蒙斯。我们所做的工作就是曲率，就对崔琦跟他们一群得诺贝尔奖的有好处。所以一般讲来，在房子里我们只管扫地，想把房子弄弄干净，弄弄清楚，然后有伟大的物理学家来说你们这个还有道理(大笑，掌声)，这个我们也很高兴。现在几何不仅应用到物理，也应用到生物学中。讲到 DNA 的构造，是一个双螺线，双螺线有很多几何，许多几何学都在研究这个问题。现在许多主要的大学，念生物的人一定要念几何。现在有很多人研究大一点的化合物，这是分子，是由原子配起来的。原子怎么个配法就是几何了。这些几何的观念不再是空虚的，有实际上的化学的意义。

数学比其他科学有利的地方，是它基本上还是个人的工作。即使在僻远的地方，进步也是可能的。当然他需要几个朋友，得切磋之益。谢谢大家。(极其热烈的掌声)

69. 高斯–博内定理及麦克斯韦方程

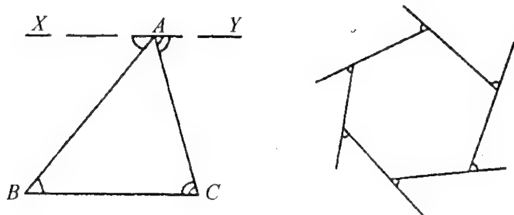
本文是陈省身在南开大学数学系为学生做的通俗学术报告。原刊于《科学》第53卷第3期，上海，2001年。

初等几何

高斯–博内定理最重要的特款是三角形内角和定理：在欧氏平面上三角形三角的和等于 π。

这定理可证明如下：设三角形 ABC。过顶点 A 作直线 XAY，与对边 BC 平行。于是有 $\angle B = \angle XAB$，$\angle C = \angle YAC$，则三角和 $\angle A + \angle B + \angle C = \angle XAB + \angle BAC + \angle CAY = \pi$。证毕。

如用外角，则上面的定理可叙述为：三角形三外角的和等于 2π。



多边形内角和定理证明示意图

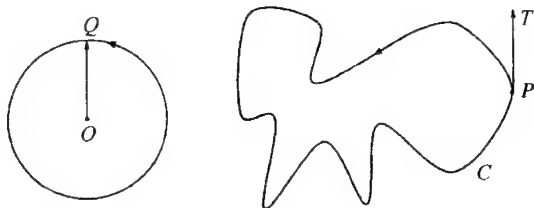
左为三角形内角和等于 π，右为任一凸多边形外角和等于 2π。

外角定理的优点是对于任意多边形都对：平面上多边形的外角和等于 2π。

它还可推广：取任意不自交的封闭曲线 C，在 C 上一点 P，作单位切矢量 PT。经平面上一点 O，作单位矢量 OQ，与 PT 平行。有“切线转动”定理：当 P 点沿 C 转动一圈，Q 点在单位圆上转动角度 2π。

这当然需要证明[1]。注意曲线 C 可以相当弯曲，因此 Q 在单位圆上可以进退。定理说，把进退消掉后，Q 点总共绕了一圈。

把两个结果连起来，可推广到有尖点的光滑曲线。



"切线转动"定理

P 在任一不自交封闭曲线 C 上运动，当 P 沿 C 转动一圈时，与过 P 的切线 PT 平行的单位矢量 OQ 转动了 2π 角度。

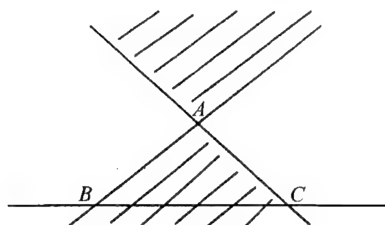
这定理还可推广到自交的曲线，因此同拓扑的变形论(homotopy)有关。

我们讨论球面上的同一问题。如称球面的大圆为直线，则几何是非欧的，通常叫做椭圆式几何。

现在研究球面三角形。令 r 为球的半径。取球面三角形 ABC，由大圆弧组成。经过顶点 A 的两边 AB、AC，经延长后相交于 A 的对极点 A^*。两个大圆 ABA^*、ACA^* 成一扇形，它的面积是 $(A/2\pi)\cdot 4\pi r^2 = 2r^2A$，$A$ 是角度。经过另二顶点 B、C 作同样的扇形。我们现在把球面的对极点重合，便得非欧几何的椭圆式平面。易见三个扇形把平面覆盖，而三角形 ABC 被盖三次。命$\triangle$为三角形的面积，则所盖的面积为 $2\pi r^2 + 2\triangle$，前项为椭圆平面的面积 = 球面积的一半 = $2\pi r^2$。由此得

$$A + B + C = \pi + (1/r^2)\triangle。 \tag{1}$$

这公式说，角和超 $A + B + C - \pi$ 等于 $1/r^2$ 乘面积；角和必大于 π。



角和超 $A + B + C - \pi$ 等于 $1/r^2$ 乘以面积证明示意图

在双曲式非欧几何三角形三角的和小于 π。

曲面上的高斯-博内公式

以上的结果可推广到曲面上的三角形，叫做高斯-博内公式。

设 S 为曲面，C 为 S 上一条逐段光滑的封闭曲线，D 为 C 所包的区域。则 C 有短距曲率 k，D 的每点有高斯曲率 K。命 A 为不光滑点的角。高斯-博内公式是

$$\sum(\pi - A) + \int_C k\mathrm{d}s + \iint_D K\mathrm{d}\sigma = 2\pi\chi, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 是曲面的面积元，χ 是区域 D 的欧拉数。

在第一节的情况，C 是短距线，故 $k = 0$。在欧氏三角形时，$K = 0$，$\chi = 1$，即得 $\sum A = \pi$。在球面上的椭圆几何学，如半径为 r，则 $k = 1/r^2$，式(2)中沿 C 的积分为 0，$\chi = 1$。由式(2)即得式(1)。

公式(2)是曲面论一个最重要的公式，证明见文献[2]。很奇怪，这公式在一般教科书找不到。方程式(2)的左边几项，都是“曲率”。第一项是点曲率，第二项是线曲率，第三项是面曲率。式(2)表示全曲率是一拓扑不变式。

1940 年左右我在昆明西南联大教初等微分几何，曾给一证明。它可推广到高维的情形，成为我后来一项重要的工作，简述如次：

这个证明根据联络(connection)的观念，利用外微分。

命 x 为曲面 S 的一点，e_1 为经过 x 的一个单位切矢量。设 S 有定向，则经过 x 与 e_1 垂直，而 $e_1 e_2$ 合于定向的单位切矢量 e_2 就完全确定。全体单位切矢量 e_1 成一空间，是三维的，因为原点 x 的轨迹 S 是二维，而同一原点 x 的 e_1 是一圆周。称这个空间为 E。取单位切矢量的原点，便得映射 $\pi: E \to S$。这样的结构叫做圆丛(circle bundle)，一种特别的纤维丛(fiber bundle)。如 $x \in S$，$\pi^{-1}(x)$是同一原点的单位切矢量，是一圆周。一个重要的量是

$$\omega = \mathrm{d}e_1 \cdot e_2。\tag{3}$$

式中 $\mathrm{d}e_1$ 是矢量值的一次微分式，乘积是矢量的内积。所以 ω 是空间 E 的一次微分式，叫做联络式(connection form)。它的外微分是

$$\mathrm{d}\omega = -\pi^*(K\mathrm{d}\sigma)。\tag{4}$$

这是一个了不得的公式，高斯必然欣赏的。

高斯-博内公式由式(4)经积分可得最自然的证明。式(4)的证明见附录。

麦克斯韦方程

以上的讨论，不必限于曲面的切面丛。我们可取任意欧氏二维平面族，它的参数空间是任意流形。这样也有联络式 ω，它的外微分

$$\mathrm{d}\omega = \Omega \tag{5}$$

是底空间 S 的二次微分式，叫做曲率式。因为 $\mathrm{dd} = 0$，我们有

$$\mathrm{d}\Omega = 0。\tag{6}$$

在 S 是四维洛伦兹流形时，即得麦克斯韦方程。设 $x_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant3)$ 为 S 的坐标，洛伦兹度量为

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2。\tag{7}$$

命

$$\Omega = \sum_{\alpha,\beta} F_{\alpha\beta}dx_\alpha \wedge dx_\beta,\ F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha},\tag{8}$$

其中

$$(F_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}。\tag{9}$$

对于度量 ds^2，有 $*$ 算子，命

$$d^* = *d*。\tag{10}$$

记 $j = (j_1, j_2, j_3)$，

$$J = -\rho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_0 \wedge (j_1dx_2 \wedge dx_3 + j_2dx_3 \wedge dx_1 + j_3dx_1 \wedge dx_2),\tag{11}$$

则方程

$$d\Omega = 0,\ d^*\Omega = 4\pi J\tag{12}$$

可写成如下方程组

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{curl} E + \frac{\partial}{\partial t}B = 0, \\ &\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad \operatorname{curl} B - \frac{\partial}{\partial t}E = 4\pi j。\end{aligned}\tag{13}$$

其中 $t = x_0$。如果 t 是时间，$E = (E_1, E_2, E_3)$ 为电场矢量，$B = (B_1, B_2, B_3)$ 为磁场矢量，ρ 为电荷密度，j 为电流密度，这正是麦克斯韦方程。而 J 中的分量

$$\rho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

为电荷，

$$(j_1dx_2 \wedge dx_3 + j_2dx_3 \wedge dx_1 + j_3dx_1 \wedge dx_2)$$

为电通量 $j\cdot dS$，分量

$$\mathrm{d}x_0 \wedge (j \cdot \mathrm{d}S)$$

则表示

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}x_0$$

时间内经过曲面 $\mathrm{d}S$ 的电流。有趣的是,由

$$\mathrm{dd} = 0$$

立刻得

$$\mathrm{d}J = 0,$$

这正是电量守恒定律:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0。$$

所以麦氏方程的几何基础是一个欧氏平面丛,它的底空间是四维的洛伦兹流形。

这个平面丛观念的引进,归之于外尔,在物理上这是第一个规范场(gauge theory)。当年爱因斯坦对此有长篇的反对意见。物理上的困难由于规范变数是实数。如果用周期变数或复数,便一切都妥当了。在电磁学我们应用圆周丛或复线丛。这正与高斯-博内公式符合。复数使数学简单化(因此每个代数方程都有解),它也使物理合理化。

复空间丛

欧氏 $x-y$ 平面可以引进复坐标 $z = x + \mathrm{i}y$,便成为复线,它的欧氏度量变为埃尔米特度量。所以电磁学的数学基础是洛伦兹流形上的埃尔米特线丛。

这个观念可以推广到高维的复矢量空间丛和埃尔米特空间丛。用复空间时,规范群(gauge group)当取 n 维酉群 $U(n)$,或为简单起见,取它的子群 $SU(n)$(由行列式为1的方阵组成)。

这里杨振宁作了伟大的贡献:这个复二维的矢量丛有物理的意义。以上麦氏方程可以推广,叫做杨-米尔斯方程。爱因斯坦晚年苦研统一场论,试了许多不同的空间。现在知道,一个空间不够,需要纤维丛。

从牛顿到麦克斯韦再到杨振宁,理论物理走上了大道。

附　录

从数学眼光来看,基础还是欧氏空间的曲面论,现作简单引论如次:

历史上最有价值的文献当是高斯的"曲面论"。达布有四册巨著,读之趣味无

穷,可称人类思想之宝。

研究欧氏空间,首先当了解它的运动群。令空间的坐标为 x_1,x_2,x_3。则欧氏运动是下面的变换:

$$x_i' = \sum_k a_{ik}x_k + b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \tag{14}$$

其中 $A = (a_{ik})$ 是正交方阵。我们有

$$\det A = \pm 1,$$

以下我们限于

$$\det A = +1$$

的运动,它不改变空间的定向。

运动(14)对于矢量 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 引起齐次变换

$$v_i' = \sum_k a_{ik}v_k, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3。\tag{15}$$

如 $w = (w_1, w_2, w_3)$,定义内积

$$v \cdot w = \sum_k w_k v_k。\tag{16}$$

内积经运动不变。

欧氏标架是一点 x 及经过 x 的三个互相垂直的单位矢量 $e_i (i = 1,2,3)$,使 $e_1e_2e_3$ 合于空间的定向。全体 $e_1e_2e_3$ 构成一六维流形,是欧氏运动流形。有且只有一个运动,将一标架移至另一标架。命

$$\begin{aligned} dx &= \sum_i \omega_i e_i, \\ de_i &= \sum_j \omega_{ij} e_j, \end{aligned} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3。\tag{17}$$

利用 $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$,得

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0。\tag{18}$$

注意 $dd = 0$,即得

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}。\end{aligned} \tag{19}$$

这是毛雷尔-嘉当方程,方式 ω_i, ω_{ij} 叫做毛雷尔-嘉当方式。

设曲面 S,取 S 的一定向,而命 e_3 为相应的单位法矢量,则有

$$\omega_3 = 0, \tag{20}$$

由此得

$$d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0,$$

故

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2,\ \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2。 \tag{21}$$

曲面有两基本式

$$\begin{aligned} I &= d\underset{\cdot}{x} \cdot dx = \omega_1^2 + \omega_2^2, \\ II &= -dx \cdot de_3 = a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2。 \end{aligned} \tag{22}$$

II 对于 I 的特征值叫做主曲率,他们的初等对称函数

$$H = \frac{1}{2}(a + b),\ K = ac - b^2 \tag{23}$$

分别称为中曲率与高斯曲率。这两个曲率对于曲面的形状和几何性质有重大的作用。

由式(19)得

$$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23} = -K\omega_1 \wedge \omega_2。 \tag{24}$$

注意

$$\omega_{12} = \omega,\ \omega_1 \wedge \omega_2 = d\sigma,$$

即得式(4)的证明。

公式(24)包括高斯的“精彩定理”(积分之即得高斯-博内公式的证明),可称数学之宝。

参 考 文 献

[1] Klingenberg W. *A Course in Differential Geometry*. GTM 51. New York: Springer-Verlag. 1978
[2] Blaschke W. *Vorlesungen über Differential Geometrie*, *Bd*1. Berlin: Springer. 1944

SWSY

五、诗文拾遗

此部分收入陈省身的少时新诗以及数学之外的论文。

70. 纸　　鸢（诗）

原载天津扶轮中学校刊《扶轮》第 8 期，1926 年。

纸鸢啊纸鸢！

我羡你高举空中；

可是你为什么东吹西荡的不自在？

莫非是上受微风的吹动，

下受麻线的牵扯，

所以不能干青云而直上，

向平阳而落下，

但是可怜的你！

为什么这样的不自由呢！

原来你没有自动的能力；

才落得这样的苦恼。

71. 雪（诗）

原载扶轮中学校刊《扶轮》第 8 期，1926 年。

雪啊！

你遮着大地，

何等洁白，

何等美丽，

何以为人们足迹所染污？

负了造物者的一片苦心，

我为你惜！

我替你恨！

72. 论清太宗孝庄皇后

原载《传记文学》第71卷第3期,1997年。收入本书时作者略作删改。

一、引　言

孝庄在历史上出名,主要是由于清初《太后下嫁》的故事。这是一个不负责任的猜测(见下)。她是顺治的母亲,康熙的祖母。康熙即位时才八岁,孝庄是太皇太后,有巨大的影响,是康熙初年的当政者。这段时间是清朝康雍乾三朝150年繁荣的基础。

中国历史把她忽略了,是很不公平的。一般记载都讲她是一个美人,集中描写美人的生活,但这不是重要的部分。以下试写《中国的一个伟大的政治家——孝庄皇后》

二、多尔衮

我们先看一下当时政局。

1644年——顺治元年———是明朝亡国的一年。那年三月李自成进北京,崇祯自缢。明朝的抗清大将吴三桂改变策略,向清国借兵。大将多尔衮便兼程入明,在山海关与吴三桂会合。四月与李自成展开大战。多吴联军人数不及李之半,但结果李自成大败。多于五月入北京,明朝就亡了。

事前清朝出了大事:清太宗皇太极去世。清制不设太子,所以继承便出了问题。这问题本来是简单的:太宗长子豪格有战功,是当然的人选。但兵权在多尔衮手中,多是太宗的弟弟。

多自然想做皇帝。但是争夺的结果,只能使豪格做不成。结果皇位落在太宗的幼子福临身上。是顺治帝。他才六岁,母亲被尊为孝庄皇太后,多的名义是"叔父摄政王"。

多大权独揽,不久晋位为"皇叔父摄政王",后复尊为"皇父摄政王"。

"皇父"是一个奇怪的名称,恐怕在中外历史都是少有的。多尔衮不愿意天天

给小皇帝叩头,也显示他无上的威权。自然皇父同太后的关系,成了揣测的题目。无聊的文人,便借此做诗。经孟森先生的考证,“太后下嫁”是完全不可靠的。他说:由是太后下嫁之事无有。而旧时所附会其下嫁者,皆可得其不实之反证。

我完全同意这个结论。我想孝庄是一个极顶聪明的人。皇太后的威权在摄政王之上,她足可抵挡多尔衮的野心。

多得皇父称号在顺治五年。顺治七年他就死了,年三十九岁。他的死是清朝的幸事。

三、顺治遗诏

多尔衮死后,顺治便于顺治八年亲政。那年他才十三岁。这孩子是聪明的,汉文很好。可惜他的政治作为,走了明朝的方向。他宠信太监吴良辅,重设十三衙门。他的宠妃董鄂妃死了,花了大量的钱。

清初历史,有许多关于“顺治出家”,“董小宛”等讨论。事无根据,完全是文人的无聊。我们幸有孟森的研究,把这些弄清楚了。

顺治出痘而死,才二十四岁。他似乎要做一个明式的皇帝,早死是清朝的幸事。

顺治去世后由第三子继位,年号康熙。康熙登极时才八岁,皇太后成了太皇太后。祖孙亲密,康熙是在祖母管教下长大的。

顺治遗诏深自责备,是一个奇特的文件。史载它经过皇太后的修改,引若干如次(据《东华录》):

> 丁已夜子刻,上崩于养心殿。遗诏颁示天下,诏曰:朕以凉德,承嗣丕基,十八年于兹矣。自亲政以来,纪纲法度,用人行政,不能仰法太祖太宗谟烈,因询悠忽,苟且目前,且渐习汉俗,于淳朴旧制,日有更张,以致国治未臻,民生未遂,是朕之罪一也。朕自弱龄。即遇皇考太宗皇帝上宾,教训扶养,惟圣母皇太后慈育是依,隆恩罔极,高厚莫酬,惟朝夕趋承,冀尽孝养,今不幸子道未终,诚悃未遂,是朕之罪一也。
>
> 端敬皇后,于皇太后克尽孝道,辅佐朕躬,内政聿修,朕仰奉慈纶,追念贤淑,丧祭典礼,过从优厚,不能以礼止情,诸事逾滥不经,是朕之罪一也。祖宗创业,未尝任用中官,且明朝亡国,亦因委任宦寺,朕明知其弊,不以为戒,设立内十三衙门,委用任使,与明无异,以致营私作弊,更畲往时,是朕之罪一也。

这不像皇帝临死的话,倒像新政府的政纲。果然顺治死后,康熙登极(才八岁),便杀了太监吴良辅,裁撤大批太监,取消十三衙门。

这显然是太皇太后的决定。她觉得顺治过分的趋于明朝的制度,一切奢侈。她要恢复清朝俭朴的风气。

政府有四个辅政大臣,最霸道的是鳌拜。我们都知道康熙除鳌拜的故事。

康熙六年亲政,时年十四岁,政权很快入于康熙手中。祖孙的关系是很亲密的。孝庄生于1613,于康熙二十七年去世,年75岁。康熙表示了十分的悲痛。

康熙是中国历史上一个伟大的皇帝,可能是最伟大的。他幼年时祖孙的关系,应该有重大的影响。

孝庄在康熙初年的措施,把清宫放上轨道。她在政府的整个影响是巨大的。她建立了清中叶150年繁荣的基础。不动声色,成此大业。我想她是中国历史上少数的伟大的政治家。

四、汤若望(1592~1666)

孝庄出身蒙古。她除了蒙满汉的背景外,还与耶稣教有关系,尤其与汤若望有相当多的来往。因此她的政治知识是相当全面的。她很快的把政权交给康熙。

汤若望又同顺治有相当的认识,孝庄也时常赏他礼物。顺治有八个儿子,康熙被选,有汤若望的意见,显然这是一个重要的决定。

17世纪欧洲的人口,约相当于中国的人口。去中国传教便成为自然的使命。到中国来传教的是教会中最优秀的人物,他们的学术地位,也是一流的。我们要知道,从欧洲来中国,经好望角和印度,可能需要两年,也充满着危险。所以来华的教士,都是有理想和能力的人。

汤若望做到钦天监监正,同顺治相当密切。他自然想传教,但是顺治最后偏于佛教。中国帝王生活的优裕,是不容易摆脱的。他的行为似乎不能得太后的同情,从遗诏可见。

五、结　语

孝庄至少有以下一些特点:(一)深通大局;(二)机会合适时能采取措施;(三)能忍耐;(四)能退让。她同多尔衮的叔嫂关系,从顺治当选为太子,到多为皇父,前后二十年,关系复杂,可以想见。我相信她是一个绝顶聪明的人,能处理一个非常的局面。

参考文献

[1] 孟森. 清初三大疑案考实
[2] 魏特著. 汤若望传. 杨丙辰译. 上海:商务印书馆,1949

LSHS

六、历史回声

陈省身：一个几何时代的领路人。你可以从这一组文章中，全方位、多角度地理解这位数学大师的科学贡献和历史功绩。文章的作者包括杨振宁、吴文俊、周炜良、A.韦伊、P.A.格里菲思等名家。

73. 杨振宁：陈省身先生和我

为庆贺陈省身教授80寿辰而作。原载由丘成桐教授为陈省身教授所编的祝寿文集《Chern—A Great Geometer of the Twentieth Century》(Hong Kong: International Press, 1992)。原系英文，由沈良译成中文发表于香港《二十一世纪》1992年4月号。

已记不起来，陈省身教授在北京清华大学当研究生时，有没有见过他了。当时我父亲是清华数学系教授，我还在念小学。但我却清楚记得1929年10月初，第一次见到郑士宁女士，即后来的陈夫人的情况。那时她的父亲已在清华做了好几年数学教授，杨家则刚搬到清华园。有一天，郑教授邀请我们到家里吃饭。于是，七岁的我，第一次见到了正在念初中的"郑姐姐"。

陈教授在清华做研究生时已经露出锋芒，后来他去德国攻读博士学位，1937年学成回国。当时由于抗战，清华大学已从北京搬到长沙，后来再搬到昆明，和北京大学以及南开大学合并组成战时的国立西南联合大学，即西南联大。陈教授是联大极出色和受欢迎的教师，和华罗庚、许宝騄等一批青年教授在校园里掀起了一股数学研究的热烈气氛。联大的岁月(1938～1944)在我脑海中留下了美好的回忆，当时所受的优良教育，也令我终身感激。

在联大时，我可能曾听过好几门陈教授的课，但是翻查如今仍然保存的联大成绩单，发现我只在1940年秋季学期正式选修过他的微分几何学。当时我是物理系的三年级生，我已不很记得上课的情形了，只有一件事印象很深。那就是怎样证明每个二维曲面都和平面有保角(conformal)变换关系。当时我知道怎样把度量张量化成 $A^2du^2+B^2dv^2$ 的形式，但是想了很久都想不出怎样能使 $A=B$。有一天陈教授告诉我要用复变数，并写下 $cdz=Adu+iBdv$ 这个式子。学到这简单的妙诀，是我毕生难忘的经历。

郑杨两家的关系一直十分密切。1939年，我父亲和母亲更撮合了陈教授与郑士宁女士的婚事，并且因此成为他们在昆明结婚时的介绍人。

陈省身教授1943年到美国普林斯顿高级研究所工作，其后两年间，由于发现"陈类"，把微分几何学引进了新境界。在50年代到60年代间，我们曾在芝加哥和

伯克利多次见面，而对“陈类”的重要性我也略有所闻。但因为我到底不是搞数学的，所以当时始终不明白它的奥妙。60年代末期，我才察觉物理学中的规范场强度和数学中的黎曼几何曲率有极其密切的关系。于是我去找纽约州立大学石溪分校的数学系主任西蒙斯。他说规范场与几何学中的纤维丛有关，要我去读斯廷罗德的《纤维丛的拓扑学》。事实上，我早在1955年就认识斯廷罗德了。他是一个不爱讲话的人；借到他的名著以后，我发现书如其人：话太浓缩，我完全看不懂。

1975年，我邀请西蒙斯在石溪理论物理研究所发表一系列演讲。从这些演讲里，我终于明白了纤维丛和在其上的“联络”的基本概念。后来吴大峻和我写了一篇文章分析麦克斯韦理论和非阿贝尔规范场论这两者与纤维丛之间的关系。经过一番努力，曹宏生和我也终于弄懂了美妙的陈省身-韦伊定理。

我在懂得这深奥美妙的定理后，真有触电的感觉。这个感受，犹胜于在60年代，我了解了外尔计算群表示的特征标和彼得-外尔定理之后的喜悦。为什么呢？可能是因为陈省身-韦伊定理更“几何”一点吧。

而且，感受并不止于此。还有更深的，更触及心灵深处的地方：到头来，忽然间领悟到，客观的宇宙奥秘与纯粹用优美这一价值观发展出来的数学观念竟然完全吻合，那真是令人感到悚然。这种感受恐怕和最高的宗教感是相同的吧？

我在第二届格罗斯曼会议上这样说[①]：

> 在1975年，明白了规范场和纤维丛理论的关系之后，我开车到陈省身教授在伯克利附近的艾尔塞雷托(El Cerrito)寓所。我们谈了许久，谈到朋友、亲人以及中国。当话题转到纤维丛时，我告诉陈教授，我终于从西蒙斯那里明白了纤维丛理论和陈省身-韦伊定理的美妙。我说，物理学的规范场正好是纤维丛上的联络，而后者是在不涉及物理世界的情况下发展出来的，这实在令我惊异。我还加了一句：“这既使我震惊，也令我迷惑不解，因为你们数学家凭空梦想出这些概念。”他当时马上提出异议：“不，不。这些概念不是梦想出来的。它们是自然的，也是实在的。”
>
> 虽然数学和物理学的关系十分深邃密切，但是，如果以为这两门学科高度相近那就错了。事实上，它们各有各的目标和品味，有明显不同的价值观和相异的传统。在基本概念的层面，它们具有某些令人惊异的共同点。然而，即使在这层面，两者的生命也是在不同的筋脉中流动的。

1949年元旦前后，陈教授一家从南京经过芝加哥去普林斯顿。我到他们下榻的温德摩旅馆看望他们时，第一次见到他的两个孩子，陈伯龙和陈璞。陈璞当时只有一岁多，穿了一袭白绒衣裳，活泼地在旅馆房间的地毯上爬来爬去。多年后，她

---

① 是次会议是为了纪念爱因斯坦诞生一百周年，于1979年7月在意大利特里斯特(Trieste)举行。见 *Selected Studies: Physics—a strophysics, mathematics, history of science*(编者 T. M. Rassias 和G. M. Rassias; North Holland, 1982)并见 Physics Today，1980年第33卷，第42页。

和朱经武教授共谐连理，但这回我没有机会成为介绍人。1987 年朱教授和他的同事在休斯顿的实验室发现高温超导体的喜讯传来，我也同样分享了陈家的喜悦心情。这是一个了不起的大发现，它开辟了一个崭新的物理研究领域，并且将会带来巨大的经济效益。

74. 吴文俊：中央研究院数学研究所一年的回忆[①]

1989年，科学出版社刊印《陈省身文选》(张洪光编)，吴文俊应邀为该书作序。此文即为序言。

科学出版社决定出版《陈省身文选》，内容包括陈省身教授的许多通俗演讲、综合报告、著作与人物评介，以及对自己的传记文字等。出版社要我写一篇序，并把《文选》几乎全部文章的复印件交给我，以作参考。这使我感到无上荣幸，又感到难以胜任。但在将这些复印件翻阅之后，使我回想起1946年至1947年在中央研究院数学研究所期间，在陈师指导下学习拓扑学的种种经历，故作此随笔，以志不忘。

我在国外访问期间，曾与国际友人谈起各人的学术经历。我说起我与陈师本不相识，只是在中央研究院数学研究所耽了一年，从陈师学习代数拓扑，从此走上了拓扑的研究道路。闻者大为惊异，拓扑号称难学，一年就在拓扑上做出研究成果，认为不可思议，因而见人就说此事。其实这并不可怪，这正好说明陈师善于提携后进，指导有方所致，如此而已。

经过是这样的。陈师是清华大学也是西南联大的教授，而我毕业于上海交通大学数学系。时值抗战，我常年蛰居上海，对外界数学情况颇为茫然，对陈师也一无所闻。1945年抗战结束，我有暇得以复习旧日所学的数学。与陈师相识，全靠亲友帮助介绍。其时陈师自国外回上海主持中研院数学所，经朋友介绍往见陈师。亲戚并为我打气，说陈先生是学者，只考虑学术，不考虑其他，不妨放胆直言。在一次与陈师晤谈中，我直率提出希望去数学所。陈师不置可否，但送我出门外时，却说：你的事我放在心上。

过了没有多久，陈师通知我去所工作，从此我便走上了数学研究的道路。

当时的数学所规模很小，只占据一座楼的第二层。最大的一间供会议与报告之用，次大的是图书室。我被安排在图书室作为工作地点。陈师独居一室，只记得有一架打字机，陈师经常在上面用一个指头打字。其余大都是大学毕业未久的年

---

① 吴文俊(1919～)，中国科学院系统科学研究所研究员，名誉所长，中国科学院院士，国家自然科学一等奖获得者。

轻人，分居各室。我到那里时数学所刚成立，陈师出身北方大学，但对吸收年轻学子毫无门户之见。他们来自武汉大学、浙江大学、上海大同大学，我来自上海交大。来自西南联大者只有陈国才一人。

数学所只办了三年。在将近四十年后，1985年陈师又在天津办起了南开数学所。两个数学所虽然人物已非，内容有异，但都体现了陈师的宏伟意图，想通过它们来振兴中华数学，使中国在未来成为与国外平等独立，甚或领导世界的数学大国，有步骤有计划地稳步进行，前后是颇为一致的。南开的数学所，正是40年前中研院数学所不幸中断的一个继续。

中研院数学所的第一年，我们的学习集中于代数拓扑，陈师为此一周要讲多达12小时的课，并经常到我们的房间里来讨论拓扑中的各种问题。在这一年中，陈师很少讲到微分几何。我在数学所只耽了一年，以后数学所搬往南京，又新来了不少人，也仍以代数拓扑为研究与学习的中心。但在私下里，陈师曾多次和我谈起，他的主要目标不是拓扑而是大范围或整体性微分几何。

E. 嘉当是近代最伟大的微分几何学家。陈师是嘉当的当之无愧的继承人，也是现代微分几何的奠基人。嘉当的全部著作中的微分几何部分，几乎全部局限于局部性的微分几何。虽然在晚年注意到李群的整体性质，并提出后来为庞特里亚金所证明关于古典李群贝蒂数的可能公式，以及后来为德·拉姆所证明对微分流形拓扑性质带有根本性的猜想，但本人并非拓扑专家，且垂暮之年也已无力为此。代数拓扑虽创自法国的H. 庞加莱，但直到30年代，法国并没有真正的代数拓扑学家，法国第一个这样的拓扑学家，是嘉当的学生C. 埃雷斯曼。他为了完成博士论文需要拓扑学，曾在美国普林斯顿耽过一年，就学于S. 莱夫谢茨等。虽然如此，在嘉当的著作中，既指出了拓扑学对于微分几何发展的美好前景，又蕴含了许多对于拓扑学本身极有重要意义的精邃思想。埃雷斯曼就在嘉当著作的启发之下，引进了纤维丛与联络的一般概念，成为纤维丛理论与近代联络论的奠基人之一。但更重要的发展则无疑来自陈师。

陈师在四年一次的国际数学家大会上，先后作过三次报告。第一次是在1950年，是一小时全会报告。第三次在1970年，也是一小时的全会报告。在1970年的报告中，陈师指出，“除了少数孤立的结果外，大范围微分几何一直等到代数拓扑和李群为它铺平了道路后才得到发展”，而“大范围微分几何是一个年青的领域”。事实上，使大范围微分几何从少数孤立的结果得以蔚然形成当前最活跃的独立分支之一者，可以说正是陈师本人。纤维丛与联络的概念虽然早已隐含在嘉当的著作中并由埃雷斯曼与陈师提炼出来，但陈师与埃雷斯曼不同之处是：后者只对概念提出了明确的描述，而前者则不仅如此，还提出了从事这方面定量研究的方法、工具与实例——即示性类，特别是引入以陈师命名的陈类，示性类在联络之下的具体表达式，以及高斯-博内一般公式的重要证明，等等。最早的示性类虽由E. 斯蒂弗

尔与H. 惠特尼在1935年时分别循不同途径引入,但性质所知不多且未定名,直到后来才定名为斯蒂弗尔-惠特尼示性类。由于这些类都是模2系数的同调类,因而对微分几何与分析的研究作用有很大局限性。至于整系数的庞特里亚金示性类则虽已在1944年为庞特里亚金所引入,但也未定名并鲜为人知,而且它们的性质直到现在还有很大的神秘性。因而当陈师在1943年初次抵美时,纤维丛理论还在萌芽阶段,示性类的概念也处于模糊的状态。但在陈师抵美后的短短几年间,由于陈师的几篇历史性的名著而使纤维丛与示性类理论整个地为之改观。在陈师的"埃尔米特流形上的示性类"一文中,引入了后来被称为陈类的示性类,并提出了多种不同形式的定义。以后的研究证明庞特里亚金示性类可以经流形或纤维丛的复化作为陈类来处理,因而陈类在各种示性类中可以说是最基本最有应用前景的一类。后来的发展完全证实了这一点。它们不仅是微分拓扑、微分几何、复流形理论、代数几何等许多不同领域的研究所不可缺少的有力工具,并是使这些不同领域融合在一起的纽带。最近十几年的研究还指出了陈类与杨-米尔斯场以及其他物理问题有密切关系,因此连理论物理学家们对于陈类这一名称也已耳熟能详,甚至使用到他们的理论物理研究中去了。

凡事必须从根本做起。大范围微分几何的真正发展一直要等到代数拓扑和李群为它铺平道路。因而,尽管陈师的主要目标是大范围微分几何,但在中研院数学所的三年期间,对年轻人没有讲授微分几何,而致力于代数拓扑方面的培养。陈师并对我们这些年轻人指出,要进入近代数学之门,应该好好学习三本书:庞特里亚金的连续群论,C. 谢瓦莱的李群论,以及H. 外尔的古典群论。事实上,正如陈师早在40年代所证明并在60年代为M.F. 阿蒂亚、R. 博特等所继续的那样,示性类可以作为某些古典李群作用在纤维丛时的不变量,并由此可以导出它们的明显表达式。

70年代以来,陈师经常前来中国。多年来作过不少演讲也开过不少课程,但内容都是微分几何。由陈师倡导举办了多次的双微会议,也以微分几何与微分方程为主题。这期间很少讲代数拓扑或微分拓扑。事实上,中研院数学所的三年,陈师已为我国培养了一批拓扑学的骨干,而且代数拓扑除留下一些难题如庞加莱推测等外,已非当年之居于数学发展中心者可比。与之相反,国内对E. 嘉当的著作仍然陌生,对于大范围微分几何更近于空白。陈师这些年来倡导双微,并经常以演讲与课程形式,培养青年一代掌握现代微分几何的要领。如果把国内现在的形势与70年代初期相比,则可看出,中国已涌现了一批现代微分几何的少壮队伍,在某些课题方面,已经可使国外专家们刮目相看,取得了一定的国际地位,这是与陈师这些年来的辛勤耕耘分不开的。南开数学所更是有计划地逐年以数学的某些特定范围为中心,邀请外籍专家以及国内有成就的数学家来所系统讲学,鼓励国内青年学者来所进修,已形成一个中外瞩目的国际数学中心。当年中研院的数学所,已以更

大更新的规模重见于今日。

陈师一直关心中国数学发展的前途，也一直为促使中国未来成为数学大国而努力。先后两次的数学所，都具有同样的目的。陈师在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上提出：“中国数学的目的是要求中国数学的平等和独立。中国的数学要能够跟西洋的数学平等”，又说：“我们也要求独立，就是说，中国数学不一定跟西洋数学做同一方向，但是要有同样的水平。”为了达到这一目的，必须“在中国建立基地”。两次数学所之设，也正是这方面的具体措施。陈师把这方面的成功特别寄托在青年一代身上。在中研院数学所，陈师主要是找一些青年人传授现代数学，特别是拓扑学。尽管时间短暂但已经取得极大成功。南开的数学所以及陈师倡导或亲身实行的许多其他活动，也是以提高青年人的学术水平进入研究创作为目的。作为中华民族的优秀青年，如何实现这一宏伟目标，使中国的数学能达到平等和独立，并进而在 21 世纪使中国成为数学大国，应该是在此书鼓舞之下的一项神圣使命。

75. 周炜良：我的朋友：数学家陈省身
——在他80寿辰时的回忆

周炜良是代数几何学家，陈省身的挚友。原文是英文，收入丘成桐等编的祝寿文集《Chern—A Great Geometer of the Twentieth Century》，1992年。张奠宙译，陈维桓校。

我在汉堡初遇陈省身时，是1934年秋季的某一天。那时我们都是汉堡大学的学生。当时陈省身在随布拉施克做研究，我则在听阿廷的课。我用“听阿廷的课”这样的模糊说法，是想表明我在那时旅居汉堡只是临时的。准确地说，当时我是在莱比锡大学注册的学生，但由于私人的原因（以后还会解释），我想趁机在阿廷的课上学点东西，为了说明我在数学志向上的这种奇特的不确定性，也为了了解陈省身在我一生的关键时刻给我的重要影响，让我先来说说我的不平常的教育背景。

除了一段极短的时间以外，我从未进过中国的学校或大学。大约在我五岁时（1916年），一位老塾师到家里来教我学习中国的四书五经。十一岁时开始学英文。然而，很快我就发现，懂了英文就能学到一切我想学的知识。因为那时中国的大多数大学所开的课程都模仿美国的大学，许多大学还使用美国教授写的教科书。对我来说，得到美国大学最常用的大部分科目的教科书并不困难。这样，我就自学了从数学、物理，到历史、经济的所有课程。这一情形从1924年持续到1926年，直到我成功地说服了父亲，把我送到美国去读书。我以前的学习兴趣一直是政治经济学，当1927年10月进入芝加哥大学时，经济学是我的主修科目。然而，此后的两年间，我对主修经济学产生了许多疑问。

在我的孩提时代，我想成为一个电机工程师，尽管那时并不懂得它的含义。当我不大想学经济学的时候，曾决定改修物理，期望先学点物理再转向工程。因此，当我1930年在芝加哥大学毕业时，我的主修科目是物理学。差不多就在那段时间，我偶然读到英国著名数学家哈代写的《纯粹数学》一书。这本书为我打开了通向数学的大门，尽管我当时所学的是应用数学，以便于最终

研究物理。1931 年的夏天，我曾和一位研究数学的中国留学生讨论怎样研究数学。他在芝加哥大学取得博士学位，然后去普林斯顿访问一年。他非常推崇普林斯顿(曾在那里听过冯·诺伊曼的课)，也劝我到普林斯顿去，或者干脆到德国的格丁根大学去，他认为那里是世界的数学中心。就这样，我怀着模糊的想法去了格丁根，那是 1932 年 10 月间的事。尽管我在芝加哥预先上过一门德语课，但为了听懂课，我又花了三个月去学德语。正在那时——1933 年初，希特勒和纳粹党徒掌握了德国的政权。德国的政治变动，不仅改变了格丁根大学，而且改变了整个德国，甚至全世界的形势。我对德国政治并不太了解，但我很惊讶地听到一些学生在传说 H. 外尔很可能要离开格丁根，结果外尔在那年的夏天真的走了。差不多同时，R. 库朗和 E. 诺特也先后离开了格丁根。我满怀希望想去学习的世界数学中心，实际上已经瓦解了。

1933 年的夏天，我不得不找一个德国的大学来取代格丁根。记得在离开芝加哥之前的那个夏天，我曾选了一门"近世代数"的课，所用的教材是一本相当新的教科书：范·德·瓦尔登著的《近世代数》。书中对各国课题所作的漂亮的论述，给我留下很深的印象。当我知道范·德·瓦尔登是莱比锡大学教授的时候，我就去了莱比锡，想跟随范·德·瓦尔登学习。真是幸运极了，当我到达莱比锡的时候，范·德·瓦尔登正在写总题目为"代数几何"的系列论文，结果我就踏入了我先前从未听说过的这门学科。范·德·瓦尔登对我非常好，他要我去读塞维里的书，以及贝尔蒂尼和恩里奎斯写的一些老书。范·德·瓦尔登还有把最复杂的数学理论用十分简单的语言加以解释的非凡天才。他使我觉得，只要我真心想学，缺乏某些重要数学学科的知识并不可怕。事实上，这是我一生中第一次感到，学习数学是我的正确选择。

1934 年夏天我在汉堡过暑假，在那里遇见了一位年轻姑娘，玛格特·维克多(Margot Victor)，她后来成了我妻子。这是一个一见钟情的爱情故事。实际上，在我遇见她的一个星期之后，我就向她求婚了。预见到我的爱情不能期望在短时期内就会有结果，我决定留在汉堡和玛格特继续我们的恋爱。这时，我也想趁此机会去听阿廷的课，学一点代数数论。与此同时，我仍然继续着代数几何的研究。(当时的德国大学系统是相当灵活的，我可以自由地在大学之间"漫游")。很快陈省身和我成了好朋友，虽然那时我们在数学上并没有多少联系。1936 年初，我回到莱比锡大学去完成由范·德·瓦尔登指导的博士论文。1936 年 7 月 10 日，我和玛格特在汉堡完婚，陈省身出席了玛格特双亲为我们举行的婚宴(见在婚宴上所摄的照片)。

我再次见到陈省身是在 1939 年，或许是 1940 年。那时他到上海访问。我听他谈起，他在 1937 年回到中国时，因上海的战事而无法在上海登岸。我不知道他为什么来上海访问，但是，我记得我们讨论了是否可能出版中国数学会杂志的事。那时候，我因环境所迫放弃了数学研究。毕竟我不得不扶养我的妻子，两个孩子，还有我的岳父母。岳父母由于纳粹政权的种族歧视政策，几乎一文不名地被迫离开

了德国。虽然我的父亲以往很有财力(他支持我在美国和德国学习了九年之久),但是战争严重地摧毁了他的事业和投资。我知道我必须自食其力,做我所能做的事去赚钱。

1946年春天,我又一次见到陈省身。那时战争已经过去。陈省身在成功地访问普林斯顿高级研究所两年之后回到上海,并受命筹备位于南京的中央研究院数学研究所。至于我,实际上已几乎完全脱离数学研究近十年之久。之前我所写的最后一篇论文(1938年),曾受到卡拉西奥多里的一篇有关热动力学的老文章的激励。虽然范·德·瓦尔登接受了这篇文章,说了一些赞扬的话,卡拉西奥多利也有很好的评论,但是这已是很久以前的事,我几乎已把它忘了。我们两人在数学上的地位有很大的落差:陈省身已是具有国际声望的数学家,而我至多只是一名博士后研究员,而且十年内无人加以注意。在当时中国那种混乱不确定的局势下,我对未来所能做的最好计划,莫过于借助我妻子的叔叔,汉斯·维克多的公司从事进出口贸易。汉斯在纳粹政权之前是一个成功的企业家,后来也是身无分文地离开德国。然而,他后来在美国又重建了他的事业。鉴于我不期望能正常地继承我父亲的遗产,在中国也不能保证有正常的学术工作条件,我不得不另求谋生之路来扶养妻子,两个孩子,以及岳母(岳父那时已去世)。

在战后中国的混乱局面下,陈省身觉得中国数学家们最需要的是各自研究领域中的最新文献。因此,陈省身收集了大量的数学家的预印本,不仅是他自己的研究范围,而且包括许多其他相关领域。对我来说,我非常高兴地在他收集的预印本里,发现了扎里斯基的大部分最新论文。扎里斯基显然已把范·德·瓦尔登的代数几何研究推进到了新阶段。陈省身还告诉我,韦伊有重要的工作,很快会以书的形式发表。很明显的,如果我想重返数学,首要的事情是立刻钻研从陈省身处借来的扎里斯基的论文。为了使我尽快回到数学的主流,陈省身建议我到普林斯顿高级研究所去访问一年。他认为,尽管我损失了大约十年时间,重返数学并不算太迟。实际上,陈省身已经给莱夫谢茨去了一封信,建议他给我发出访问普林斯顿的邀请。

当时我需要马上做出一个决定,也许是我一生中最重要的决定:我是否应该终止我的商业活动而回归数学。毕竟我已经三十五岁了,获得博士学位以后十年多,我几乎没有做过什么数学。看来我已失去了做一名数学家的机会。这种糟糕的情况使我十分灰心,以至准备完全放弃数学。然而,和陈省身的谈话改变了我的想法,使我重新燃起了想留在数学界的希望。我和玛格特商量,她十分理解我重返数学的愿望,并认为应该让我自己选择和决定。只要我决定了,她会随我作必要的调整。玛格特在我们结婚之前,曾在他叔叔的办公室工作过好几年,如果必要,她可以再去那里工作。那时,我们尚有一点积蓄,可以支付去美国的旅费,甚至在一、两年内没有收入也不要紧。但是,我们知道,回归数学会有许多风险。在我这年

纪，就是努力，也没有把握能做到普通的成功。不过，在人生的紧要关头总得要冒点风险。（至于我的岳母，我可以为她提供充足的费用，使她能到南非的开普敦去和玛格特的姐姐住在一起，以免寂寞）。在作出了回归数学的决定之后，下一步便是结束我的业务，把我的资产变为现金。在我等待护照和签证的时候，我便把全部时间用于数学研究，特别是研读扎里斯基的论文。本来我们打算在1946年的秋天就去美国，可是由于我必须作出各种安排（加上父亲年老体弱，我得帮他处理一些商务），所以直到1947年3月，我们才动身。

1947年4月初我到达普林斯顿。由于陈省身给莱夫谢茨去了信，我顺利地成为高级研究所的临时成员。我来得太晚了，以至连申请下一年度资助的时间也已截止。这倒不太重要，重要的是我们一家能住在研究所的宿舍里。由于战争的影响，战后的住房非常缺乏。1948年春天，我听说范·德·瓦尔登正在约翰斯·霍普金斯大学访问，就赶到那里去看他。霍普金斯大学恰好有一个教职的空缺，范·德·瓦尔登对我仍然非常好，他表示如果我有兴趣的话，他愿意推荐。这样，我就在1948年到了霍普金斯，而且一直待到1977年退休为止。1949年陈省身在去芝加哥大学之前曾访问普林斯顿，我们再次见面。以后的事情现已成为公开的数学史，如大家所知道，陈省身是芝加哥大学教授，后于1960年移往伯克利，并一直住在那里。陈省身去伯克利之后，由于东西海岸相距很远，我们见面的机会比他在芝加哥时就少了，不过我还是做了两次暑期旅行到旧金山的湾区去看他们。陈省身曾获得过数学家所能得到的两个最高荣誉。我则把陈省身的许多经历告诉他的合作者或者他的学生，他们也许更能够为陈省身的荣誉提供例证。按年份计算，陈省身早已过了正常的退休年龄（我们都是1911年出生）。但是，像陈省身这样的数学家，在某种意义上是永远不会退休的。甚至在过了正式的退休年龄之后，他还在美国国家科学基金会于伯克利兴建的数学研究所当了几年所长。我知道他经常回到中国，在他的母校——南开大学也有一个数学研究所，他也是所长。我想，陈省身正在为促进中国数学的发展而尽力。陈省身不仅是我们这一代的数学领袖，而且还是中国的现代数学之父。

我想从我过去给陈省身的信中摘引一段话来结束本文。那是陈省身于1979年正式退休时我写给他的。当时除了出版他的《选集》之外，以庆贺陈省身的名义，由国家科学基金会发起、伯克利的数学系举办的"整体分析和整体几何"国际会议在伯克利举行。我获得邀请。假如那时我不是在德国，我一定会出席。那次欧洲之行，是我离开德国四十多年之后的第一次回去，事前已作了很长时间的准备。亲戚朋友都已经安排要和我们会面，对我们来说，确实没法在最后一刻改变行程。因为我不能在那个场合当面向他祝贺，就给他写了一封贺信。信是1979年6月20日写的，地点是在施洛斯埃尔毛（Schloss Elmau），一个离奥地利边境不远的巴伐利亚阿尔卑斯山区的美丽地方。我用下面的话结束了我的信：

“国家科学基金会和你的伯克利同行们选择这样的方式向你致贺是很合适的。毫无疑问，你是我们这一世代的数学领袖。就我个人而言，我将永远记住，主要是由于你的忠告，我才会在战后回到数学。在我一生的关键时刻，若没有你的鼓励，我不可能对数学做出哪怕是十分微薄的贡献。为此，我将永远对你怀着感激之情。”

76. A. 韦伊：我的朋友——几何学家陈省身

原文刊于《Shiing-Shen Chern: Selected Papers》, Spring-Verlag, 1978 年。中译文收入《陈省身文选》,科学出版社,1989 年。冯长斌、熊春先译,李文林校。

为了庆祝陈省身的成就,他的朋友和同事们计划出这本选集,要我写一篇文章。这邀请对我是一种不可多得的荣誉。同时,虽然我相信未来的微分几何史家一定会认为他是埃利·嘉当的当之无愧的继承人,要对他的工作给出评价,我却觉得难以胜任。也不需要这样做,因为这本选集将转载他的工作的最精华部分或至少是最具代表性的论著,它们本身就能答复这问题。我所能做的是写一点我们长期交往的回忆——同他的交往,无论学术抑或私人方面,都是我一生中最可宝贵的经历之一。

必须承认,1942 年我被邀评论他在《数学纪事》上的一篇关于积分几何的文章[论文 19][①]时,他的名字对我是陌生的。其实 1936 ~ 1937 年他在巴黎逗留期间我曾见过他;我当时在斯特拉斯堡的学院,并定期去巴黎参加由我及我的朋友们组织的朱利亚讨论班。我们隔周聚会一次,那一年讨论班的论题是埃利·嘉当先生的工作,陈当然特别感兴趣。然而,第二学期我便应邀赴普林斯顿高级研究所(1937 年 1 至 4 月),直至秋天才返法。因此,我在 1936 年秋确实见过他,但却不相识。对我来说,他当时仅是一位来自中国的、不知名的年轻人,见面不多便淡忘了。

五年后,陈已不再是一个新手,可不知怎的,他发表的文章没有一篇引起我的注意。部分原因是我当时很难看到发表它们的杂志。1941 年初我离开法国,那年在哈弗福德与 C. 艾伦多弗合作写了一篇关于高斯-博内公式的文章。我关于齐性空间中的哈尔测度及不变测度的工作以及对德·拉姆的工作的兴趣已使我接近“积分几何”。这是 30 年代布拉施克和他的学生们心爱的课题。这就使《数学评论》很自然地将陈的文章[论文 19]送给我评论。

正如我指出的,尽管该文有某些弱点,但总的来说他把布拉施克学派的积分几何工作一举推进到更高的水平。我对文章所反映的非凡才能和深刻见解有很好的

---

① 见本书附录《陈省身已发表的著作和论文目录》,下同。——编者

印象，并将这些印象写进评论中，还与外尔提起过。恰好那时维布伦已经知道陈关于射影微分几何的工作，他和外尔正考虑克服重重困难请陈到普林斯顿高级研究所来。珍珠港事件后，战火四起，从中国旅行到美国充满风险。仅为获得必要的签证及乘机的优先权也须美国动用全套的外交手段。不用说，这些事我无能为力。因为我本人就是个无助的难民，被官方划为"敌侨"。我只能向外尔竭诚赞助该计划。我对1943年把陈请到普林斯顿来起了一点推动作用，这使我感到自慰。

他抵美后，因我离普林斯顿不远，便立刻来访问我。我们很快就发现了许多共同兴趣。我们都对E.嘉当的工作及凯勒在其"Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen"(微分方程组引论)中对该工作所作的部分精彩介绍有深刻的印象；我们都曾在汉堡认识凯勒；我们都对高斯-博内公式感兴趣；我们都开始领悟纤维丛概念在各种各样的几何问题中的重要作用，虽然这重要性当时还不很明显；更重要的是我们似乎对这些问题和对整个数学有许多共同的观点，我们都力图不管别人的先入之见而直接对每一个问题从根本上下功夫。

陈和我都对示性类特别感兴趣，虽然当时关于示性类所知不多并且尚未定名。某些斯蒂弗尔-惠特尼类仅有模2定义这件事似乎隐藏着某些奥秘。我能告诉陈代数几何中按托德及埃格的工作所引入的"典范类"。这种"典范类"与斯蒂弗尔-惠特尼类显然很相似，却没有模2定义的缺陷(若算得上是缺陷的话)。然而它们的情况仍有些含糊，因为此项工作是在意大利几何的影响下完成的，仍然保留了一些未经证明的假设。至于庞特里亚金类，当时还闻所未闻。

这些就是陈首次访问我时所谈到的问题，以后我们又一再讨论这些问题。大家知道，不久后示性类的概念被陈的工作整个地改观了。首先由于他对高斯-博内公式的证明；然后是他对整体微分几何中复结构与准复结构所起作用的根本性发现。这些都是历史了，我不想多谈，只想指出：当我们今天回顾陈对高斯-博内公式的证明并把它与1942年艾伦多弗和我追随外尔等作者的努力而给出的一个证明相比较，我们会得到什么启发。艾伦多弗和我的证明只限于考虑"管"(tube)，依赖于(虽然在当时这点是不明显的)球丛结构，这是非内蕴结构，也就是对欧几里得空间给定的一个浸入的横截丛；而陈的证明破天荒第一次用到了内蕴丛，也就是长度为1的切向量丛，从而使整个问题豁然开朗。

后来陈和我分开了一段时间。我于1944年底去巴西，而他一直呆到1946年，然后回中国去与他首次来美时分别的家庭团聚。那些年我们联系不多。在陈关于复流形的工作影响下，我本人关于代数几何中纤维丛的思想日趋成熟。我得知他正在南京组建数学研究所，并怀着对他的命运的日益担忧，密切注视着中国政治和军事的发展。1947年我来到马歇尔·斯通全面重组过的芝加哥大学数学系。斯通给陈去信，为他提供一个访问职位。1948年秋，内战之火逼近南京，维布伦和外尔显然与我同样关切陈的命运，便邀请他来研究所，陈后来告诉我，奥本海默同时发

了一份友好的电报表示支持。陈认识到他应立即行动，当即拍了两个回电，一个给我，一个给普林斯顿，告诉我们他正来美。

我曾多次批评美国的高等教育系统，却常以陈第二次来美为例，说明灵活性也许是其最好的优点。当我收到陈的电报时，斯通正在南美旅行。但与他互通一个电报即可。按他和我的提议，系里的教授们表决推荐聘请陈直接担任正教授之职。其后数月却受阻于校当局。他们显然认为，陈乃一难民，能以较低职位聘得。战时的切身经历使我对这种态度深有体会。这促使斯通返校，他以辞职相胁，并亲自要求罗伯特·哈钦斯解决问题[1]。哈钦斯正患流感而卧床，按规定正在休假。最后职位是被通过了，但须到 1949 年夏季生效。在这期间，普林斯顿研究所资助他全家来美并暂住普林斯顿，直至他到芝加哥赴任。

于是，1949 年 1 月陈赴普林斯顿途经芝加哥时我能在火车站欢迎他。我那天第一次会见他夫人和孩子们，其情其景至今记忆犹新。陈戴着裘皮帽活像一位满洲将军，但最难忘的印象是他的女儿 May（即陈璞——编者），一位不足两岁的小女孩，全身包在白裘皮中，真是可爱极了。

这样，在往后十年里我们成了芝加哥大学的同事。我们还是近邻，同住在刚刚造好的芝加哥大学教员公寓。这是他和我学术上富有成果的时期。我们的兴趣主要是纤维丛、复流形和齐性空间。我们在埃克哈特大楼的办公室里讨论，在家里讨论，而更多的是在附近公园里一面散步一面讨论，在一切时候讨论。我们与同事及研究生们的关系是诚挚的。来自美国国内外的学者络绎不绝，到这里作短期的和长期的访问。斯潘涅的就任使我们的同事中又增添了一位真正的拓扑学家。只要看一看陈和我那段时间的论著目录，便知这种科学气氛对我们工作的促进作用。

由于各种原因，包括气候和居住环境方面的考虑，陈和我后来都离开了芝加哥。像我们曾戏言的那样：他迁往伯克利，离中国近了些；我迁往普林斯顿，离法国近了些。我们的友谊并没有因此而受到影响，但彼此间的工作接触却自然地减少了，尽管我们仍设法不时见面。完全是靠了他及他与中国同事所保持的联系，我于 1976 年秋访问了中国——这是一次印象深刻的不寻常经历。我不想再多谈私人交往的事，也不想评论陈近十五年来的工作（或许有其他人比我更有资格讨论，何况其价值是众所周知的）。也许简述一下几何在数学——今天的数学和未来的数学——中的地位来结束本文是合适的。

显然，微分几何中的一切都可翻译成分析的语言，就像代数几何中的一切都可以翻译成代数的语言一样。有时数学家们由于个人的爱好，或者是被一种错误的“严格”观点引入歧途，只注意译文而忽略了原著。不可否认，这偶尔也能导出有重要意义的工作，尽管如此，更深刻的进展往往要回到几何观点上来。我们时代的拓

[1] 罗伯特·哈钦斯是芝加哥大学校长。——编者

扑学就是如此。只要考察拉格朗日的解析几何、里奇的张量分析或是更近代的例子,那就显而易见:如果没有真正的几何学家出来挽救的话,几何题材的纯粹形式化处理往往会将该学科扼杀掉。蒙日对解析几何、列维-齐维塔和更重要的E. 嘉当对张量几何所做的都是这种真正几何学家的贡献。

真正的几何直观在心理上也许永远说不清楚。在过去,这种几何直观主要是指关于三维空间的构想力。而今天,对高维空间的讨论日益取代了初等问题的研究,那么构想至多只能是部分的或象征性的。触觉的想像似乎也起着一定的作用。不管怎样,如果没有嘉当、霍普夫、陈省身和另外几个人的几何直觉,本世纪的数学决不可能有如此惊人的进展。我深信,只要数学继续发展,就永远需要这样的数学家。

77. P.A. 格里菲思：对于陈省身数学贡献的一些感想

原文刊于《Shiing-Shen Chern: Selected Papers》, Spring-Verlag, 1978 年。中译文收入《陈省身文选》,科学出版社,1989。李诚川译,王启明校。

应邀对陈的数学工作略事评述,殊感荣幸。鉴于其本人已作数学总结,而 A. 韦伊关于陈的生平与贡献的讨论是从一个同代人的角度提供的,或竟给我以一个良机,作为一个同他最早期工作的发表时间相差一代的这一辈人,探讨陈的一些论文和他对数学的观点给我的感觉。

作为 20 世纪 60 年代早期普林斯顿的研究生,我的兴趣在于代数几何、微分几何与多复变,陈的大名因此而在最经常得见之列。我对陈的论文最初的直接接触,是学习引进陈类的论文[34]①之时,该论文即使时至今日,仍然对微分几何和复流形的教育提供许多基本要义。这里愿就文章给我的印象作一简要的回顾。

从经典几何的角度来看,如所周知(并在隔代交替之中一再重新发现),$\mathbf{C}^N$ 中 n-平面的复格拉斯曼流形 $G(n,N)$ 的结构给出了枚举问题(enumerative problems)的解决之关键,其中最简单的问题是决定 P^3 中与四条两两不共面直线之每一条都相交的直线数。从技术观点出发,必须知道各种舒伯特闭链之间的相交关系,这些闭链就是那种以指定总量与三角旗$(O)=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_{N-1}\subset V_N=\mathbf{C}^N$ 不处于一般位置上的 n-平面。在 E. 嘉当指导下写的论文中,埃雷斯曼证明了 $G(n,N)$ 的同调以舒伯特闭链的类作为自由基,于是对诸如皮耶里公式一类的基本枚举关系提供了一个拓扑描述。

另一方面,在考虑 N-空间的 n 维代数流形或复流形的高斯映射时,自然出现了格拉斯曼流形。在 20 世纪 40 年代前期艾伦多弗-韦伊发现一般的高斯-博内定理以及陈自己对此作出内蕴证明[论文 26]之后,$\mathbf{R}^N$ 中关于实流形的通常的高斯映射及其可以导出的内蕴拓扑不变量似乎当时变得非常流行了。论文[34]中出现了枚举几何与微分几何的一种合成物,这篇论文发现格拉斯曼流形的上同调环是由

① 本文方括号中的数字指本书附录《陈省身已发表的著作和论文目录》中的编号。——编者

陈类生成的,一方面陈类为基本舒伯特闭链的庞加莱对偶,另一方面应用刚出现的纤维丛的理论,又由陈类导出了复向量丛的内蕴不变量。微分几何的介入是因为 $G(n,N)$ 的上同调环同构于不变微分形式的代数,而表示陈类的微分形式就是万有 n-平面丛曲率矩阵的初等对称函数。

或许有人会说几何学中的基本关系是外在地发现的,但是恰恰因为发现了具有内在意义的外在量的组合,根本性的新见解才得以出现。例证之一为 M. 诺特对他那关于代数曲面算术亏格的著名公式 $\chi(\theta_S)=\frac{1}{12}(C_1^2+C_2)$ 所作的证明,其中他对 P^N 中的 S 应用了普吕克公式组并发现上述那种组合是双有理不变量。另一个例子是 H. 霍普夫定理:欧氏空间中定向偶维紧致超曲面的欧拉示性数等于其高斯映射的次数。陈-韦伊的示性类理论,是同一种精神的再现,在德·拉姆上同调中示性类从曲率构造而得,且导出了高斯-博内定理及其更高余维数的类似。在复的情况下,妙不可言的事情无疑是代数几何与拓扑学在那里互相汇合,而联系这两个领域的公式,用陈类来表示是最为常见的。

现在我们转而讨论在积分几何方面陈的一篇论文。我自己是在 1965 年春初次接触该课题的。那时我在伯克利,方为讲师,并听取陈讲授的一门课,课程把我们引向当时还正在撰写的文章[论文 87]中的材料。这一切刚好发生在伯克利动乱岁月之初,虽然陈在讲课时总会发表关于这个课题的直观的概括性的极好的见解,但在他所有课程中,这一门却讲得最为精彩,在一个学期的时间内,他把整个课题处理得既深又透。回首往事,感到这可能就是对我自己的数学观点影响最大的一门课。

积分几何是一门有趣而涉面甚广的课程,人们会从许多优美的公式及其在初等问题上的应用获得乐趣——见陈对最近桑塔洛所写的专著的评论(Bull. A. M. S., 1977 年第 83 卷,1289~1290)。其中最简单的是克罗夫顿公式

$$\int n(L\cap C)\mathrm{d}L=2l(C), \tag{1}$$

公式把平面内一条弧的长度 $l(C)$ 表为一条变化直线 L 与这弧交点数 $n(L\cap C)$ 的平均值。这里的平均值是所有直线所成空间上关于欧氏群唯一的不变正规密度而言的。在李群的齐性空间上关于不变测度取平均值,正是积分几何中一些公式的特征。其中最有名的公式之一是布拉施克的运动学公式

$$\begin{aligned}&\int\chi(D_1\cap gD_2)\mathrm{d}g\\&=8\pi^2(4\pi\chi_1V_2+4\pi\chi_2V_1+M_1^{(1)}M_2^{(2)}+M_1^{(2)}M_2^{(1)});\end{aligned}$$

这里 $\mathrm{d}g$ 是 $\mathbf{R}^3$ 欧氏群上的双不变测度,D_1、D_2 为具有光滑边界的区域,而 V_i,$M_1^{(i)}$,$M_2^{(i)}$,x_i 分别代表体积,边界围成的面积,边界中曲率的积分和欧拉示性数。

陈的一般运动学公式[论文 87]具有一种与布拉施克公式相似的精神，和基本论文[19]一道，起着建立此类结果大多数的一般模式之作用。为了作出解释，我们首先要回顾一下 H. 外尔关于围绕 $\mathbf{R}^n$ 中紧致k-维流形M，半径为 ρ 的管子 T_ρ 的体积公式。取 $m = n - k$ 即得

$$T_\rho\ 体积 = \sum_{\substack{0\leqslant e\leqslant k\\ e\equiv 0(2)}} c_e\mu_e(M)\rho^{m+e},$$

式中 c_e 是正的常数，而

$$\mu_e(M) = \int_M I_e(R),$$

$I_e(R)$是曲率张量的 $e/2$ 次的正交不变多项式，从而也是对应于 M 上诱导黎曼度量的一个内蕴量。陈的运动公式为

$$\int\mu_e(M^k\cap gM^l)\mathrm{d}g = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant e\\ i\equiv 0(2)}} c_i\mu_i(M^k)\mu_{e-i}(M^l), \tag{2}$$

此公式也曾由费德雷尔独立发现，其中 c_i 是正的常数，这些常数的确定导出了几个有趣的问题。

陈对(2)的证明展示了许多典型的特征。毫无疑问，其中之一是活动标架的运用，在这种情况下活动标架显得特别适合，因为一方面在活动标架的微分系数中，不变测度是当作常数表达式给出的，另一方面是在与几何问题相配合的设置下进行计算的便利。另一个特征在于证明是用直接计算进行的，并未去建立一个复杂的概念框架；事实上，经过更严格的检查，可以发现[论文 19]所描述的那种概念框架确实存在，然而，它的基本原则并没有提炼出来而是留给读者去通过考察它在非平凡的具体问题中如何操作来加深理解。

现在让我们转向值分布理论这一课题，或者说复流形之间的全纯映射。这可以视为对于整亚纯函数的皮卡-波莱尔理论所作的一种推广，在随着皮卡定理 1879 年发表而崛起的一代人看来，这就是当时函数论的一个主要焦点。起先是奈望林纳，继之是 H. 外尔和 J. 外尔以及阿尔福斯作出的皮卡-波莱尔理论的改进构成 20 世纪前半世纪的数学重要成就之一。陈就这一课题单独或与他人合作写出若干论文，这些论文不仅激发起人们颇大的兴趣，而且为现今该领域的进展建立了相当的形式与概念的框架。笔者略述他在这个课题上的一些观点。

假如我们考虑一个全纯映射 $f\colon \mathrm{C}\to P^N$，以后称之为一条全纯曲线。以 $\Delta_r = \{z\colon |z|< r\}$ 表示半径为 r 的圆盘又以$n(r, H)$表示 $f(\Delta_r)$与 P^N 中某个超平面H的交点数，克罗夫顿公式(1)的一个变种为

$$\int_{P^{N*}} n(r,H)\mathrm{d}H = \int_{\Delta_r} f^*\omega, \tag{3}$$

其中 ω 为 P^N 上的标准凯勒形式。实际上，克罗夫顿公式的确切推广在右边应为 $f(\Delta_r)$的面积，但由魏廷格定理，这又等于 $\int_{\Delta_r} f^* \omega$。这里我们接受了[论文 78]的观点，该观点在目前的讨论中正在获得解释。既然在复解析几何中交点的个数总是正的，(3)式右边就具有拓扑上的意义。事实上，闭形式 ω 表示由超平面 H 引出的闭(下)链的庞加莱对偶，我们可以写成 $\omega = \mathrm{dd}^c\mu$ 位势函数 $\mu \geqslant 0$ 在 H 上有奇性。对(3)式右边运用斯托克斯定理，得出了值分布理论的第一主要定理

$$N(r,H) + m(r,H) = T(r) + O(1), \tag{4}$$

其中

$$N(r,H) = \int_0^r n(t,H)\mathrm{d}t/t,$$

而

$$T(r) = \int_0^r \left\{ \int_{\Delta_t} f^* \omega \right\} \mathrm{d}t/t$$

为阶函数，又

$$m(r,H) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Delta_r} f^* \mu \mathrm{d}\theta \geqslant 0$$

为逼近形式。陈经常言及(4)与其后的奈望林纳不等式

$$N(r,H) \leqslant T(r) + O(1) \tag{5}$$

视之为非紧致代数几何中的关系式；而我们也可把它们看作非紧致陈类的公式。把(5)式与(3)的平均形式

$$\int N(r,H)\mathrm{d}H = T(r)$$

作一比较，当可发现理论中更深刻的一个侧面。例如，假设 $T(r) \to \infty$，立时看出像曲线不可能落在超平面空间中的一个开集之外，此即为卡索雷蒂-魏尔斯特拉斯定理。

为了得到奈望林纳理论的主要结果(至少在 $n = 1$ 的经典情况下)只须令位势函数为 $\log v$ 而 $f^* \omega = (\sqrt{-1}/2)v \cdot \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$，并使用和推导(4)式相同的过程。得到的公式称为第二主要定理；它正是在区域 $\Omega_r = \Delta_r -$ (f 的分歧除子) 上关于具有常高斯曲率 $+2$(由于 $\chi(P^1) = 2$) 的度量 $f^* \omega$ 的(积分的)高斯-博内定理。比较第一与第二主要定理，我们可利用微积分的技巧来消除边界积分，从而得到形如

$$\sum_{i=1}^{3} N(r,H_i) \leqslant 2T_f(r) + O(\log T_f(r)) \tag{6}$$

的不等式，式中 H_i 是 P^1 上相异的点，对系数 2 的解释则如上文所述。(6)基本上

就是奈望林纳有名的亏关系式。由[论文 73]得到的这个推导模式表明了应该如何去寻求推广。

我们即将看到，即使处理复分析课题，所用方法也还是微分几何的方法。利用微分几何去研究复流形和全纯映射，始于 20 世纪 30 年代和 40 年代由霍奇、阿尔福斯、博赫纳以及其他几位数学家所做的工作。几乎从一开始，埃尔米特微分几何与其在复的情况下特有的好的性质，就是陈的工作中一个主要的题目。一般说来，他总是强调分析的几何侧面，这个观点已由他的许多学生付诸实施。我回忆起在伯克利时几个讨论班，在讨论班上他论述从几何中产生的分析问题；研究这些问题往往要去念一些难读的论文，那些论文在当时还不甚为人所知晓，却又具有基本的重要性，例如卡拉比关于仿射超球面的工作。

在陈的工作中另一个经常可见的主题是他对于表示上同调类的实际微分形式的重视。他对于广义高斯-博内定理的证明里已经隐含的这个原则再次出现于陈对奈望林纳理论的处理方法中，在所述理论中位势函数的选择起了决定性的作用。在[论文 83]中，陈与博特合作，在一般的框架中对此进行了探讨，当时他们证明了，不仅存在一个典则联络与复流形上全纯向量丛 $\mathbf{C}^r \to E \to M$ 的每一埃尔米特度量 h 相对应，而且对每一个全纯截面 s，都有一个$(r-1,r-1)$形式 μ_s 相，使得第 r 陈形式由

$$c_r(E,h) = \mathrm{dd}^c \mu_s$$

于 $M-$(s 的零点)上给出。而且，若在一定意义下 E 的曲率为正，则 $\mu_s \geqslant 0$。

这个题目在陈与西蒙斯的合作工作[论文 106]中再一次被形式化了。流形 M 上黎曼度量 $\mathrm{d}s^2$ 的给出庞特里亚金形式 $P_k(\mathrm{d}s^2)$，及其由 $\left(\sum\limits_{k\geqslant 0} P_k\right)\left(\sum\limits_{j\geqslant 0} P_j^{\perp}\right) = 1$ 定义的对偶形式 $P_j^{\perp}(\mathrm{d}s^2)$。标架主丛 P 上有典则定义的超度形式 $T_k(\mathrm{d}s^2)$，满足 $\pi^* P_k(\mathrm{d}s^2) = \mathrm{d}T_k(\mathrm{d}s^2)$，其中 π: $P \to M$ 是投影。假如出于对称或维数的原因，$P_j^{\perp}(\mathrm{d}s^2)$或 $P_k(\mathrm{d}s^2)$恒等于 0，则此超度形式就获得了上同调的意义，下面的定理阐明了这类结果的特点：设 M 为一紧致的 n 维黎曼流形，则它保角浸入 R^{n+h}中的必要条件是

$$P_j^{\perp}(\mathrm{d}s^2) = 0, [h/2]+1 \leqslant j,$$

$$\frac{1}{2} T_j(\mathrm{d}s^2) \in H^{4j-1}(P,Z),$$

$$[h/2]+1 \leqslant j \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]。$$

正如代数几何学家总是周期性地转向代数曲线问题，纵观陈的工作，都可看出他对经典微分几何，特别是欧氏空间中的曲线和曲面，有着不变的兴趣。其中，一个特别多产的领域是对极小曲面的研究，在这方面陈经常与人合作，且已写出了数

篇论文。对我而言,特别受启发的一篇是[论文 99],这篇论文是在卡拉比论 n-球面 S^n 中极小 2-球面的工作基础上写的。首先,子流形密切空间的一般形式被发展了,然后可以看出,对于具有常数截面曲率的黎曼流形中的极小曲面,这个密切序列有着特别简洁的描述。现在,鉴于 $\mathbf{R}^{m+2}$中的曲面为极小曲面等价于其高斯映射为到 P^{m+1}中复二次曲面的反全纯映射(见[论文 82]),因此人们可以运用复微分几何的方法来研究这些曲面,尤其是用射影空间中一条全纯曲线的弗雷内标架和这些曲面的大范围函数论。这里的函数论涉及皮卡和波莱尔定理,从而也和值分布理论联系起来了。在目前对于 S^n 中极小 2-球面的研究上,存在着这两者的类似物;密切序列前已提及,但对于函数论,一个基本的区别在于域 S^2 是紧致的。经过计算,得到如下结论,即可追溯到博罗夫卡(1933)的结果:最高的密切空间导出在复二次超曲面中的一条紧致代数曲线,这个结果现在已有了更概念性的提法。

陈对经典微分几何感兴趣的另一证据,是他在伯克利开设的 140~240 系列数学课程,这些课程与以前在芝加哥大学的同样课程,以及广泛流传的讲义[教材 1]、[教材 2]一道,从某种意义上讲竟造就了整整一代的微分几何学家。我很清楚地记得我做学生时为弄懂[教材 1]中那个不显眼的公式 $\mathrm{d}p = \sum \omega_i e_i$ 是如何地费力气,还有[教材 1]中一个特别著名的计算,在计算中一个有许多指标的量突然从计算中消失了。我询问了我的导师唐·斯潘塞,他紧盯着细看了一阵,然后耸耸肩,说无论它是什么,它决不会是一个张量,因为据陈对后者的定义,它是一个不因坐标系的特殊选择而消失的量。实际上,这儿的技巧很有用,至少假如你清楚自己正在做些什么的话——这里使我们联想到 H. 外尔对于嘉当论活动标架法的书所作评论的最后一段话(Bull. A. M. S.,1938 年,第 598~601 页)。

和莫泽合作的论文[108]处理了在 $\mathbf{C}^{n+1}(n \geqslant 1)$中非退化实超曲面 M 的等价性问题。经典微分几何有这样一个定理,即在 $\mathbf{R}^{n+1}(n \geqslant 2)$中的一个超曲面可由它的第一和第二基本形式决定到相差一个刚体运动。而且,第一、二基本形式可以被预先规定只要它们满足某种微分条件的制约,即高斯-科达齐方程;最后经典曲面理论 ($n = 2$) 和 $n \geqslant 3$ 的情况之间存在着区别, $n \geqslant 3$ 时,一般地说仅用第一基本形式就足以决定超曲面了。陈-莫泽理论可以被看成一种类似,在那里欧氏运动群被局部双全纯变换的无限伪群 Γ 所替代,且在(归诸 E. 嘉当的) $n = 1$ 的场合和 $n \geqslant 2$ 之间也存在着相应的区别。

基本的事实是,假如有一个 C^∞ 实函数 r, M 由 $r(z) = 0$ 局部地给出,则列维形式

$$\mathscr{L}(\xi) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\xi_i\bar{\xi}_j, \quad r(z) = 0 \tag{7}$$

定义在复切向量 $\xi = (\xi_i)$ 上,满足

$$\sum_i \frac{\partial r}{\partial z_i}(z)\xi_i = 0, r(z) = 0, \tag{8}$$

且相差一个共形因子，又在伪群 Γ 下保持不变。假设列维形式(7)是 M 复相切空间(8)上的非退化形式，则在此丛中存在一个内蕴的埃尔米特共形结构，这一结构至少表明，嘉当的等价手续在两度延展(prolongation)之后应该终止。这里出现的正是此种情况，事实上，该论文通过对等价方法如何在一个重要的特殊情况下应用的考察，而堪为学习等价方法的好材料。让我们回忆一下，克莱因的埃尔朗根纲领处理在李群或伪群的可递作用下空间 X 的不变量问题。人们的视野随着 E. 嘉当而被大大地开扩了，以致并不需要给出群，而只要给出 X 上的一个结构，例如黎曼结构，共形结构或切触结构，如此等等。那结构一般说来并非齐性的，不过真若如此，我们就会处在克莱因考虑的状况之下。嘉当的等价法用连续延展的手续，对每点 $x \in X$ 对应一列群，构成关于该结构的局部不变量的一个完全系。其一般性的理论近年来已被仔细地论证过，然则如同嘉当的许多遗产一样，一个精心选出的例子的复杂性与特殊性质具有一种特殊的魅力。在嘉当和陈的工作中，有人可能会说，与那些证明了的结论几乎具有同等重要性的，是证明如何进行的方式，特别需要强调的是如何选择最有效地提炼出本质东西的符号系统。另一个共同特点是主要的技术步骤经常出现于某种代数操作之中，它的最终形式却给人以简单容易的假象。

在准备这篇评论的过程中，曾得到伍鸿熙极其有益的建议，谨此申谢。

78. R.S.帕莱斯和滕楚莲：陈省身

原载《世界著名数学家传记》，吴文俊主编，科学出版社，1995年。

陈省身　1911年10月28日生于浙江嘉兴。微分几何、拓扑学。

早年

陈省身的父亲陈宝桢是晚清秀才，后毕业于浙江法政专门学校，在司法界服务。母亲韩梅，弟陈家麟，姊陈瑶华，妹陈玉华。

因为祖母钟爱，不放心陈省身进小学，由他的姑母在家教他国文。他的父亲在外地做事，不常在家。有一年，父亲回来，教他认阿拉伯数字，学四则运算。父亲走后，陈省身做了很多数学习题。因此，他虽然没有上过初小，却能在9岁时轻易地通过考试进入秀州中学附属小学五年级。

1922年，陈宝桢在天津供职，决定把全家接到天津。陈省身进天津扶轮中学，仍然喜欢数学，觉得它既容易又有趣，做了霍尔与奈特合著的高等代数及温特沃思与史密斯合著的几何学和三角学书中的大量习题。他也喜欢看小说和写文章。

1926～1930，南开大学

15岁时，陈省身考入天津南开大学学习数学。他的老师姜立夫对他的读书态度有很大影响。姜立夫是哈佛大学的数学博士（指导教授是J.L.库利奇）。当时全中国只有几个数学博士，而姜立夫的教学态度很严谨，总是布置很多习题，并且亲自批改作业，使学生获益极多，觉得数学非常有趣又有前途。

1930～1934，清华研究院

30年代，很多在国外获得博士学位的留学生陆续回国任教。虽然各大学的数学系的水准有提高，但陈省身觉得那时的教学颇像学徒制，很少鼓励学生自己创新，所以要在数学上有长进，必须出国深造。因陈省身的父母无法供他出国念书，只有考公费。当时清华研究院规定，毕业后成绩优异者可以公费留学。所以陈省身在1930年从南开大学毕业后考进清华研究院。那时研究院的四位教授是熊庆

来、孙光远、杨武之(杨振宁的父亲)和郑之蕃(后来成为陈省身的岳父)。陈省身随孙光远念投影微分几何。

陈省身在南开大学时上过姜立夫开的空间曲线、曲面论的课,用的是布拉施克的书。他觉得这门课深奥奇妙,所以当布拉施克在 1932 年到北平访问时,陈省身听了他的全部六个关于网络几何的演讲。

陈省身在 1934 年从清华研究院毕业时得到两年的留美公费。因受布拉施克的影响,陈省身要求清华研究院让他去德国汉堡大学。当时数学系的代理系主任杨武之帮他安排去德国留学。

当时正值希特勒当权,驱逐大学里的犹太籍教授。因汉堡大学刚成立不久,幸而比较安静,成为一个研究数学的好地方。

1934 ~ 1936,汉堡大学

陈省身在 1934 年 9 月到达汉堡大学,随布拉施克研究几何,论文的内容是嘉当方法在微分几何中的应用,在 1936 年 2 月得到科学博士学位。因为布拉施克时常外出旅行,故陈省身和布拉施克的助手凯勒的讨论最多。当时对陈省身在数学上影响最大的可能是凯勒的讨论班“微分方程组论”,其中的主要定理现称为嘉当-凯勒定理。这是一个崭新而复杂的理论。讨论班刚开始时研究院里每个人都来参加了,但到最后只剩下陈省身一个人。陈省身觉得他也因此而受益最多。

1936 年夏天陈省身的公费期满,就接到清华大学与北京大学的聘约,同时又得到中华文化基金会的一年资助。所以他由布拉施克推荐去巴黎随当代几何大师 E. 嘉当工作一年。

1936 ~ 1937,巴黎

陈省身在 1936 年 9 月到达巴黎。当时嘉当的学生众多,要会见他得在他的办公时间排队等候。幸而两个月后嘉当邀请陈省身每隔一周到他家去讨论一小时。陈省身在巴黎这段时间工作很勤奋、很快乐,全部精力花在准备这每两周一次与嘉当的面谈上。他学到了活动标架法和等价方法,以及更多的嘉当-凯勒理论。更重要的是,陈省身觉得他学到了嘉当的数学语言及思考方式。他感到和嘉当工作 10 个月所得益处甚多,在那时所写的三篇文章只是研究成果的一小部分。

1937 ~ 1943,西南联大

1937 年夏天陈省身受聘于清华大学。不幸,未离巴黎就发生了卢沟桥事变,日本侵华战争爆发。清华大学要陈省身暂时先去长沙临时大学任教。1938 年 1 月日军逼近长沙,陈省身随大学搬到昆明西南联合大学。西南联大是战时由北京大学、清华大学、南开大学三校合并而成的,师资力量很强。譬如华罗庚当时也在西南联

大任教。陈省身在西南联大有很多好学生,不少后来在数学及物理学上有杰出贡献,例如数学家王宪钟和物理学诺贝尔奖获得者杨振宁。因战争之故,昆明与外界完全隔绝,且物资匮乏,幸而陈省身带了不少嘉当的论文研读,将自己完全投入了研究工作。他在这段困难时期开始的研究工作后来对于现代数学的发展具有极大的启示性。

陈省身的家庭

陈省身与郑士宁的婚姻是由杨武之促成的,他们于1937年在长沙订婚,1939年结婚。郑士宁是东吴大学生物学理学士。1940年她由昆明去上海待产,生下长子陈伯龙。但因战事,她无法回昆明,直到6年后的1946年才得以团聚。他们尚有一女陈璞(女婿朱经武是高温超导体研究的主要贡献者之一)。

陈省身的家庭美满,夫人一向陪伴在旁,陈省身非常感谢她为他创造了一个平静的气氛进行研究。在郑士宁60岁生日时,陈省身特别为她写下一首诗:

三十六年共欢愁　无情光阴逼人来
摩天蹈海岂素志　养儿育女赖汝才
幸有文章慰晚景　愧遗井臼倍劳辛
小山白首人生福　不觉壶中日月长

1978年陈省身在“我的科学生涯与著作梗概”中写下了如下的话:

“在结束本文前,我必须提及我的夫人在我的生活和工作中所起的作用。近40年来,无论是战争年代抑或和平时期,无论在顺境抑或逆境中,我们相濡以沫,过着朴素而充实的生活。我在数学研究中取得之成就实乃我俩共同努力之结晶。”

1943~1945,普林斯顿高级研究所

此时陈省身已是中国著名的数学家,他的工作也逐渐受到国际上的重视。但他对自己的成就并不满足,所以当维布伦在1942年邀请他去普林斯顿高级研究所做研究员时,他不顾世界大战正在进行中,毅然决定前往。(他坐军用飞机花了7天才由昆明到达美国!)

这是陈省身一生中最重要的决定之一,因为在普林斯顿这两年里进行的研究是最创新的工作,具有最深远的影响。他给出了“高斯-博内公式一个新的内蕴证明”,进而发现了“陈示性类”。霍普夫曾说:“推广高斯-博内公式是微分几何最重要和最困难的问题,纤维丛的微分几何和示性类理论……更将数学带入一个新纪元。”

1946~1948,中央研究院

陈省身在1946年春天回国。当时中央研究院决定成立数学研究所,由姜立夫

任筹备处主任。姜立夫聘陈省身为兼任研究员，但姜立夫很快离国去美，故筹备工作落在陈省身的身上。战后复员，筹备处确定在上海工作。陈省身着重于“训练新人”，他从全国各大学选了最好的大学毕业生集中到上海，由他每周讲 12 个小时的拓扑学。由此培养了一批新的拓扑学人才，如吴文俊、廖山涛、陈国才、张素诚、杨忠道等。1948 年研究所迁到南京。该年秋天中央研究院举行第一届院士选举，共选出 81 人，陈省身是其中最年轻的一位。

陈省身专心于研究及教学，完全没有注意到内战的状况。一天，他忽然接到普林斯顿高级研究所所长奥本海默的电报，说：“如果我们可做什么事便利你来美，请告知。”陈省身这才开始阅读英文报刊，了解南京的局面不能长久，所以决定带全家去美国。在去美国前，印度孟买的塔塔(Tata)研究所曾邀请他去那里工作，但那时他已不能接受。陈省身全家于 1948 年 12 月 31 日离开上海，在普林斯顿高级研究所度过了春季学季。

1949 ~ 1960，芝加哥大学

陈省身知道他无法很快返回中国，需要一个长期职位扶养家室。此时正值芝加哥大学斯通教授揽才网罗最好的数学家，将芝加哥发展成世界上最好的数学研究中心。当时，陈省身的好友、著名数学家韦伊就在那里。1949 年夏，陈省身被聘为芝加哥大学教授。在芝加哥大学 11 年陈省身指导了 10 个杰出的博士生。他于 1960 年离开芝加哥去伯克利加州大学，一直到 1979 年退休。

陈省身与杨振宁

陈省身在 1946 年发表示性类的论文，1949 年在普林斯顿讲了一个学期的联络论。杨振宁和米尔斯在 1954 年发表了杨-米尔斯场论。1949 年陈省身、杨振宁均在芝加哥，1954 年又同在普林斯顿。他们是好友，时常谈论自己的工作，却不知道他们的工作有密切的关系。20 年后才知道两者的重要性，也才知道他们所研究的是同一个“大象”的两个不同的部分。下面是杨振宁送陈省身的一首诗：

天衣岂无缝　　匠心剪接成
浑然归一体　　广邃妙绝伦
造化爱几何　　四力纤维能
千古寸心事　　欧高黎嘉陈

1960 ~ 1979，伯克利加州大学

陈省身曾说他去加州大学原因有二：一是加州大学正在发展阶段，有建成几何学中心的潜力；二是加州的天气暖和。

在加州大学，陈省身有很多学生，有 31 人随他完成博士学位。陈省身也是许

多到加州大学做讲师的年轻博士们的良师(本文作者之一曾在芝加哥大学做讲师,另一位曾在加州大学做讲师,均受教于陈省身)。

陈省身在加州大学将数学系建成世界著名的几何学中心。他对人友善、益谈、多鼓励,再加上他的论文和讲稿从50年代起已成为学习微分几何的经典,因此可以说世界各地的几何学家几乎都受到他的影响。当他在1979年从加州大学退休时,学校为他举行了一个数学讨论会(Chern Symposium),历时一周,300多人出席。其实陈省身并没有真正退休,而是继续在加州大学教到1984年,并且到"山顶"成为伯克利数学科学研究所首任所长。

1981年以后,三个研究所

1981年,陈省身、穆尔、辛格以及旧金山海湾地区的几位数学家向美国国家科学基金会提出在伯克利成立数学研究所的计划。经过激烈的竞争,国家科学基金会宣布成立两个所,其中一个就是在伯克利的数学科学研究所(MSRI),陈省身为首任所长,任期三年。此所办得很成功,陈省身的影响是显著的。

陈省身一共办过三个研究所:中央研究院数学研究所(1946~1948,上海,南京),数学科学研究所(1981~1984,伯克利),南开数学研究所(1984年以后,天津)。陈省身一向不愿意让琐碎的行政工作缠身,总是把老子的无为哲学用得恰到好处。

陈省身一直希望中国数学能跻身于世界数学领导地位。他觉得要达此目的必须做到下面两点:第一,要培养出一批年轻、有抱负、有信心、不求个人名利、且要"青出于蓝而胜于蓝"的数学工作者。第二,要有足够的经费支持,充实的图书,完善的研究室以及国内外的数学交流。(陈省身觉得这些资源对于数学研究的重要性不亚于仪器对于实验科学的重要性。)

为了促使中国早日成为数学强国,陈省身1946年回国,办中央研究院数学研究所。以后又在1984年从伯克利数学科学研究所退休后回到天津办南开数学研究所。

1966~1976年的"文化大革命"使中国损失了整整一代的数学工作者。从1972年起,陈省身常回中国讲学,培养中国年轻一代的数学家。南开研究所成立于1985年,在这里建有宿舍,常年有中外学者来访。研究所仿普林斯顿高级研究所的模式,其目的之一是让中国各大学里的教师和研究生可以到这里专心致志进行研究,并且有机会与中外数学家进行讨论和交流。另一个目的是希望创造一个好的研究环境吸引在国外获得博士学位的留学生回国工作。

荣　誉

陈省身曾应邀在国际数学家大会上作过三次报告。第一次是在战后第一次大会上(1950年,马萨诸塞州坎布里奇)作一小时报告,第二次在苏格兰的爱丁堡

(1958年)，第三次在法国尼斯(1970年)也是一小时报告。国际数学家大会每四年开一次。同一个人被邀请作两次以上的演讲是罕见的。在这个大会上还要颁发数学界的最高荣誉奖——菲尔兹奖章。这个奖颁给40岁以下、且在数学上做出卓越的奠基性研究工作的数学家。陈省身的学生丘成桐在1982年得到过这项奖。

许多著名大学授予陈省身荣誉博士学位；他在1961年当选为美国国家科学院院士，1975年得到美国国家科学奖，1983年获得沃尔夫奖。沃尔夫奖是1978年由以色列沃尔夫基金设立的，颁给在科学领域内做出杰出贡献的学者。陈省身将他的奖金全数捐给了南开数学研究所。陈省身也是英国皇家学会、意大利国家科学院及法国科学院等的国外院士。

陈省身的研究工作总论

陈省身的数学兴趣很广泛，对古典的及近代的几何学均有重要的贡献，其中主要的有：

几何结构及等价问题
积分几何
欧氏微分几何
极小子流形
全纯映射
网
外微分系统和偏微分方程
高斯-博内公式
示性类

因为篇幅限制，不能够对陈省身的所有论文和成就一一进行解释，这里将着重介绍最重要的、影响最深远的文章。

陈省身的研究工作有一共同的风格：他精通微分形式的运算技巧并将它巧妙地用到几何问题上。这是他的老师——几何大师嘉当传给他的魔杖，使他能以此进入数学上旁人难以进入的新领域。微分形式是探讨局部几何与整体几何的理想工具，原因是它有两个互补的运算：外微分和积分，且两者由斯托克斯定理相联系。

几何结构及等价问题

陈省身的早期工作主要是研究各种不同的等价问题，也就是如何有效地决定两个同种的几何结构是局部等价的。例如：两条空间曲线是否全等(即它们在空间的旋转和平移下互相重合)，或两个黎曼结构是否局部等距。在古典几何里我们常设法找出几何结构的较易了解又简单的不变量及其关系，然后证明这些不变量

是完全的,即两个同种的几何结构等价的充要条件是其不变量相同。最终目的是得到类似于平面几何中三角形全等判定定理的结论。光滑空间曲线的等价问题在上世纪初已解决,它在刚体运动群下的完全不变量组是其曲率和挠率。欧氏空间中曲面的等价问题较复杂,但在 19 世纪末也得到完满的解决,它的完全不变量组是两个二次型,第一个二次型(即度量张量)是正定的,而且这两个二次型须满足高斯-科达齐方程。黎曼度量的局部等价问题也由克里斯托费尔和李普希茨解决,它的解更复杂,且从表面上看与上面的例子无关。

在陈省身开始做研究工作的初期,寻找上述个别例子的共性,及如何有系统地解决等价问题是当时几何学家面临的主要挑战。嘉当用他的活动标架方法已朝这个方向迈了一步。他将一般的等价问题演化成微分形式组的等价问题。具体地说,就是在给定 $\mathbf{R}^n$ 上的一个几何结构之后,可以选取 1) $GL(n,\mathbf{R})$ 的一个子群 G;2) 在 $\mathbf{R}^n$ 上的 n 个线性无关的一次形式 $\theta_1,\cdots,\theta_n$,使得几何结构的等价问题变成形式的等价问题。至于 $\mathbf{R}^n$ 上两个形式组 $\{\theta_i\}$,$\{\theta_i^*\}$ 等价的意思是存在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个微分同胚 φ,及从 $\mathbf{R}^n$ 到 G 的映射 (a_{ij}),使得

$$\varphi^*(\theta_i^*) = \sum_j a_{ij}\theta_j。$$

现在我们称由 1)、2)决定的几何结构为一个 G-结构,它是陈省身为了系统地整理和解释嘉当的等价方法而引进的。例如:黎曼度量是 $O(n)$-结构,给定度量 $\mathrm{d}s^2$,可选择 n 个一次形式 θ_i,使得

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_i \theta_i^2。$$

虽然对于一般几何结构,子群 G 的选择不一定是显而易见的,但是多数自然的几何结构可以表成适当的 G-结构。

嘉当不仅将几何结构的等价转换成 G-结构的等价,而且也发展了一套方法找出完全不变量组。可是他的方法需要运用困难的普法夫方程组理论及其拓展方法,以致至今仍未广为人知。事实上,嘉当在晚年虽被认为是卓越的几何学家,但是同时代的学者认为他的文章难读,因而充其量也只有极少数的数学家真正了解他在几何学上的创新和贡献。例如外尔在评嘉当的书时曾说:“嘉当是当今最伟大的几何学家,……但我必须承认我觉得他的书和他的文章都很难读……”

在大家都觉得嘉当的文章难懂的情形下,可以想像他在等价问题上的重要见解会被埋没。幸而命运的安排并非如此。因陈省身随凯勒及嘉当学习,故他成为能对等价问题有更深一层了解的自然人选。在他头 20 年的研究工作中有许多篇关于等价问题的好文章,而且他对等价问题给了详尽的解释。纤维丛及主丛上的联络理论在此 20 年间发展起来绝非偶然。这些理论是许多人多年研究工作的结晶,在几何学、拓扑学上均有很大的启发性。陈省身在等价问题方面的工作以及相

关的示性类理论是此 20 年数学的主要进展之一。

为要了解陈省身在等价问题上的重要贡献，下面先解释由陈省身引进的定义：用现代语言来说，所谓的 n 维流形 M 上的一个 G-结构是指 M 上由余切 $GL(n,\mathbf{R})$-主丛约化的 G-主丛。假定这个 G-主丛是 $\pi: P\to M$，其中 P 是全空间，由容许的余切标架 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 组成。在 P 上有 n 个自然的一次微分形式 ω_i，使得 $\omega_i|_\theta=\pi^*(\theta_i)$。令 V 表示 $\mathrm{d}\pi$ 的核，则 V 是切丛 TP 的子丛，称为纵子丛，且 ω_i 在 V 上的值为零。因为 G 作用在 P 的右边，而且在纤维上的作用是单可迁的，所以在点 θ 的纵子空间 V_θ 可以看作 G 的李代数 $L(G)$（由 G 上的左不变向量场组成）。那么 P 上的 G-联络是 TP 上的一个横子丛，也就是与 V 互补、并且在 G 的作用下不变的子丛 H. 给定 H 与给定从 TP 到 V 上的射影是一样的，后者相当于在 P 上给定一个 $L(G)$-值的一次形式 ω，称为联络形式。用 R_g 表示元素 $g\in G$ 在 P 上的右作用，则 H 在 G 的作用下不变的条件写成关于 ω 的条件就是 $R_g^*(\omega)=\mathrm{ad}(g^{-1})\cdot\omega$（其中ad 是 G 在 $L(G)$ 上的伴随表示），简称 ω 满足等变条件。由于 $L(G)$ 是 $L(GL(n,\mathbf{R}))$ 的子代数，故 ω 可表示成 $n\times n$ 矩阵，其第 i 行、第 j 列的元素 ω_{ij} 是 P 上的一次微分形式。

令 $\sigma:[0,1]\to M$ 是 M 上从点 p 到点 q 的一条光滑曲线，$\tilde\sigma_\theta$ 是 P 中通过点 θ 的、曲线 σ 的唯一的横提升。用 π_σ 表示从纤维 P_p 到纤维 P_q 的映射，其定义为 $\pi_\sigma(\theta)=\tilde\sigma_\theta(1)$。$\pi_\sigma$ 称为沿曲线 σ 的平移。一般说来，此平移与所取的曲线 σ 有关。如果联络 ω 的平移只与 σ 的同伦类有关，则称 ω 是平坦的。联络 ω 是平坦的充分必要条件是横子丛 H 是可积的，或者 ω 满足恒等式 $\mathrm{d}\omega_{ij}=\sum\limits_k\omega_{ki}\wedge\omega_{kj}$，自然地，可以定义曲率形式 Ω 为衡量 ω 平坦与否的测度，即 $\mathrm{d}\omega=\omega\wedge\omega-\Omega$。因 ω 是等变的，故 Ω 也是等变的。将 Ω 作外微分，得到比安基恒等式 $\mathrm{d}\Omega=\Omega\wedge\omega-\omega\wedge\Omega$。把 P 上的局部截面 θ: $U\to P$ 称为容许的局部余切标架场。若 $\hat\theta$ 是 P 在 U 上的另一个截面，则存在唯一的一个光滑映射 g: $U\to G$，使得 $\hat\theta(x)=R_{g(x)}\theta(x)$。令 $\psi=\theta^*(\omega)$，$\hat\psi=\hat\theta^*(\omega)$，$\Psi=\theta^*(\Omega)$，$\hat\Psi=\hat\theta^*(\Omega)$，则有

$$\hat\psi=\mathrm{d}g\cdot g^{-1}+g\cdot\psi\cdot g^{-1},$$
$$\hat\Psi=g\cdot\Psi\cdot g^{-1}。$$

但是联络与等价问题的联系在哪里？嘉当的等价方法用于一般的 G-结构是复杂的，除非 G 成为平凡子群 $\{e\}$（e 是群的单位元素）。他发现，有时可以添进对应于群 G 的坐标的“新变量”得到一个新的流形，使得 M 上的 G-结构成为新流形上的 $\{e\}$-结构。陈省身看出这个新流形只是 G-主丛的全空间 P，嘉当的约化方法恰好是探测 P 上是否有“内蕴联络”的方法，而 G-结构的完全不变量组可以由这个联络的曲率形式算出来。最重要的黎曼度量的等价问题即可以用此法来解，其

内蕴联络当然是它的列维-齐维塔联络。设 φ 是从黎曼空间(M,g)到(M,g^*)的局部等距映射，$\{e_i\}$是在点 p 的切空间的单位正交基。命 $P^*=\varphi(p)$，$e_i^*=\mathrm{d}\varphi(e_i)$。用 x_k 表示M 上由e_i 决定的法坐标，则 g 和g^*在此坐标下是相同的。注意到 g 在法坐标下的马克劳林展开式的系数可以表为它在点p 的曲率及其共变导数的通用多项式。因此，黎曼度量的完全不变量组是在法坐标系下的曲率张量及其各阶共变导数在一点的值。

用 $N(G)$ 表示半直积 $G\ltimes\mathbf{R}^n$(由 G 及平移生成的仿射变换子群)。对应地，线性标架的 G-主丛P 可以扩充为仿射标架的相配$N(G)$-主丛 $N(P)$。在[论文 46]①里，陈省身发现如果能在 $N(P)$ 上找到内蕴 $N(G)$-联络，则与上例类似的结果仍成立。$N(G)$-联络的曲率形式 Ω 是 $L(N(G))$-值的二次微分形式。然而 $L(N\cdot(G))=\mathbf{R}^n+L(G)$，故 Ω 也有相应的分解。Ω 中相应于 $\mathbf{R}^n$ 的部分τ 称为此联络的挠率。陈省身发现，如果在 τ 上加适当条件，可以定义内蕴的 $N(G)$-联络。例如，列维-齐维塔联络是 $\tau=0$的唯一的 $N(O(n))$-联络。事实上，在[论文46]中陈省身证明：若 $L(G)$ 满足一个代数条件(“性质 C”)，则内蕴 $N(G)$-联络存在。他更进一步证明：若 G 是一紧群，则 $L(G)$ 必满足性质 C。在该文中他还用嘉当的伪群观点来解释为何有些 G-结构上不存在内蕴联络。G-结构$(\pi: P\rightarrow M)$的伪群是由所有保持 P 不变的M 上局部微分同胚组成的，所以当 G-结构上有一内蕴联络时，该联络必在上述伪群作用下不变。但是在 P 上保持一个固定联络不变的丛自同构成为一个有限维李群，而确实存在其伪群是无限维的 G-结构；例如当 $n=2m$ 时取 $G=GL(m,\mathbf{C})$，这时 G-结构恰好是殆复结构，其自同构群是一个无限维伪群。

陈省身还解决了许多具体的等价问题。例如，[论文 6]、[论文 13]是关于三阶常微分方程式定义的轨道几何，此时 G 结构是关于 $\mathbf{R}^2$ 的单位切向量的切触流形定义的，G 是保圆切触变换的群。在[论文 10]、[论文 11]中他把上述考虑推广到 n 阶常微分方程组的轨道几何。在[论文 24]中他考虑广义的射影几何，即 $\mathbf{R}^n$ 中k 维子流形的$(k+1)(n-k)$-参数族的几何；[论文 21]和[论文 22]是关于 $\mathbf{R}^n$ 中超曲面的$(n-1)$-参数族定义的几何。在[论文 108](与莫泽合作)及[论文 110]中他考虑 $\mathbf{C}^n$ 中的实超曲面，此二文成为 CR 流形理论的经典著作。

积分几何

$\mathbf{R}^n$ 的刚体运动群G 可迁地作用在各种各样的几何对象组成的空间S 上(例如：点、直线、有某一固定维数的仿射子空间、有固定半径的球面，等等)，所以 S 可以看作一个齐性空间 G/H，G 上的不变测度诱导出S 上的一个不变测度，此即首先由庞加莱引进的“运动学密度”。积分几何的基本问题是将各种几何上有意义的量关于

① 本文方括号中的数字指本书附录《陈省身已发表的著作和论文目录》中的编号。—— 编者

运动学密度的积分用已知的积分不变量表示出来（参看[论文 87]）。最简单的例子是关于平面曲线 C 的克罗夫顿公式：

$$\int n(l \cap C)\mathrm{d}l = 2L(C),$$

其中 $n(l \cap C)$ 是平面上的直线 l 与 C 的交点数，$\mathrm{d}l$ 是直线组成的空间的运动学密度，$L(C)$ 是 C 的长度。此公式可解释为平面上直线与一条曲线相交的平均次数是 C 的弧长的两倍。

在[论文 19]中，陈省身为广义的积分几何奠定了基础。韦伊在评论这篇文章时说："它把布拉施克学派的工作一举推进到更高的水平。我对文章所显现的非凡才能和深刻见解有极深的印象。" 在该文中陈省身首先把经典的"关联" 概念推广到同一个群 G 的两个齐性空间 $G/H, G/K$。设 $aH \in G/H, bK \in G/K$，若 $aH \cap bK \neq \varnothing$，则他称 aH 和 bK 是关联的。这个定义在 J. 蒂茨的厦(building) 理论中起重要作用。

在[论文 51]和[论文 87]中陈省身分别得到了 $\mathbf{R}^n$ 中两个子流形的基本运动学公式。陈省身的公式中用到了外尔的管体积公式中的积分不变量。设 T_ρ 是 $\mathbf{R}^n$ 中围绕 k 维子流形 X 的半径为 ρ 的管，则

$$V(T_\rho) = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant k \\ i\text{偶数}}} c_i\, \mu_i(X)\rho^{m+i},$$

其中 c_i 是依赖 $m = n - k$ 和 i 的常数，$\mu_i(X) = \int_M I_i(\Omega)$，$I_i$ 是某个 $\frac{i}{2}$ 次的、$O(n)$ 的李代数上的伴随不变多项式，Ω 是关于 X 上的诱导度量的曲率张量。陈省身的公式是(同时由 H. 费德雷尔独立发现)

$$\int \mu_e(M_1 \cap gM_2)\mathrm{d}g = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant e \\ i\text{偶数}}} c_i\, \mu_i(M_1)\mu_{e-i}(M_2),$$

其中 M_1、M_2 分别是 $\mathbf{R}^n$ 中的 p 维、q 维子流形，e 是偶数，$0 \leqslant e \leqslant p + q - n$，$c_i$ 是依赖于 n, p, q, e 的常数。

格里菲思在评论陈省身关于积分几何的工作时说："陈省身的证明显示了许多典型的特征。当然，一是用活动标架，……另一个特征是通过直接的计算，而非建立一个复杂的概念框架；事实上，仔细观察会发现，确实存在一个如[论文 19]所描述的框架，然而陈省身并未将它孤零零地提出来，而是让读者通过做一个不太简单的问题来理解它。"

欧氏微分几何

经典微分几何的一个主要课题是研究欧氏空间中子流形在刚体运动群作用下的

局部不变量，即子流形的等价问题。这在30年代已经解决了。实际上，子流形的第一、第二基本形式Ⅰ、Ⅱ，以及子流形的法丛上的诱导联络 ∇^{ν} 满足高斯、科达齐、里奇方程，且它们构成 $\mathbf{R}^n$ 中子流形的完全不变量组。具体地说，这些不变量是：

a) Ⅰ是在 M 上的诱导度量。

b) Ⅱ是 M 上在法丛 $\nu(M)$ 中取值的二次型，设 u 是在点 p 的单位切向量，v 是单位法向量，则 $\mathrm{II}_v(u) = \langle \mathrm{II}(u), v\rangle$ 是 M 与 u, v 所张平面相交而成的平面曲线 σ 在点 p 的曲率。

c) 若 s 是光滑法向量场，则 $\nabla^{\nu}(s)$ 是微分 ds 在法丛 $\nu(M)$ 上的正交投影。

$\mathrm{II}_v = \langle \mathrm{II}, v\rangle$ 称为沿 v 方向的第二基本形式，对应于 II_v 的自对偶算子 A_v 称为 M 沿 v 方向的形状算子。

陈省身在欧氏微分几何上的工作主要是研究子流形的整体几何与其局部不变量之间的关系。他在这方面写了多篇重要论文，因篇幅所限这里只提出下面两项：

(1) 极小曲面

因为 $\mathbf{R}^n$ 中子流形的面积的第一变分是第二基本形式的迹，所以当 $\mathrm{tr}(\mathrm{II}) = 0$ 时称 $\mathbf{R}^n$ 的子流形 M 为极小子流形。用 $Gr(2,n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中所有2维子空间形成的流形（称为格拉斯曼流形）。$\mathbf{R}^n$ 中曲面 M 的高斯映射 G 是从 M 到 $Gr(2,n)$ 的映射，它把点 $x \in M$ 映到 M 在 x 的切平面 $G(x)$。$Gr(2,n)$ 可以看成 $(n-1)$ 维复射影空间 $\mathbf{C}P^{n-1}$ 中由 $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ 确定的二次超曲面（把 $\mathbf{R}^n$ 中的2维平面 V 映为由 $e_1 + ie_2$ 张成的复直线，其中 (e_1, e_2) 是 V 的单位正交基底）。这样，$Gr(2,n)$ 有复结构。另一方面，$\mathbf{R}^n$ 中的有向曲面通过它的诱导黎曼度量有一个共形结构，因而也有一个复结构。陈省身在[论文82]中证明：$\mathbf{R}^n$ 中的曲面是极小的充分必要条件是其高斯映射 G 是反全纯的。此定理在 $n = 4$ 时由M.平尔所证，它是将极小曲面与奈望林纳、外尔、阿尔福斯的值分布理论联系起来的出发点。伯恩斯坦定理是极小曲面论的基本结果之一，它断言：在 $\mathbf{R}^3$ 中定义在整个 $\mathbf{R}^2$ 上的极小图 $z = f(x, y)$ 必是一张平面。注意到一个完整的图的高斯映射的像必落在半球面内，故R. 奥斯曼把伯恩斯坦定理推广为：若 $\mathbf{R}^3$ 中一个完备的极小曲面的高斯映射的像在球面上不是稠密的，则该极小曲面必为平面。陈省身在[论文82]中利用波莱尔的经典定理把伯恩斯坦-奥斯曼定理推广成 $\mathbf{R}^n$ 中非平面的极小曲面的高斯映像的密度定理，更细致的密度定理是在陈省身与奥斯曼的合作[论文89]中建立的。

根据卡拉比关于球面内极小曲面的工作，陈省身在[论文99]中对于子流形的密切空间作了一般性的叙述。他证明：若在空间型中给定一个极小曲面，则存在整数 m，使得 m 阶密切空间沿曲面是平行的；同时给出了完全局部不变量组及其关系。最后得到与卡拉比类似的结果：若 M 是常曲率为 c 的空间型内的极小球面，且它的高斯曲率是常数 K，则 $K = \dfrac{2c}{m(m+1)}$。

(2) 紧贴浸入和紧套浸入

在 1929 年，芬切尔证明：若 $\alpha(s)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一条简单闭曲线，s 是弧长参数，$k(s)$ 是其曲率函数，则

$$\int |k(s)| \mathrm{d}s \geqslant 2\pi,$$

且等式成立的充分必要条件是 α 为平面凸曲线。法雷和米尔诺证明，若 α 是打结的，则上述积分必不小于 4π。

在[论文 65]和[论文 69]中陈省身和拉肖夫将芬切尔定理推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的子流形。设 $f: M \to \mathbf{R}^n$ 是紧致 m 维流形 M 在 $\mathbf{R}^n$ 中的浸入，$\nu^1(M)$ 是 M 的单位法球丛，$\mathrm{d}\nu$ 为 $\nu^1(M)$ 上的体积元。设 $N: \nu^1(M) \to S^{n-1}$ 为法映射，即它把点 $x \in M$ 上的单位法向量 ν 映为从原点引出的、平行的单位向量 $N(\nu)$。$\mathrm{d}a$ 为 S^{n-1} 的体积元，则李普希茨-基灵曲率 G 由方程 $N^*(\mathrm{d}a) = G\mathrm{d}\nu$ 来定义，即 $G(\nu)$ 是 M 沿单位法向量 ν 的形状算子 A_ν 的行列式的绝对值。浸入 f 的绝对全曲率 $\tau(M,f)$ 是指 N 的像集的体积，即

$$\tau(M,f) = \frac{1}{c_{n-1}}\int_{\nu^1(M)} |\det(A_\nu)| \mathrm{d}\nu,$$

其中 c_{n-1} 是 S^{n-1} 的体积。

在[论文 65]中，陈省身和拉肖夫证明 $\tau(M,f) \geqslant 2$，且等式成立的充要条件是 M 为 $\mathbf{R}^n$ 中一个 $(m+1)$ 维仿射空间里的凸超曲面。在[论文 69]里，他们进一步得到：M 的贝蒂数之和是 $\tau(M,f)$ 的一个下界。

令 $\tau(M)$ 是 M 的所有浸入的绝对全曲率的下确界。如果浸入 $f: M \to \mathbf{R}^n$ 满足 $\tau(M,f) = \tau(M)$，则称 f 是紧贴的。紧贴浸入成为子流形几何重要的研究领域，近年来有许多有趣的发展。一个重要的发展是凯珀用莫尔斯理论重述紧贴性概念。紧致流形 M 的莫尔斯数 γ 是指 M 上非退化莫尔斯函数的临界点个数的下确界。凯珀证明 $\tau(M) = \gamma$，且子流形 M 在 $\mathbf{R}^n$ 中是紧贴的充要条件是非退化的高度函数恰有 γ 个临界点。另一个重要发展是班科夫和卡特-韦斯特引进的紧套浸入。$\mathbf{R}^n$ 中的子流形 M 称为紧套的，如果每个非退化的欧氏距离函数有 γ 个临界点，紧套浸入必是嵌入，并且是紧贴的。紧套性是保角变换下的不变性质。因此经过球极投影总是可以假定紧套子流形是在球面上的。平卡尔证明：$\mathbf{R}^n$ 中围绕子流形 M 的半径为 ε 的管状超曲面 M_ε 是紧套的充要条件是 M 为紧套的。由此可得两个结果：S^n 中紧套超曲面的平行超曲面仍是紧套的；研究紧套子流形只须研究紧套超曲面。因为李球群(把球面映为球面的切触变换群)是由保角变换和平移生成的，故紧套性在李球群下不变。注意到 S^n 中子流形 M 的管状超曲面 M_ε 是 S^n 的切球丛的切触流形的浸入勒让德子流形，故紧套性实际上可以对于 S^n 的单位切球丛的切触流形的勒让德子流形来定义。在[论文 146] 中陈省身和赛西尔把这个概念确切地叙述出来，并且引

进李球群几何中的一些微分几何概念。虽然已有许多紧贴及紧套的例子和结果，但是许多基本问题尚未解决。例如：哪些紧致流形可以紧贴或紧套地浸入到欧氏空间中去？哪些是李球群几何的完全不变量？等等。

广义的高斯-博内公式

几何学家通常把局部问题与整体问题划分得壁垒分明，且认为只有整体问题才更重要。而陈省身认为在几何学上似乎南辕北辙的两个方面的研究须同时进行。他觉得若不了解局部理论(即等价问题)则整体问题就无从下手，反过来找到了完全不变量组则整体问题的解决也快了。下面将简述陈省身对几何学的这种看法的形成过程，它既有趣又有启示性，而且涉及到他的最重要、最令人激奋的研究工作：给广义的高斯-博内公式一个内蕴证明，进而引入复向量丛的示性类，即现在所称的“陈示性类”，并给出陈示性类的一个漂亮的、用曲率张量写出的公式。示性类的局部性质是曲率，其整体性质基于映射的同伦性，两者交织便成为几何学的基本工具。

二维紧致流形上的高斯-博内公式当然是经典微分几何的一个高峰。霍普夫曾说：“推广此公式到高维紧致流形上去是几何学中极其重要而困难的问题。”此公式把紧致曲面 M 上的最基本的不变量——欧拉示性数 $\chi(M)$ 与曲面的微分几何的最基本不变量——高斯曲率 K 联系在一起：$\chi(M)=\frac{1}{2\pi}\int_M K\mathrm{d}A$。虽然该公式有好几个不同的证明，但是陈省身所给出的、用活动标架观点的新证明是极自然的，而且具有推广到高维情形的潜力。

要解释陈省身的证明，这里先讨论一般的 n 维黎曼空间上的活动标架，然后再考虑 $n=2$ 的特例。设 M 上有一个有向的黎曼结构，即一个 $SO(n)$-结构。因它的李代数 $L(SO(n))$ 由全体 n 阶反对称矩阵所组成，在单位正交切标架构成的 $SO(n)$-主丛 $F(M)$ 上有 n 个一次微分形式 (ω_i) 及列维-齐维塔联络形式 (ω_{ij}) $(\omega_{ij}=-\omega_{ji})$ 满足下列方程：$\mathrm{d}\omega_i=\sum\omega_{ij}\wedge\omega_j$。黎曼曲率张量在正交标架 (ω_i) 下的系数为 R_{ijkl}，即

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\,\omega_k\wedge\omega_l。$$

当 $n=2$ 时，$L(SO(2))$ 是一维李代数，$\omega_{11}=\omega_{22}=0$，$\omega_{12}=-\omega_{21}$，所以只有一个曲率方程 $\mathrm{d}\omega_{12}=-\Omega_{12}=-R_{1212}\omega_1\wedge\omega_2$。显然，在每个纤维 $\pi^{-1}(x)$ 上 R_{1212} 是常数，其值是 M 的高斯曲率 $K(x)$。设 (θ_1,θ_2) 是 M 上的单位正交余切标架，则 M 的面积元为 $\mathrm{d}A=-\theta_1\wedge\theta_2$，且

$$\pi^*(K\mathrm{d}A)=\mathrm{d}\omega_{12}。\qquad (*)$$

陈省身在[论文 139]中说：“公式(*)包含了曲面的全部局部几何，也可推演出整体

几何性质。仔细考虑过之后，容易看出（*）是高斯-博内公式的证明的要义，而且 n 维流形上的高斯-博内公式的证明也是从这个想法发展出来的。"陈省身看出：曲面上的二次微分式必是闭的，被 π 拉回到 $F(M)$ 仍然是闭的。但是除了 M 是环面的情形，KdA 绝不是恰当微分形式。然而（*）式表明它在 $F(M)$ 上是恰当的。这是（*）式的一个意想不到的性质。这种在 M 上非恰当的微分形式拉到 M 的主丛的全空间上成为恰当微分形式的现象称为"超度"，这个概念在陈省身的证明中起极重要的作用。

根据初等拓扑学，在闭黎曼流形 M 关于定点 p 的补集 M' 上存在光滑的单位向量场 e_1，这个向量场在 p 点的指标是 $\chi(M)$。令 e_2 是 M' 上与 e_1 正交的单位向量场，且 (e_1, e_2) 与 M 的定向一致。令 θ 是对偶标架场。因 $\pi\cdot\theta$ 是 M 上的恒同映射，故 $d(\theta^*(\omega_{12})) = \theta^*(d\omega_{12}) = KdA$，于是

$$\int_M KdA = \int_{M'} KdA = \int_{M'} d(\theta^*(\omega_{12}))。$$

令 M_ε 为 M 上去掉以 p 为心、以 ε 为半径的球所得的补集，$S_\varepsilon = \partial M_\varepsilon$，于是

$$\int_{M'} d(\theta^*(\omega_{12})) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon} d(\theta^*(\omega_{12})) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \theta^*(\omega_{12})。$$

设 x_k 为 M 在 p 点附近的坐标系，$(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ 为将自然标架正交化得到的正交标架场，命 $\alpha(x) = \angle(e_1(x), \hat{e}_1(x))$，则 e_1 在 p 点的指标等于 $\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon} d\alpha$。令 $\rho(\alpha) \in SO(2)$ 为 R^2 上转角为 α 的旋转矩阵，从 $\hat{\theta}$ 转换到 θ 的度规变换是 $g: U \to SO(2)$，$g(x) = \rho(\alpha(x))$，且 $\theta^*(\omega_{12}) = d\alpha + \hat{\theta}^*(\omega_{12})$。所以

$$\int_{S_\varepsilon} \theta^*(\omega_{12}) = \int_{S_\varepsilon} d\alpha + \int_{S_\varepsilon} \hat{\theta}^*(\omega_{12})。$$

由于第二项的被积函数是连续的，当 $\varepsilon \to 0$ 时该项趋于零；第一项正是所需的值。这就证明了高斯-博内公式。

现在我们考虑 n 维可定向黎曼流形，并且解释从 2 维高斯-博内公式发展出来的绝妙的结果。

如何用 M 的黎曼度量造出 M 上典型的微分式是一个基本问题。在其主丛的全空间 $F(M)$ 上这是很容易的，只要取曲率形式 Ω_{ij} 的多项式即可。但是由此造出的微分形式 Λ 不一定是 M 上的微分形式经过 π 拉回来的，即在 M 上不一定存在微分形式 λ，使得 $\Lambda = \pi^*\lambda$。

令 $\mathscr{R}$ 为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个变数 $\{X_{ij}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ 的多项式环；设 X 是 n 阶反对称矩阵，使它的第 (i,j) 个元素为 $X_{ij}(i < j)$。取 $g \in SO(n)$，则矩阵

$$\mathrm{ad}(g)X = gXg^{-1}$$

的第 (i,j) 个元素 $\sum_{k,l} g_{ik}X_{kl}g_{jl} \in \mathscr{R}$。若 $g \in SO(n), P \in \mathscr{R}$，命 $(\mathrm{ad}(g)P)(X) = P(\mathrm{ad}(g)X)$，这就定义了 $SO(n)$ 在 $\mathscr{R}$ 上的伴随作用。令 $\mathscr{R}^{\mathrm{ad}}$ 为 $\mathscr{R}$ 中在 $SO(n)$ 的伴随作用下的不变多项式构成的子环。

因曲率形式 Ω_{ij} 是二次微分形式，在外积下彼此是可换的，故当 $P \in \mathscr{R}$ 时，可用 Ω 代替 X。若 P 是 d 次齐次多项式，则 $P(\Omega)$ 是 $F(M)$ 上的 $2d$ 次外微分形式。

令 θ 为定义在邻域 $U \subset M$ 上的正交余标架场，即 θ: $U \to F(M)$ 是一个截面。令 $\Psi = \theta^*(\Omega)$，则 $\theta^*(P(\Omega)) = P(\theta^*(\Omega)) = P(\Psi)$。若 $\hat{\theta}$ 是由 θ 经过度规变换 g: $U \to SO(n)$ 得到的，则由前述可知 $\hat{\Psi} = \mathrm{ad}(g)\Phi, P(\hat{\Psi}_x) = P(\mathrm{ad}(g(x))\Psi_x) = (\mathrm{ad}(g(x))P)(\Psi_x)$，所以 $P(\Psi)$ 只是在 M 上局部可定义的，且与 θ 的选择有关。如果 $P \in \mathscr{R}^{\mathrm{ad}}$，则 $P(\Psi)$ 就成为在整个 M 上定义的微分形式，且与 θ 的选择无关，因此 $P(\Psi)$ 由等式 $\pi^*(P(\Psi)) = P(\Omega)$ 唯一确定。

将高斯-博内公式推广到高维情况的方法有很多，但是最自然、最合理的方式是对每个 n 维紧致黎曼流形给定一个相伴的 n 次微分式 λ，使得 $\int_M \lambda = c_n\chi(M)$，其中 c_n 是通用常数。若 n 是奇数，由庞加莱对偶定理可知 $\chi(M) = 0$，所以我们只考虑 $n = 2k$（但是奇维有边流形的公式是有趣的）。按上述讨论，我们应该找一个 k 次齐次伴随不变的多项式 P，取 $\lambda = P(\Psi)$。由 $SO(n)$ 的不变量理论，P 有一个自然的候选者，即满足条件 $[\mathrm{Pf}(X)]^2 = \det(X)$ 的唯一的伴随不变多项式 Pf（称为普法夫的）。陈省身首次看出高斯-博内公式的被积式是 Pf。在此之前，C. 艾伦多弗和芬切尔已各自证明了高维的高斯-博内公式，其被积式是一堆曲率张量的组合，而且证明是外蕴的，即假定 M 可以等距地浸入到欧氏空间（艾伦多弗及韦伊的证明只须假设 M 可局部等距浸入到欧氏空间即可，所以他们把高斯-博内公式推广到解析度量的情形）。然而陈省身在[论文 26] 中给出的是一个内蕴证明，是前面所介绍的曲面情形的证明的推广。

令 $S(M)$ 为 M 的切球丛，$\gamma: S(M) \to M$ 为自然投影。对 $F(M)$ 中任一元素 θ，令 $e_1(\theta)$ 代表 θ 的对偶标架的第一个向量，则 e_1 是从 $F(M)$ 到 $S(M)$ 的丛同态，且 $\pi = \gamma \cdot e_1$。命 $\lambda = \mathrm{Pf}(\Psi), \Lambda = \gamma^*(\lambda)$，则陈省身在[论文 26] 中首次证明了 Λ 的超度引理，即在 $S(M)$ 上找到一个 $(n-1)$ 次微分式 Θ，使得 $\mathrm{d}\Theta = \Lambda$，且给出 Θ 的一个显式表示。与曲面情形的做法类似，令 M' 为 M 上去掉一点 p 的补集，ξ 为 $S(M)$ 在 M' 上的光滑截面，则得

$$\mathrm{d}(\xi^*(\Theta)) = \lambda, \quad \int_M \lambda = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{S_\varepsilon} \xi^*(\Theta)。$$

因 Θ 是具体构造出来的，陈省身可以算出上面等式右端的值，它恰好是一个通用常

数乘以 M 的欧拉示性数。

通常，数学家对于给出旧定理的新证明的评价不及给出新定理来得高，然而[论文 26]却是例外。因为 n 维高斯-博内公式的早期证明几乎是条死胡同，而陈省身的内蕴证明却是进入示性类的秘门钥匙。

示性类

本文中一再出现的余标架丛 $F(M)$ 是 G-主丛的重要例子。主丛的定义和研究在 30 年代末已经开始，但是到 40 年代几何学家和拓扑学家才看清它的重要性，并进行全面的研究。到 40 年代末，完美的分类工作已经完成，并发展出一套丛上的"示性类"理论，示性类的观念的重要性在 20 世纪后半叶是无可言喻的。其实，分类问题是主丛的等价问题，而示性类是等价问题的不变量。为解释陈省身在这方面的贡献，我们先叙述一些背景材料。

G-主丛的理论与 G 的极大紧子群的主丛理论是相同的，故我们设 G 是紧李群。若仿紧空间 P 上有一个 G 的右作用，则称 P 为 G 空间。设 $g \in G$，R_g 表示 g 在 P 上的右作用给出的变换，即 $R_g(x) = xg$。若当 $g \neq e$ 时 R_g 在 P 上没有不动点，则称 G 在 P 上的作用是自由的。所谓 G-主丛是纤维化 $\pi: P \to X$，使得 P 是自由的 G 空间，且 X 是 P 的 G 轨道空间 P/G。所以 G-主丛在点 x 的纤维是一条 G 轨道。P 称为主丛的全空间，并常以 P 代表 G-主丛。若映射 $\sigma: X \to P$ 满足 $\pi \cdot \sigma = \mathrm{id}$，则称 σ 为 P 的一个截面。两个 G-主丛 $\pi_i: P_i \to X$ 称为等价的，如果存在 G-等变映射 $\varphi: P_1 \to P_2$，使得 $\pi_1 = \pi_2 \cdot \varphi$。若 $P = X \times G$，且 G 在 P 上的右作用定义为 $R_g(x, h) = (x, hg)$，$\pi(x, h) = x$，则称此 G-主丛为平凡丛。映射 $x \to (x, e)$ 显然是此平凡丛的截面。反之，若一个 G-主丛存在一个截面，则该主丛必是平凡的。令 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 表示 X 上的 G-主丛 P 的等价类 $[P]$ 构成的集合。

设 $\pi: P \to X$ 是一个 G-主丛，$f: Y \to X$ 是连续映射，用 $f^*(P)$ 表示由 f 生成的诱导丛，它的全空间 $= \{(p, y) \in P \times Y: \pi(p) = f(y)\}$。$G$ 的右作用定义为 $R_g(p, y) = (R_g(p), y)$。容易看出 f^* 把等价丛诱导为等价丛，所以 f^* 可看作从 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 到 $\mathrm{Bndl}_G(Y)$ 的映射。若 $\pi: P \to X$ 是 G-主丛，则 $\pi^*(P)$ 是 P 上的 G-主丛，称为 G-主丛 P 的"平方"。显然，映射 $p \to (p, p)$ 给出了 $\pi^*(P)$ 的一个截面，所以 $\pi^*(P)$ 是平凡丛。下面将说明这个简单的观察是藏在"超度"背后的秘密。

主丛理论的第一个重要事实是：给定映射 $f: Y \to X$，则映射 $f^*: \mathrm{Bndl}_G(X) \to \mathrm{Bndl}_G(Y)$ 只与 f 的同伦类 $[f]$ 有关。用范畴的语言来说就是：$\mathrm{Bndl}_G(\quad)$ 是拓扑空间与映射同伦类的范畴到集的范畴的反变函子。上同调群 $H^*(\quad)$ 也是一个反变函子。示性类则是从 $\mathrm{Bndl}_G(\quad)$ 到 $H^*(\quad)$ 的一个自然的变换。当然这种花巧的语言并非是必须的。直接地说，所谓示性类 c 是一个函数，它对任意一个空间 X 上的每一个 G-主丛 P 都指定了 $H^*(X)$ 中的一个元素 $c(P)$，并且对于任意一个连续映

射 $f: Y \to X$ 满足 $c(f^*(P)) = f^*(c(P))$。用 Char(G) 表示所有 G-主丛的示性类构成的集合。因为 $H^*(X)$ 是一个环,故 Char(G) 也是一个环。示性类的主要问题是确切地了解这个环。平凡 G-主丛可以看成由一个常值映射诱导出来的,所以它的所有示性类为零(除了单位元示性类)。一般说来,所有示性类都相等是 G-主丛等价的必要条件。

G-主丛 $\hat{\pi}: \hat{P} \to Z$ 称为通用G-主丛,如果任意给定 X 上的 G-主丛P,必有唯一的映射 $f: X \to Z$ 的同伦类$[f]$,使得$[f^*(\hat{P})] = [P]$。意想不到的是这种通用 G-主丛是存在的,并且有多种构造方法。若取 $U_G \to B_G$ 为一个通用G-主丛,用$[X, B_G]$ 表示从 X 到B_G 的映射同伦类的集合,则 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 可以与$[X, B_G]$ 等同,因此 B_G 称为G 的分类空间,此外,$\mathscr{U}_G$ 的全空间是可缩的,B_G 的同伦型不依赖于通用丛的取法。若 $\pi: P \to X$ 是一个 G-主丛,则存在映射 $h: X \to B_G$,使得$[h^*(\mathscr{U}_G)] = [P]$,且$[h]$ 是唯一的,映射 h 称为分类映射。

现在可以容易地给出示性类问题的解,即 $\mathrm{Char}(G) = H^*(B_G)$,且若 $c \in H^*(B_G)$,则 $c(P) = f^*(c)$,其中 f 是P 的分类映射。

以上是从 1935 年到 1950 年间主丛发展的要点,主要贡献者包括陈省身、埃雷斯曼、霍普夫、费尔德堡、庞特里亚金、斯廷罗德、斯蒂弗尔及惠特尼。上述理论虽然简单优美,但太抽象,在真要写出 Char(G)时并不是真有用的。同时对于由几何问题产生的主丛的示性类计算也用不上,因为找分类映射并非易事。下面我们要讨论陈省身如何建立具体的分类空间,更重要的是如何用主丛上联络的曲率计算示性类的微分形式代表。

令 $V(n, N+n)$ 代表斯蒂弗尔流形,即 $\mathbf{R}^{N+n}$ 中所有正交n-标架$e = (e_1, \cdots, e_n)$ 的空间。$V(n, N+n)$ 是自由的 $O(n)$ 空间,在 e 的轨道是由$e_1, \cdots, e_n$ 所张的子空间上所有的正交基,所以轨道空间正是格拉斯曼流形 $Gr(n, N+n)$。投影 $\pi: V(n, N+n) \to Gr(n, N+n)$ 是 $O(n)$-主丛。在 40 年代初期,斯廷罗德和惠特尼已证明:若 $N \geqslant k+1$,则此主丛是所有维数 $\leqslant k$ 的紧多面体上$O(n)$-主丛的通用主丛。在[论文 46] 陈省身与孙以丰将此结果推广到 k 维紧拓扑空间。若要得到 $B_{O(n)}$ 只要取归纳极限 $\pi: V(n, \infty) \to Gr(n, \infty)$ 即可。将实数换为复数或四元数体,他们也对 $U(n)$-主丛和 $Sp(n)$ 主丛证明了类似的结果。若 G 是任一紧群,则取正交表示 $G \to O(n)$,于是 $V(n, N+n)$ 成为自由 G 空间,$V(n, N+n)/G$ 是维数 $\leqslant k$ 的紧致拓扑空间的通用 G-主丛。

格拉斯曼流形是做分类空间的好模型,因为它的上同调群已用代数的或几何的方法算出了。因而陈省身知道在 Char ($SO(n)$) 中有一个欧拉类 e。若 M 是 n 维紧致流形时,则 $e(F(M))$ 作为 $H^n(M)$ 中的元素作用在基本类 M 上时便得到 $\chi(M)$。高斯-博内公式可以解释为:$\lambda = \mathrm{Pf}(\Psi)$ 是 $e(F(M))$ 作为德·拉姆上同调类的代表。这

也启发陈省身去寻找一般示性类的微分形式代表。此时正是 1944 ~ 1945 年陈省身在普林斯顿的时期，他的朋友韦伊鼓励他，并且经常与他讨论此问题。

寻找 $SO(n)$ 示性类的微分形式代表看上去似乎是一个自然的问题，然而陈省身看清楚实格拉斯曼流形的上同调群非常复杂，而且有 $\mathbf{Z}_2$ 挠群，而此挠群用微分形式表达不出来；另外，陈省身从埃雷斯曼的博士论文知道复格拉斯曼流形没有挠群，且舒伯特胞腔是以整数 $\mathbf{Z}$ 为系数的同调群的基；所以根据德·拉姆定理，所有 $B_{U(n)}$ 的示性类可以由闭微分形式为代表。但要算某个 $U(n)$-主丛 P 的示性类仍须知道 P 的分类映射，所以在实用上必须有一种从几何数据计算示性类的方法。下面将介绍陈省身的优美算法。

设 $\pi: P \to M$ 为流形 M 上的 $U(n)$-主丛。P 上的联络是在 $L(U(n))$ 中取值的一次微分式 ω，故 ω 的元素是复数值一次微分式 ω_{ij}，且 $\omega_{ij} = -\overline{\omega_{ji}}$。设曲率形式为 $\Omega = (\Omega_{ij})$，则也有 $\Omega_{ij} = -\overline{\Omega_{ji}}$。

设 $\mathscr{R}^{\mathrm{ad}}$ 是 $L(U(n))$ 上的伴随不变多项式的集合，若 $Q \in \mathscr{R}^{\mathrm{ad}}$，则 $Q(\Omega)$ 是由 M 上的唯一的一个微分形式 $Q(\Psi)$ 诱导而来的。陈省身用比安基恒等式证明 $Q(\Psi)$ 是闭的，故 $[Q(\Psi)] \in H^*(M)$。令 ω' 为 P 上另一个联络，Ω' 是曲率形式，则得 M 上另一个微分形式 $Q(\Psi')$ 使得 $\pi^*(Q(\Psi')) = Q(\Omega')$。根据韦伊的一个引理，$Q(\Psi')$ 与 $Q(\Psi)$ 只差一个恰当微分式，所以 $\hat{Q}(P) = [Q(\Psi)] = [Q(\Psi')]$ 是 M 上同一个上同调类，它与联络的取法无关，是一个示性类。

令 $h: M' \to M$ 是光滑映射，P 是 M 上的 $U(n)$-主丛，ω 是 P 上的联络，则 P，ω 及其曲率 Ω 均可经 h 自然地诱导到 M' 上。所以 $Q(h^*(P)) = h^*(Q(P))$，Q 映至 $\hat{Q}$ 是由 $\mathscr{R}^{\mathrm{ad}}$ 到 $\mathrm{Char}(U(n))$ 的环同态。因为韦伊的引理，陈省身称此为韦伊同态，但是一般称它为陈-韦伊同态。

$L(U(n))$ 上的伴随不变多项式环 $\mathscr{R}^{\mathrm{ad}}$ 可以简单地写出来。令 z 为反埃尔米特 n 阶矩阵，$\sigma_k(z)$ 是 $\det(z + tI)$ 中 t^{n-k} 的系数，则 $\sigma_k(z) \in \mathscr{R}^{\mathrm{ad}}$。实际上，$\sigma_k(z)$ 只是 z 的特征值的 k 次对称函数，例如 $\sigma_1(z) = \mathrm{tr}(z)$，$\sigma_n(z) = \det(z)$。若 $P(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbf{C}[t_1, \cdots, t_n]$（即变量 $t_1, \cdots, t_n$ 的复系数多项式环），则 $P(\sigma_1(z, \cdots, \sigma_n(z)) \in \mathscr{R}^{\mathrm{ad}}$，且映射 $P(t_1, \cdots, t_n) \to P(\sigma_1(z), \cdots, \sigma_n(z))$ 是从 $\mathbf{C}[t_1, \cdots, t_n]$ 到 $\mathscr{R}^{ad}$ 的环同构。再引用埃雷斯曼关于格拉斯曼流形的同调群的结果，陈省身看出陈-韦伊同态是同构。令 $r_k(z) = \sigma_k\left(\frac{1}{2\pi} z\right)$，则对应的示性类 $c_k = \hat{r}_k$ 就是第 k 个陈示性类，且 $\mathrm{Char}(U(n))$ 是由 $c_1, \cdots, c_n$ 生成的多项式环。

令 $F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} F_r(z)$ 是形式幂级数，其中 F_r 是 r 次齐次多项式。在有限维空间上，当 r 很大时示性类 $\hat{E}_r$ 为零，所以 $\hat{E}$ 是一示性类。希策布鲁赫用形式幂级数定出许多示性类，陈省身用 $E(z) = \mathrm{trace}\left(\exp\left(\frac{1}{2\pi} z\right)\right)$ 定义陈特征 $\mathrm{ch} = \hat{E}$。它在阿蒂亚-辛

格指标定理中起重要作用。

陈省身也将上面关于 $U(n)$ -主丛的示性类的结果推广到一般的紧致李群。$\mathscr{R}^{ad}$仍与以复数为系数的 Char(G)同构。但一般说来,B_G 有挠群,故可能存在不能用微分形式表示的示性类。

在此后近 20 年陈省身未做示性类方面的研究,但在 1974 年他与西蒙斯写了一篇在示性类方面极重要的文章[论文 106]。该文对于主丛上的"超度"现象做了一个详尽的研究。令 $\pi: P \to M$ 为 G -主丛,ω,Ω 如前所述。令 Q 是 $L(G)$ 上 l 次齐次的伴随不变的多项式,则存在唯一的、定义在 M 上的 $2l$ 次闭微分式 $Q(\Psi)$,使得 $\pi^*(Q(\Psi)) = Q(\Omega)$,并且它是同调类 $\hat{Q}(P) \in H^{2l}(M)$ 的代表。由于 $[Q(\Omega)] = [\pi^*(Q(\Psi))] = [Q(\pi^*(\Psi))] = \Psi(\pi^*(P))$,且前面已说明 P 的平方 $\pi^*(P)$ 是平凡的,故它的示性类必为零,因此 $\hat{Q}(\pi^*(P)) = 0$,$Q(\Omega)$ 是恰当的。然后他们用 Ω,ω 确切地写出 P 上的一个 $(2l-1)$ 次微分形式 $TQ(\omega)$,使得 $\mathrm{d}TQ(\omega) = Q(\Omega)$。$TQ(\omega)$ 在丛及联络的诱导下是自然的(即 $TQ(f^*\omega) = f^*(TQ(\omega))$ 等)。设 $2l > n$,则 $Q(\Omega) = 0$,故 $TQ(\omega)$ 是闭的,$[TQ(\omega)]$ 是 $H^{2l-1}(P)$ 中的一个元素。当 $2l > n+1$ 时,他们证明$[TQ(\omega)]$与 ω 的选择无关,称为从属示性类(the secondary characteristic classes)。而且当 $2l = n+1$ 时,他们证明$[TQ(\omega)]$确实与联络 ω 有关。

令 $G = GL(n)$,设 Q_k 是 $\det(X + tI) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(X)t^{n-i}$ 中定义的伴随不变多项式。取 $Q = Q_{2k-1}$,设 P 是M 上的切标架丛,ω 是黎曼结构的列维-齐维塔联络,他们证明$[TQ(\omega)]$属于 $h^*(P)$,并且它与黎曼度量的取法有关,而在黎曼度量的保形变换下是不变的。这是一个惊人的结果。这个不变量近来在物理学共形量子场论的表述中要用到。

另外,陈省身与博特合作的论文[95]中讨论了 n 维复流形 X 上的全纯埃尔米特向量丛E 的示性类及其超度。复流形上的微分形式有两种微分算子$\partial,\bar{\partial}$。他们证明了埃尔米特结构的陈示性式 $c_n(E)$关于算子 $\mathrm{i}\partial\bar{\partial}$的超度公式。这个工作被用于复几何,特别是全纯截面的零点的研究。这个理论与代数数论有密切关系,J.M. 比斯穆特,H. 吉勒特和 C. 索尔有重要的发挥。

陈省身是享誉世界的数学家,尤其是在微分几何学及拓扑学方面做出了非常杰出的重要贡献。他被公认为 20 世纪后半叶杰出的几何学家。正如 20 世纪前半叶的几何学带有 E. 嘉当的消除不掉的印记一样,在过去 50 年中所描绘的几何学留下了陈省身的硕大的印章。除了他的科学成就赢得的崇敬和赞誉之外,无数的同事、学生和朋友对他怀有深厚的感情和敬意。这反映了他的人生的另一个方面——陈省身总是对他人显示友谊、热情和关怀,他始终如一地像致力于自己的研究工作那样来帮助年轻的数学家充分发展他们的潜能。

79. R. 奥斯曼：几何学在美国的复兴：1938～1988

原文题为《The geometry renaissance in America：1938～1988》，载于《A Century of Mathematics in America：Part 2》，Peter Duren 主编，1989 年。张奠宙译。

弗里曼·戴森 1972 年曾在美国数学会作题为《失去的机会》的吉布斯演讲，1981 年在洪堡基金会又作《不很时尚的追求》的演讲。他在演讲中，极力主张要跳出狭隘的视野，不要钻在"风行一时"领域内进行探究。回想我做研究生的时候，倒不觉得区别一个学科是否"时髦"有什么麻烦。可是，我如果在那时听到"时髦"的领域就简单地等于重要的、令人醉心的领域，那一定会使我惊讶万分。肯定地说，布尔巴基在那时是非常时髦的。另外，只要是用"代数"加以形容的拓扑、几何、或分析，也都会身价倍增。在时髦光谱的另一端，有些学科如偏微分方程、单复变函数论等，则早已被宣布"死亡"多时，于是连找一些送葬者都很难了。

比这两个学科更糟，一个越出常规的学科是微分几何。它根本不在选修的范围内。不管怎样，偏微分方程或单复变函数论方向上还有一些活跃的研究者在大学教书，学生跟着他们总能写出一篇博士论文。但我怀疑，在 30 年代到 50 年代的 20 年中，哈佛大学是否有过微分几何方向上的博士论文。当我在这所大学读书的 5 年间，记得只有一次开过微分几何。那是由阿尔福斯主讲的一门极好的课程，尽管该课并不是为了做研究而设计的。阿尔福斯自己的研究工作充满了深刻几何观念。然而，他不是一位几何学家，并不打算为这一领域做贡献。他所做的只是使微分几何在函数论的各个部分得到辉煌的应用。一个简单而突出的例子是他关于施瓦兹引理的推广。皮克把施瓦兹引理的几何内涵抽象出来，并将它解释为庞加莱距离意义下一个关于弧长的命题。阿尔福斯则表明，在某些曲率约束条件下，对许多距离都可以应用这一结果。与此同时，阿尔福斯揭露了这一引理的偏微分方程特征，使它在某种程度上摆脱了几何的束缚。这一方法的普遍性，可以将结果推广到高维情形，以及适用于许多不同的映射类。同样，阿尔福斯的各种几何方法使得奈望林纳理论有可能不断地向高维推广。但是，再说一遍，阿尔福斯原本并非几何

学家,他的学生也没有写过微分几何的博士论文。

一般说来,其他学术研究中心,如在普林斯顿和芝加哥,情况也和哈佛差不多。在普林斯顿大学,艾森哈特于1933年起出任教务长。从1938年到他1945年退休,他只发表过两本导论式的教科书。维布伦的兴趣非常广泛。有一段时间他集中于研究微分几何。那是在1920年代,当J.H.C.怀特海和T.Y.托马斯成为他的研究生的时候。然而,维布伦从1932年起到普林斯顿高级研究所去了,直到1950年退休。在这段时间里,没有年轻几何学家要来取代艾森哈特和维布伦。还有一个几何活动的轨迹来自博赫纳。如同阿尔福斯一样,博赫纳原本也是一位分析学家。不过博赫纳在1940年代后期曾开始积极地从事几何学研究,并做出了重要贡献。他指导的博士学生中有劳赫(Rauch,1947)和卡拉比(Carabi, 1950)。不过劳赫的博士论文是分析学方面的。他在微分几何上的开创性工作——劳赫比较定理,并且用于证明"一个曲率接近于球曲率的紧流形必和球同胚"——是在苏黎世做博士后的时候完成的。在那里,显然是H.霍普夫提出了这个问题。

如同艾森哈特在普林斯顿,还有斯图伊克在MIT,莱恩在芝加哥,前辈几何学家在1940年代没有做什么可以影响未来几何学课程的研究工作。

在美国数学会成立50周年的一份出版物中,G.D.伯克霍夫的文章"美国数学50年"这样描写1938年的情景:

"必须承认……我们的年轻人很少从事代数或经典微分几何的研究,或者在50年前曾经非常活跃的任何其他几何学问题。"

毫无疑问,活跃在二三十年代能够深刻影响未来几何学课程的人物在欧洲。第一流的超前的(现在回想起来)是法国的E.嘉当。在瑞士有H.霍普夫。他原本是拓扑学家,但对几何学有很大影响。德国维持着很强的几何学传统,那时的领导人是布拉施克。在美国,简直没有人能与他们相比拟。

当我说"没人可相比",是指和嘉当、布拉施克那样自认为是(别人也这么看)微分几何学家的人相比。如果把眼光放宽一些看,那么人们还觉得应该包括这样的主要人物,如研究大范围变分学的莫尔斯,微分流形和球丛的创立者惠特尼,以及1932年菲尔兹奖获得者道格拉斯。道格拉斯的得奖工作——解决普拉托问题——虽然看上去是分析学的课题,却有一定的几何学成分。至于莫尔斯,用"莫尔斯理论"研究黎曼流形上的测地线,肯定是对微分几何的重大贡献。

在普林斯顿高级研究所,还有H.外尔。1938年,他在普林斯顿数学俱乐部听了统计学家H.霍特林的一次演讲之后,于几何学史的一条精彩的注记中,提出了经典的高斯-博内公式与其一般形式间的一个关键的联结。为了分析一个统计问题,霍特林想建立欧氏空间或球面上一个管状域的体积公式。外尔对问题的处理方法,直接通向C.艾伦多弗和陈省身的论文,以及后来关于子流形和积分几何的工作。

当我们寻找这些核心的美国几何学家(他们的定理我们常常在引用)时发现他们分散在各地并且孤立的存在着。艾伦多弗在哈佛福德学院，索姆·迈尔斯在密歇根大学。还有 J.L. 辛格先生在多伦多大学，1940 年代后期在俄亥俄大学与卡内基理工学院。塔吊几何学工作在 1920 年代很出名，后来更多地转向应用。在第二次世界大战期间，辛格和艾伦多弗及其他许多数学家一样，推迟了自己的研究工作，转向为战争直接出力。另外一位独特的人物是 H. 布思曼。他于 1940 年代呆在伊利诺斯理工学院和南加州大学，提出了不可微情形下的一些漂亮的几何理论。

如果我们想撇开一般的布尔巴基潮流，来解释为什么微分几何在 1940 年代那么不时髦，那就至少部分地要归因于 1930 年代的各个主要研究机构所研究的几何学类型。格劳斯坦在哈佛，艾森哈特在普林斯顿，莱恩在芝加哥，都没有去证明那些注定对后世会有影响、能够引起回忆的那些定理。进一步说，在一个基础性工作(包括列维-齐维塔在世纪之交的工作)的高潮之后，几何学作为一个整体似乎离开了数学的主流。有一种没落的"沉湎于玩弄上下标"的风气，掩盖了或者取代了几何内容。进一步说，几何学确给人一种和其他数学领域格格不入的感觉。

从一系列的进展可以看到这样的转折，先是恢复和其他数学学科的联系，然后逐渐地把几何学推向舞台的中央。

首先，也许是最重要的进展来自大范围理论，使几何学和拓扑学相联系。前面已经提到过的艾伦多弗，迈尔斯，以及辛格的工作，几乎都和霍普夫、科-福桑、普雷斯曼以及布拉施克的许多工作的方向相同。一个高峰则是陈省身的一般高斯-博内公式的证明和特征类的工作。此外的几何学-拓扑学联系来自 1940 年博赫纳的"消没定理"，后来经小平邦彦的工作对代数几何发生了重大影响。然后是 1950 年代劳赫的比较定理，以及由此产生一系列结果，特别是伯热和克林根伯格的一些球面定理。在李群及其商群——齐次空间和对称空间——的工作中，出现了拓扑学和代数学的成分，其中的大多数工作起源于嘉当的基础性工作。1958 年，博特和萨梅尔森给莫尔斯的 65 岁生日献上了一份特别合适的礼物，那就是把莫尔斯理论漂亮地用于对称空间的研究。像博特、萨梅尔森和米尔诺原本是拓扑学家，但怀有强烈的几何兴趣。

几何学和拓扑学的联系，是霍普夫访问美国时所作的两个系列演讲的中心话题。第一个是 1946 年在纽约大学，第二个则是 1956 年在斯坦福大学。两个演讲都写成了非正式的讲义。斯坦福演讲涉及曲面的大范围理论，出现了好几种"版本"，作为非公开出版的典籍流传了多年，成为许多人学习大范围微分几何的入门书。1983 年，当斯普林格出版社为《数学讲义》(Lecture Notes of Mathematics)第 1000 号寻找具有特别意义的内容时，这本斯坦福讲义连同纽约讲义一起终于正式出版了。

但是，就美国几何学复兴的一个决定性因素而言，我认为是陈省身于 1940 年代末从中国移居美国。

陈省身在中国开始学习和研究。1934到1936年他去汉堡随布拉施克工作，并于1936年获得博士学位。然后在巴黎化了一年的时间追随E.嘉当学习，随即在1937年返回中国。在那里他一直呆到1948年。其中有两年时间，1943～1945年，是在普林斯顿高级研究所度过的。在这两年中，他作了最重要的工作，包括高斯-博内公式的内蕴证明，以及关于特征类的基础性论文。这在前面已经提到过。

1949年，陈省身加入芝加哥大学数学系。以1953年野水克己获得博士学位开始，在那里培养出美国历史上一大批高质量的几何学博士。但是陈省身的影响远不止此。通过I.M.辛格影响到马萨诸塞理工学院(MIT)。辛格曾是芝加哥大学的学生，但并非几何学家。他听过陈省身的课，后来在MIT开设了自己的几何课程。辛格在那里招募了好些几何学的信徒，其中包括阿姆布罗斯和奥尼尔，他们原来都不是搞几何的。A.韦伊通过和陈省身的交往对特征类作出了贡献。在1950年代，陈省身和斯潘涅、凯珀、哈特曼、温特、拉肖夫、希策布鲁赫和塞尔联合发表文章。这些合作加速了我先前提到的演讲：微分几何逐步和周边数学分支的整合——代数拓扑、代数几何和偏微分方程。

正在这一时期，一个有点反常但并非毫无意义的转折和复兴的特征是记号大战。对向量、张量、和形式的经典坐标记法大家都不大满意。它只对曲面有效，仅涉及很少指标的操作，而且还存在一种可以得到很大简化的坐标系。但是在高维情形，记号本身可能成为处理集合问题的障碍。嘉当引进的活动标架法，可以说是一个完美的工具。陈省身一心一意地采用和推动这套方法，充分利用它的灵巧和优越性，例如在从流形到标架丛和切丛来回移动时，只要用一些轻微的操作手段，便能在两种结构里使用相同的“ω_{ij}”。

但是，嘉当记法本身仍有不足：没有从根本上消除指标记号的运用。它仍要依赖任意选择的局部标架场，然后基于选择的坐标架建立表达式，并探究在标架场变换之下的几何性态。最后，它的一个长处(便于处理协变导数的外导数的计算)也带来负面影响，这就是远离一些基本的几何。那些颇受非议的梯度、旋度和散度等老式术语被许多人认为过时了：因为它们不过是某些阶的外导数的特例而已。然而，它们有，而且一直有着明白的几何意义和物理解释的优点。在某种意义上说，正是基于这层考虑，科斯居尔发明了一种新的记号，并由野水克己于1950年代首次公开介绍出来。其基本运算是向量场对已知的在某一点的切向量的协变导数。这一记法完全不依赖局部坐标和标架场，和指标无关，因而很快被许多几何学家所采用。然而，这套记法也有弱点，包括对某一类的计算很麻烦，这就是说，这一记号大战不像早先的记号争论，如莱布尼茨的微积分记号赢得了对牛顿记号的全面胜利，而是继续并存。正如人们必须学习两种现代语言和一种死语言那样，一个想作研究的几何学家，必须学习两种记号系统(嘉当的和科斯居尔的)，以及一种死去的(坐标)记法以便阅读20世纪初的论文和书籍。有必要补充说明的是，这并不

是单纯的记号的问题，因为它们影响到定理的内容：证明某一类标架场的存在，并不等于证明某个局部坐标的存在。

在结束 50 年代的叙述之前，我应当提到似乎孤立但却十分重要的结果，其意义远远超出直接的影响范围，那就是纳什的嵌入定理。他第一次告诉我们，黎曼流形类和欧几里得空间中具有诱导尺度的子流形是相同的。其证明是一个独具匠心的杰作，简直是神来之笔。

随着 1960 年代陈省身一家从芝加哥搬到伯克利，那里渐渐成为几何活动的聚焦中心。这一年代的末尾，出现了一批新世代的几何学家，其中有伯克利的 A. 温斯坦、普林斯顿的齐杰以及斯坦福的劳森。在此期间，对这门学科有纪念碑式有力推动是出版了新一代的书籍。这些著作以新的观点进行叙述，并采用新的记号。它们立即取代了艾森哈特时期的老式经典著作。这些著作包括黑加尔松、小林昭七与野水克己、比肖普、克里唐登以及斯腾伯格等人写的一批硬封面书籍，还有同等重要的由希克斯、伯热、格罗摩尔-克林根伯格-迈尔斯的软封面的讲义，以及米尔诺关于莫尔斯理论的讲义。狂热撰写的十年，在 1970 年 7 月 6 日凌晨 3 点半有了合适的终点：斯皮瓦克写完了《微分几何综合引论》第二卷的前言。在这本出色的著作中，斯皮瓦克带领读者从 18 世纪微分几何的开端，经过高斯和黎曼的基础性论文，比安基和里奇的贡献，以及进入到由列维-齐维塔、嘉当、埃雷斯曼、科斯居尔以及其他许多人提出的各种各样的“联络”概念。在这个过程中，他给出了一个微分几何定理在各种记号下不变的构造性证明(这一定理是：具有零曲率张量的黎曼流形局部等价于欧氏空间，称之为“检验案例”)，用 7 种不同的观点和记法，提供了 7 种不同的证明。

大量新书的出版无疑地使学生更容易接近微分几何，并产生兴趣。不过，使这门学科更健康成长的是在研究前沿的令人振奋的成功。最值得庆幸的是阿蒂亚-辛格指标定理，那是分析学、拓扑学、和几何学的巨大综合。特别地，它可以用新的观点观察高斯-博内公式：它不是一个孤立的结果，而是一个更大情景中的一个例证。

另外的论文，在结果上也许并不怎么特别，其重要在于创新性本质，为一些新的研究领域奠定了基础。其中有：

1. 费德雷尔和弗莱明于 1960 年发表的关于正规流和积分流的论文，结果创立了集合测度论，并导致费雷德尔的有关此课题的著作。

2. 伊尔斯和桑普森 1964 年关于黎曼流形的调和映照的论文。尽管调和映照的概念不是新的，但这篇论文是这个领域未来研究的起始点。

3. 帕莱斯和斯梅尔 1964 年关于广义的莫尔斯理论的论文，以及两作者差不多同时分别发表的论文，还有伊尔斯早先的论文，为无限维流形的研究打下了基础。兰写了关于微分流形的书，用了相似的观点，也是有影响的。这门学科被称为“大范

围分析”，并在70年代找到了重大的应用。

4. 小林昭七1967年的论文引进了复流形一种不变的伪距离。不像在建立集合测度论和大范围分析时使用了精致的技巧，这里的基本概念十分初等，看上去似乎朴实无华，有点像余边界的概念。然而，它的内涵却十分丰富，后来竟发现和丢番图分析有关。这在兰关于复双曲几何的书中有描述。

5. 也在1967年，麦金和辛格有关于曲率和拉普拉斯算子特征值关系的论文。这对后来该方向的研究起了重要作用。

6. 莫斯托夫的刚性定理。这是整个“拓扑决定几何”系列研究的开端。其证明使用了格林的有关高维拟似共形映照的基本结果。

7. 也是在1968年，西蒙斯有关于黎曼流形最小簇的基础性研究。这是该领域第一篇重要的具有一般性的文献。由此，极小曲面的研究领域从微分几何的边缘进入中心地带。在这篇论文中有许多有趣的结果，但最值得注意的是伯恩斯坦定理：如果$\mathbf{R}^{N+1}$中的一个N维极小超曲面S可以一一投影到(onto)一个超平面，那么S本身就是一个超平面。”西蒙斯将他的论文和用几何测度的进展结合起来，对$N \leqslant 7$时的伯恩斯坦定理作了证明。第二年，即1969年，邦别里、德乔奇和朱斯蒂以惊人方式结束了这个故事：伯恩斯坦定理对$N > 7$是不成立的。也许唯一与此可以相比的依赖维数的不连续性结果，来自微分拓扑中的事实：10年前米尔诺发现的7维怪球。曾经有许多尝试想把这两者加以沟通，但令人完全信服的还没有。

无需多说，确实有许多微分几何的工作比我在这里提到的样例更重要。有些老问题被解决了，如布拉施克猜想由格林(Leon Green)于1963年解决，正向弯曲完备流形的拓扑结构由格罗摩尔和迈耶完成。与此同时，开创了一些新领域，提出了一些新型的问题。

到了1970年代，微分几何领域真是花团锦簇。在许多大学，特别是在伯克利、纽约州立大学(石溪)、宾夕伐尼亚大学，不是孤立的一两个人，而是整个的几何学家群体，首次出现了。要想开始描述这些新成就的景观是很难的。不过，这十年无疑应从瑟斯顿和丘成桐在伯克利做研究生工作开始。瑟斯顿在普林斯顿继续研究壮观的双曲几何研究，而丘成桐则去了斯坦福大学，在那里的成就包括卡拉比猜想的解决，史密斯猜想的部分解决(与米克斯合作，那是劳森在伯克利的学生)，以及相对论中的正质量猜想(与舍恩合作，那是丘成桐和L·西蒙斯在伯克利共同的学生)。到了1980年代，数学界终于要想首次为微分几何颁发菲尔兹奖章了，不止一个，而是两个：瑟斯顿和丘成桐。

格罗莫夫从1974年至1980年在纽约州立大学(石溪)工作，是美国几何学在70年代得以提升的另一个重要原因。在这段期间，他写的一系列基础性论文研究了几乎平坦流形，以及在某些曲率和体积的约束条件下流形的拓扑类型的界限。此外他的工作还包括各种各样的课题，如等周不等式、光滑遍历理论和标量曲率

（与劳森合作）。1980年，他和丘成桐分享美国数学会颁发的维布伦奖，全称是“奥斯瓦尔德·维布伦几何学奖”。它建立于维布伦去世的1960年。前面的7个获奖者都是搞拓扑学的，直到1976年西蒙斯和瑟斯顿的几何学工作被认为值得获奖时为止。

（下略）

80. P.唐布罗斯基：微分几何学 100 年

原文题目为《*Differentialgeometrie*》，载于德国数学会成立 100 周年文集《Ein Jahrhundert Mathematik 1890 ~ 1990》，1990 年。这里仅登载其中引言部分。由沈纯理译，王善平校。

（Ⅰ）在过去 100 年里，微分几何开拓出了相当多的研究领域并且有大量的文献发表。以至于要想（在仅 40 来页的篇幅中）对它的重要成果或发展作一个大致完整的概括，结果只能是一些不加说明的关键词、人名和出版物的罗列。但是对于专家们或对于一个有所准备的"好奇者"来说，他们花些时间来研读这样的文章决不会一无所获，他们会为自己描绘出微分几何学（或者其中某一分支）的图景来。

（Ⅱ）首先是教材。它们部分地为微分几何学提供了出色的概述。比安基（1889）的书[7]系统描述了截至 1890 年左右的微分几何学的发展，它当时是学生学习该学科的教材。达布（1887 ~ 1896）的四卷本关于曲面论的著作[23]，尽管主题比较专门，但叙述深入细致。布拉施克（1945）的书[9]介绍了直到 1940 年为止的曲线与曲面的微分几何学。在此之前，E.嘉当（1928）关于黎曼几何学的书[14]早已成为"经典之作"。小林昭七与野水克己（1963/1969）的著作[44]介绍了 n 维流形及其子流形的微分几何学（特别是关于主丛和配丛上的"联络"）直到 1963 年前的研究结果，书中还附有大量详细而全面的文献目录。另外在格罗摩尔、克林根伯格和迈耶（1968）编写的书《大范围黎曼几何》[30]中，其绪论部分也提供了大量的资料。陈邦彦（1973）的书[17]专门研究了子流形几何学。奥尼尔（1983）的书[52]专门介绍了洛伦兹流形的现代处理及其在相对论中的应用。小林昭七与伍鸿熙（1983）的讲义[46]则提供了关于复微分几何当前具有现实意义的结果。另外，伯热与戈斯托（1988）的书[3]则以流形概念为基础，通过大量的归纳总结和插图，对曲线和曲面的微分几何理论给出了非常生动的和内容丰富的描述。

（Ⅲ）还有一系列专著。J. 沃尔夫（1967）的书[69]主要研究常曲率黎曼空间（包括克利福德-克莱因空间的形成问题）。小林昭七（1972）[45]则总结了微分几何中有关变换群的结果。黑尔加松（1978）的第二版的书[33]中，提供了关于 E.嘉当"对称空间"的标准著作。贝思（1978）[4]和克林根伯格（1978，1982）[39、40]给出了关于黎曼流形与测地线，特别是闭测地线方面的翔实的报告。丘成桐（1982）的书

[70]介绍了“偏微分方程组与微分几何”以及未解决的“微分几何中的问题”。赛西尔和雷安(1985)的书[16]论述了黎曼流形中有关“紧密”(tight)和“套紧”(taut)的浸入方面的成果。此外，威尔莫(1982)[68]还讲授了关于上述浸入的“总曲率与全中曲率”。巴尔曼、格罗莫夫与施罗伊德(1985)[2]则介绍了紧的或完备的且具有非正曲率的黎曼流形的整体结构方面的最近研究结果。格罗莫夫(1986)[31]介绍了有关等距浸入及黎曼流形之间嵌入的结果(例如纳什关于余维具体下降的“嵌入定理”)。贝思(1987)[5]则总结了有关爱因斯坦流形方面的最新研究进展。

(Ⅳ) 这个 100 年借助于由庞加莱、布劳威尔和霍普夫发展起来的流形上的拓扑学，开拓出一个具有十分重要意义的新的研究领域，即整体微分几何学，这是上个 100 年所没有的。

[粗略地说来，这一领域主要研究流形整体的拓扑性质及其度量方面的特性对流形的影响，如紧性、高阶连通关系、同调与上同调及微分几何中黎曼流形的度量完备性等。]涉足这一领域的甚至还有两位(后一位?)数学通才：希尔伯特(1922)[34，附录 V]与外尔(1913、1939 和 1956)[63、64 以及 65 中 138 页]。他们的著作对该领域的发展作出了重要贡献，并且有着持久的推动作用。

但是总的说来，是 E.嘉当和陈省身这两位几何学家的思想和工作给这个时期的微分几何学的进程打下了深刻的铭记。他们的文集反映了微分几何学在众多分支方向上的发展。

以上提到的 E.嘉当的文献和他本人的工作总结(1952)[15，1 ~ 98 页]以及陈省身(1978)的科学自传[21]，都非常具有教育意义。在阅读陈省身和谢瓦莱(1952)的关于 E.嘉当的悼念文章[18]、霍普夫(1961)的关于拓扑学发展的一些回忆、韦伊(1978)的关于他和陈省身交往的回忆录[62]以及陈省身(1985)关于对布拉施克毕生巨著的高度评价文章[10，11 ~ 27 页]的过程中，读者在新兴的拓扑学和微分几何学的基本概念和问题中漫步和前进，从而对所有这一切留下极其生动的印象(就如同与数学家交往，从中获得激励和推动一样)。[恰恰就是这些(大部分是出于个人义务而写的)文章使得人们对这 100 年的“几何精神”的感受，明显地大于从许多百科全书式的有关的文章得到的感受。]

参考文献

[1] Ambrose W, Singer I M. (1953) *A theorem on holonomy*. Trans. Amer. Math. Soc. **75**: 428 ~ 443

[2] Ballmann W, Gromov M, Schroeder V. (1985) *Manifolds of Nonpositive Curvature*. Birkhäuser, Boston

[3] Berger M, Gostiaux B. (1988) *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer, New York

[4] Besse A L. (1978) *Manifolds all of whose Geodesics are closed*. Springer. Berlin.

[5] Besse A L.(1987) *Einstein Manifolds*. Springer, Berlin.

[6] Betti E.(1870/71) *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni*. Annali di Matematica pura ed applicata Ser. II,**4**: 140 ~ 158

[7] Bianchi L. (1899) *Vorlesungen Über Differentialgeometrie*. (Übersetzung von M. Lukat der 1886 lithographierten, Lezioni di geometria differenziale")Teubner. Leipzig

[8] Blaschke W. (1931) *Neue strömungen der differentialgeometrie*. Jahresbericht DMV **40**: 1 ~ 15

[9] Blaschke W.(1945) *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*. Springer, Berlin

[10] Blaschke W.(1985) *Gesammelte Werke* **5**. Thales-Verlag, Essen

[11] Brouwer L E J.(1911) *Beweis der invarianz der dimensionszahl*. Math. Ann.**70**: 161 ~ 165

[12] Brouwer L E J.(1976) *Collected works* **2**. North Holland Publishing Company, Amsterdam

[13] Cantor G.(1878) *Ein Beitrag zur mannigfaltigkeitslehre*. J. reine angew. Math. **84**, 242 ~ 258

[14] Cartan É. (1928) *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris.

[15] Cartan É. *Oeuvres complétes*, partie Ⅰ(1952), partie Ⅱ(1953) et partie Ⅲ(1955). Gauthier-Villars, Paris.

[16] Cecil T E, Ryan P J.(1985) *Tight and taut immersions of manifolds*. Pitman, Boston

[17] Chen B-Y.(1973) *Geometry of submanifolds*. Dekker, New York

[18] Chern S S, Chevalley C.(1952) *Élie Cartan and his work*. Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 217 ~ 250

[19] Chern S S.(1966) *The geometry of G-structures*. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 167 ~ 219

[20] Chern S S.(1967) *Studies in Global Geometry and Analysis*. Studies in Mathematics **4**. Math. Assoc. America, Prentice Hall

[21] Chern S S. (1978) *A summary of my scientific life and works*. In: Chern, S. S. *Collected Works*. Springer, New York

[22] Chevalley C.(1946) *Theory of Lie Groups I*. Princeton University Press, Princeton

[23] Darboux G. *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*. I(1887), II(1889), III(1894), IV(1896). Gauthier-Villars, Paris

[24] Dyck W. *Beiträge zur analysis situs I*. Math. Ann. **32**(1888): 457 ~ 512; *II*. Math. Ann. **37**(1890): 273 ~ 316

[25] Ehresmann C. (1950) *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré differéntiable*. Colloque de Topologie (Espaces fibrés), Bruxelles

[26] Euler L. *Opera omnia*. **26**(1953) und **28**(1955). Orell Füssli Turici, Lausanne

[27] Gauss C F. *Werke* **4**(1880) und **8**(1900). Kgl. Ges. Wiss. Göttingen

[28] Gauss C F. *Disquistiones generales circa superficies curvas*. 1827, abgedruckt in: C.F. Gauss *Werke* **4** (1880): 217 ~ 258

[29] Grauert H. (1958) *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*. Ann. Math. **68**: 460 ~ 472

[30] Gromoll D, Klingenberg W, Meyer W.(1968) *Riemannsche Geometrie im Grossen*. Lecture Notes in Math. **55**, Springer, Berlin

[31] Gromov M. (1986) *Partial Differential Relations*. Springer, Berlin

[32] Haefliger A. (1961) *Differentiable Embeddings*. Bull. Amer. Math. Soc. **67**: 109 ~ 112

[33] Helgason S. (1978) *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York

[34] Hilbert D. (1922) *Grundlagen der Geometrie*. 5-te Auflage, Teubner, Leipzig

[35] Hirsch M W. (1976) *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics **33**, Springer

[36] Kähler E. (1933) *Über eine bemerkenswerte Hermitesche metrik*. Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. **9**: 173 ~ 186

[37] Klein F. (1876) *Ueber den zusammenhang der Flächen*. Math. Ann. **9**: 476 ~ 482

[38] Klein F. (1923) *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. **3**, Springer, Berlin

[39] Klingenberg W. (1978) *Lectures on Closed Geodesics*. Springer, Heidelberg

[40] Klingenberg W. (1982) *Riemannian Geometry*. De Gruyter, Berlin

[41] Kneser H. (1958 - 1) *Analytische struktur und abzählbarkeit*. Annales Academiae Scientiarum Fennicae **251**(5): 1 ~ 8

[42] Kneser H. (1958 - 2) *Sur les variétés connexes de dimension I*. Bull. Société Math. Belgique **10**: 19 ~ 25

[43] Kneser M. (1960) *Beispiel einer dimensionserhöhenden analytischen abbildung zwischen überabzählbaren mannigfaltigkeiten*. Archiv der Mathematik **11**: 280 ~ 281

[44] Kobayashi S, Nomizu K. (1963/69) *Foundations of Differential Geometry I, II*. Interscience, New York

[45] Kobayashi S. (1972) *Transformation Groups in Differential Geometry*. Springer, Berlin

[46] Kobayashi S, Wu H. (1983) *Complex Differential Geometry*. DMV-Seminar **3**, Birkhäuser, Basel

[47] Kronecker L. (1895) *Werke* **1**. Teubner, Leipzig

[48] Lhuilier(1812/1813) *Mémoire sur la polyèdrométrie, contenant une démonstration directe du Théorème dÉuler sur les polyèdres et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti*. Annales de Mathématiques pures et appliquées **3**: 169 ~ 189

[49] Lhroth J. (1907) *Über abbildungen von mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. **63**: 222 ~ 238

[50] Möbius A F. (1886) *Gesammelte Werke*, **2**. Hirzel, Leipzig. *Die daraus zitierten zwei arbeiten sind*: 1) *Theorie der elementaren Verwandtschaft*. Berichte über die Verhandl. Kgl. Sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Klasse **15**(1863): 18 ~ 57; 2) *Über die bestimmung des Inhalts eines polyeders*. Berichte ü. d. Verhandl. Kgl. Sächs. Ges. Wiss., Math.-Phys. Klasse **17**(1865): 31 ~ 68

[51] Nomizu K. (1954) *Invariant affine connections on homogeneous spaces*. Amer, J. Math. **76**: 33 ~ 65

[52] O'Neill B. (1983) *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York

[53] Peano G. (1890) *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*. Math. Ann. **36**: 157 ~ 160

[54] Poincaré H. (1895) *Analysis situs*. J. l'École Polytechnique Ser. 11, **1**: 1 ~ 123

[55] Rado T. (1925) *Über den begriff der Riemannschen Fläche*. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, **2**: 101 ~ 121

[56] de Rahm G. (1955) *Variétés Différentiables*. Hermann, Paris

[57] Riemann B. (1892) *Gesammelte Mathematische Werke*. 2-te Aufl. Teubner, Leipzig

[58] Sard A. (1942) *The measure of critical values of differentiable maps*. Bull. Amer. Math. Soc. **48**: 883 ~ 897

[59] Schoenflies A'(1899) *Uber einen Satz der Analysis Situs*. Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen: 282 ~ 290

[60] Scholz E. (1980) *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincare*. Birkhäuser, Boston

[61] Veblen O, Whitehead J H C. (1932) *The Foundations of Differential Geometry*. Cambridge, University Press

[62] Weil A. (1978) *S. S. Chern as geometer and friend*. In: Chern S S. *Collected works*. Springer, New York

[63] Weyl H. (1913) *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Teubner, Leipzig

[64] Weyl H. (1939) *On the volume of tubes*. Amer. J. Math. **61**: 461 ~ 472

[65] Weyl H. (1956) *Selecla*. Birkhäuser, Basel

[66] Whitney H. (1936) *Differentiable manifolds*. Ann. Math. **37**: 645 ~ 680

[67] Whitney H. (1944) *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space*. Ann. Math. **45**: 220 ~ 246

[68] Willmore T J. (1982) *Total Curvature in Riemannian Geometry*. Ellis Horwood Ltd., Chichester

[69] Wolf J A. (1967) *Spaces of Constant Curvature*. McGraw-Hill, New York

[70] Yau S T. (1982) *Survey on partial differential equations in differential geometry and problem section*. In: Seminar on Differential Geometry. Ann. Math. Studies **102**, Princeton University Press, Princeton N.J

81. 几何人生：一个世纪的归程——访美籍华人、国际著名数学家陈省身

本文作者为《人民日报》记者温红彦，本文刊于《人民日报》2000年12月13日第5版。

为寻访本世纪最杰出的华裔数学家的生活轨迹和心路历程，我来到渤海之滨、白河之津的南开大学。

在校园一隅，一幢淡黄色的二层建筑在深秋里独立。抬眼望去，小楼有草木相伴，门前无车马之喧。路人告之，那就是陈省身先生的宁园。

正是太阳升上天空的时候，偶有学子从宁园门前走过，来去匆匆。几片秋叶幽幽地飘落在台阶上、树根旁，四周显得愈发静谧。按门铃的那一刻，我忽然有些后悔，后悔不该来打扰这幢房屋的主人。毕竟，对于89岁高龄仍闭门精思的几何学家来说，时间弥足珍贵，有更重要的使命待他去完成。

宁园的门打开了，室内光线柔和，家具和饰物古朴简素。门厅左侧起居室的墙壁上，一幅巨大的陈省身教授的油画，散发着淡泊沉静、高风绝尘的韵味。客厅里，轮椅上，陈先生微笑着伸出双手迎接我的到来。坐在这位慈祥的老人对面，我觉得有一种甘美的宁静，山岚一样弥漫了客厅的空间，又如清泉般流入我的心田。

"我最美好的年华在南开度过"

在国际数学界，没有人不知道陈省身教授在整体微分几何上的历史贡献，因为它的影响遍及20世纪的整个数学。无论他走到哪个国家，都会受到欢迎和拥戴。然而，在耄耋之年，他最终作出回中国定居的选择。今年2月，天津市人民政府授予他在华享有的最高荣誉——永久居留资格。宁园，便成为他永久的居所。

采访就从这幢小楼的名字开始。

"一个人一生中的时间是个常数，能集中精力作好一件事已经很不易，多一些宁静，比什么都要紧。"陈先生说，他一向不慕纷华，唯求宁静，在这一点上，爱因斯坦对他的影响很大。"1943年在美国时我就认识爱因斯坦。后来我到美国的普林

斯顿，他是高级研究所的教授，常能见到他，并约我到他家里去做客。他的书架上有一本书很吸引我，那是老子的《道德经》，是德文译本。西方有思想的科学家，大多喜欢中国的老庄哲学。他说他一般是不见外人，包括记者的，"说到此，陈先生冲我抱歉地笑了笑："因为他觉得时间总是不够用，他需要宁静。我给这小楼取名时，就想到了这层意思。"

宁园是南开大学在80年代中期专门为陈省身教授建造的，每年他回中国，都住在这里。"我10岁离开老家浙江嘉兴，到天津南开读书，天津当是我的第二故乡，后来侨居美国50多年。现在回来了，这里自然是我的第二个家。"

如今在数学界产生重要影响的南开数学研究所，就是1985年在陈省身教授的倡议下建起来的。陈省身教授是第一个应聘担任中国的研究所所长的外籍专家，自从他受聘以来，国内外数学界的权威和专家对这项事业竭诚相与。一些著名的美籍华裔学者，杨振宁、李政道和吴健雄等也先后来南开访问讲学，陈和杨还开展了有"血缘"关系的数学和物理的交流研究。

那么，为什么不把数学所设在水木臻妙的清华和湖光塔影的北大，而是选在南开校园？"将数学所选在南开，也是为了避开京城的繁华。德国是19世纪世界数学中心，但中心点不在柏林，而在一个小城市格丁根。只有安静下来才能潜心研究。"

"我最美好的年华在南开度过，她给我留下许多美好的回忆。"因此，他最终选择在南开大学的宁园定居。"前不久，美国伯克利的国家数学研究所为我举办了欢送会。我已经老了，数学本是年轻人的事业，像我这个年龄，还在前沿做数学的，在世界上是没有的。我的想法很简单，我不是来养老的，是想在有生之年再为中国做一些事情。"

再为中国做一些事情，多么朴素真挚的感情。

对于受过中国传统文化熏陶、又在异乡奋斗了一生的人来说，恐怕"少小离家老大还"的意绪，是永远挥之不去的；那叶落归根的情结，更是微分几何和其他任何数学公式不能解开的。1972年，中美两国刚结束对峙状态，陈省身就偕妻女访问了中国。后来他在《回国》一诗中表达了这种的赤子情怀：飘零纸笔过一生，世誉犹如春梦痕。喜看家园成乐土，廿一世纪国无伦。"在他后来的《七五生日偶成》一诗中，也不难看出与这种情感的呼应："百年已过四分三，浪迹平生我自欢。何日闭门读书好，松风浓雾故人谈。"

"我为什么选择了几何"

"因为我从小喜欢数学，读大学就选择了南开大学数学系。"

30年代的中国，数学是一片荒漠，只有姜立夫先生那样的极少数学者从海外介

绍先进的数学到国内，陈省身在南开就受教于姜立夫教授。他1930年在南开大学毕业，后进入清华研究院。1932年，德国微分几何权威布拉施克教授来中国讲学，当时陈省身正在清华大学读研究生，他被微分几何的内在力量所折服，1934年，他到德国汉堡就学于布拉施克教授，1936年获得博士学位，1936年至1937年，他又到巴黎追随当时微分几何最伟大的权威E．嘉当教授，掌握了E．嘉当最新的理论、数学语言和思想方法。1937年回国，先在清华后迁至昆明西南联大直到1943年。在西南联大的日子里，他研究各种等价问题，并为广义的积分几何奠基，每年都有论文在国际数学界发表，他的研究成果已为世界数学界瞩目。

1943年夏，他应聘于美国普林斯顿高级研究所。在普林斯顿的3年，他开创了微分几何的全新局面，他所完成的"陈省身示性类"的著名工作，对数学乃至理论物理的发展产生了极其深远的影响，当时国际数学界对他的评价是：推广高斯-博内公式是微分几何最重要和最困难的问题，纤维丛的微分几何和示性类理论更将数学带入一个新纪元。

20世纪50年初秋，第十一届国际数学家大会在哈佛大学召开，陈省身应邀作《纤维丛的微分几何》的大会演讲，他的登台，使炎黄子孙在本世纪中叶，在现代数学的一个主流方向上居国际领先地位。

1982年，陈省身出任伯克利的美国国家数学研究所首任所长。1987年香港实业家刘永龄先生出资的中国"陈省身数学奖"首次在南开大学颁奖。

陈先生的数学成就遍及射影微分几何、欧几里得微分几何、几何结构和它们的内在联络、积分几何、示性类、全纯映射、偏微分方程等众多方面。对于外行人来说，这些字眼不免让我们联想到数学知识的高远、深难，而对于数学家来说，它们却有着改造世界的伟大力量和史诗般的美感。

数学不仅有用，而且蕴涵着美。杨振宁称赞陈先生的示性类"不但是划时代的贡献，也是十分美妙的构想"。他的《赞陈氏级》的诗在科学界广为传布："天衣岂无缝，匠心剪接成。浑然归一体，广邃妙绝伦。造化爱几何，四力纤维能。千古寸心事，欧高黎嘉陈。"诗的意思是，陈省身在几何界的地位，已直追欧几里得、高斯、黎曼和嘉当。数学界认为，如果没有E．嘉当、陈省身等人的几何直觉，本世纪的数学决不可能有惊人的进展。

从陈先生那里得知，我们的世界的确是建立在数学基础之上的，我们之所以不会时刻意识到这一点，是因为数学是一位幕后英雄，她以最令人满意的方式为世界图景提供了各种不同的模型。比如，当我们看电视时，画面的三维几何学和传送信号的编码方式不需要我们了解，但必须有人了解这些。如果把数学从我们的生活中抽走一天，人类文明的大厦就会坍塌。

数学的严谨和缜密，不仅能造就数学家，还能哺育人类的科学精神。"其实，数学精神是人人都可以享用的。比如，数学中有一种重要的思想方法，就是把遇到的

困难的事物尽可能地划分成许多小的部分，每一部分便容易解答……人人都可以用这种方法用来处理日常问题。”陈先生用简单的比喻，道出了他研究工作的精髓。

“中国必将成为一个数学大国”

80年代初，陈省身教授就希望21世纪中国成为数学大国。1991年他在台湾的讲演《怎样把中国建成为数学大国》中再次说：“愿中国的青年和未来的数学家放开眼光展开壮志，把中国建为数学大国。”“中国必将成为一个数学大国”这一预言，在数学界有人称之为“陈省身猜想”。

“猜想”，是指那些还未被严密证明的数学论断，而“陈省身猜想”却不仅仅是数学范畴的，它蕴涵着炎黄子孙对整个民族复兴的渴望。

在过去的一个世纪里，尤其是在改革开放的20年里，中国数学的发展速度是难以想象的，不仅学科体系变得非常庞大，而且与其他学科的联系变得更加密切。许多负芨海外的青年才俊和国内培养的一大批数学家也迅速崛起，中国涌现出一批数学领域的少壮队伍。在跨入新世纪前夕，世界数学发展的许多前沿阵地都有中国数学家卓有成效的工作，开始填补数学上的重要空白领域，如代数几何等。本来就有较强实力的领域，如数理逻辑、数论、拓扑学、泛函分析等，以及起步较晚的一些学科，如代数几何、整体微分几何、机器证明和模糊数学等，近年内也都有达到或接近国际水平的成果。

陈先生对中国将成为数学大国充满了自信，“数学是个个人的学问，经费的问题不太严重，比其他的学科容易发展。改革开放20年，整个中国的科学都在向前发展，不过数学发展得更快一些。或许在短时间内中国在数学研究的总体水平上难以实现全面超越，但会在一些重要领域取得突破。”

数学的一大功用是预测，在其他的自然科学领域，她一直扮演着预言家的角色。用她可以预测彗星何日归、潮汐几时来。那么对于自己的未来呢？我问陈先生，21世纪世界数学将走向何方？

他说：“这是无法预测的。真正重要的突破总是以无法预料的方式改变了我们的世界。这正是数学的魅力所在。”是啊，谁能想到400多年前的关于琴弦振动的一个数学方程，会导致今天电视机的诞生。“数学思想最终转化到能应用于我们的生活，是需要时间的。关于这一点，许多人还不了解。过于功利的研究往往不会产生好的效果，不是给了经费支持，科学研究就一定会成功，要允许失败，而且多半是失败的。从总体上讲，只要有足够的财力支持，就可以吸引人才，在一定时间内，肯定会出成果的。”

现代数学的新特点告诉我们，数学内部各分支之间的相互渗透，数学与其他科学相互渗透和电子计算机的出现，使许多新问题和古老问题得到解决。对素数的

研究以往认为很少有实用价值，却不料它在密码学中得到应用，更令人感叹的是，杨振宁-米尔斯规范场与陈省身研究的纤维丛，两者间的主要术语竟可一一对应。有趣的是，规范场说的是纤维丛的联络，而数学家在提出纤维丛上的联络时，并未涉及到物理世界。因此，在现代数学飞速发展的今天，数学的前沿可能向任何方面延展。

“我最后的事业在中国”

陈省身先生曾深情地说：“我最后的事业在中国。”

十几年来，他的确把他最后的事业植根于中国了。20 世纪 80 年代，他积极倡导、协助实施了中国数学界三项大的活动，即：召开“国际微分几何、微分方程会议”，举办了“暑期数学研究生教学中心”，组织了中国数学研究生赴美参加“陈省身项目”的研读。他倡议并参与筹建南开数学所，组织全所每年围绕一个数学重点方向，从全国各地选拔优秀数学研究生和青年教师到南开集中培养，对前沿课题进行攻关，以期造就高水平的青年数学家。

为了数学所的发展，陈先生大到办所宗旨，小到教学楼的设计方案，图书资料的充实，无论巨细，事必躬亲。他还亲自讲授近代微分几何学，主编南开数学丛书，为数学所补充数学刊物，并将自己的全部藏书一万余册捐赠给数学所，1985 年，他又把获得的世界最高数学奖——沃尔夫奖的 5 万美元奖金全部捐赠给南开。他说：“办南开数学研究所的目的，就是要让研究数学的人看到，到这里来和到国外去是一样的。现在数学所已经基本形成了这个环境。”

1993 年 5 月，他和丘成桐共同建议，希望中国举办一次国际数学家大会，为此，他奔走呼号。近几年，通过全国同仁和海外数学家一道工作，国际数学联盟会议表决通过，批准我国承办 2002 年国际数学家大会。

“2002 年的国际数学家大会在国际数学界是一件大事，能争取到在中国承办意义重大，它说明中国数学有了相当的水平。我们要通过这个会把中国近年来的数学成就介绍出去，把国际上的先进理论吸纳进来。”

说话间已近正午，阳光透过落地窗，把客厅映得格外明亮。陈先生对今后的工作信心十足：“我计划下学期为本科生开一门微积分课程，南开大学和天津大学的学生都可以来听。我的身体还好，只是腿站不起来了，学校为我派了两个看护，24 小时服务，我现在的生活不成问题。

陈先生除喜欢老庄哲学外，还爱好陶（渊明）李（商隐）的诗，尤喜欢李的那首：“锦瑟无端五十弦，一弦一柱思华年。庄生晓梦迷蝴蝶，望帝春心托杜鹃。沧海月明珠有泪，蓝田日暖玉生烟。此情可待成追忆，只是当时已惘然。”这首诗寄托了他半个多世纪驰骋国际数坛的追求，也寄托了对故土、故人的思恋。

许多数学家都喜欢诗。因为他们是一群以赤子之心终生追求真理的人，他们的精神气质与其说是数学家的，不如说是诗人的或哲学家的。他们是发现和赞颂自然秩序美的诗人，他们是寻找精神归程和营造精神家园的哲学家。

如果“对酒当歌，人生几何”的感叹，表达了古人对短暂人生的悠长思索，那么陈省身先生躬耕于宁静的数学田园、傲立于20世纪数学峰颠的几何人生，便是对这一古老话题的最好诠释；如果说“何处是归程，长亭更短亭”的追问，抒发了古人寻找精神家园的艰辛和苦恼，那么他用将近一个世纪在微分几何中的跋涉，为我们标定了一条精神归家的路——追求真善美，追求心灵的宁静。

82. 有关陈省身的3本著作

这里介绍有关陈省身生平和著作的三本书。

[1] Chern—A Great Geometer of the Twentieth Century. Edited by S.T. Yau. Hong Kong: International Press, 1992. 中文版：陈省身——20世纪的几何大师。丘成桐编。台北：国立交通大学出版社，2000年。此书为庆祝陈省身1990年79岁生日而编。其中收入了他的朋友和学生们的回忆文章。中文版加收了一些大陆学者的文章。“这些文章反映了这位伟大数学家的智慧和他与年轻数学家交往中倾注的热情。”

[2] A Mathematician and His Mathematical Work — Selected Papers of S.S. Chern. Edited by S. Y. Cheng, P. Li, G. Tian. Singapore: World Scientific, 1995. 这部由郑绍远、李伟光和田刚合编的《陈省身论文选》收入了陈省身先生发表的39篇有代表性的研究论文。书中还包括陈先生写的自传和著作梗概，以及他人写的传记和回忆文章等。

[3] 几何风范——陈省身。张奠宙著。济南：山东画报出版社，1998年。这是本64开大小、仅5万字的小书，简略生动地记叙了陈省身先生的不平凡一生：少年即显数学才华，兼具独立自由精神；数学生涯中，五经抉择，努力攀登，终成辉煌；创办三个数学所，造就大批中外数学家；晚年情归故园，为中国的21世纪数学大国梦奔波忙碌。

陈省身年谱

（张奠宙　王善平撰写）

1911年

10月　武昌起义，辛亥革命成功，中华民国建立。

10月28日（农历九月初七）　陈省身出生于浙江嘉兴府秀水县下塘街。

父亲陈宝桢（1889～1967），字廉青，独子，1904年中秀才。辛亥革命之后进法政学堂读书，毕业后进入司法界，长年在外工作。母亲韩梅（1887～1945）；外祖父经商起家，在嘉兴有好几个铺子；舅父韩赞侯曾任嘉兴商会常务委员多年。陈有一姐陈瑶华、一弟陈家麟和一妹陈玉华。

1919年（8岁）

陈省身幼年未进私塾或小学，由祖母（唐氏）和未出嫁前的姑姑教认字。陈宝桢从外面带回狄考文（C.W. Mateer, 1836～1908）、邹立文合编的一部《笔算数学》，在父亲的讲解下，居然懂了不少。

9月　新学期开学，陈省身第一天到秀水县立小学报到，很感孤独。又见老师用戒尺打许多学生的手心，心存芥蒂，再也不肯上学。所以，总共只上了一天小学。

1920年（9岁）

9月　考入浙江秀州中学预科一年级，即高小一年级。这是一所教会学校，管理严格。姑父姚亮臣在该校任国文教师，表哥姚一鹏也在此读书。学业和生活都得到很好的照顾。此后两年中，数学和国文都赶上进度，还有时间看《封神榜》、《说唐全传》之类的闲书。

1922年（11岁）

秋　陈宝桢到天津法院任职。陈省身随父母到天津，住河北三马路颐寿里

90号。

1923年(12岁)

春　插班进入天津扶轮中学(今天津铁路一中),读一年级第二学期。数学课本用的是当时流行的霍尔(H.S. Hall, 1848~1934)与奈特(S.R. Knight)的代数学和高等代数,温特沃思(G.W. Wentnorth, 1835~1906)与史密斯(D.E. Smith, 1860~1944)的几何学与三角学。全是英文版,训练严格。

1925年(14岁)

钱宝琮(1892~1974)来天津南开大学数学系任代课教授,钱也是嘉兴人,与陈宝桢是同学和朋友,常到陈家玩。他后来建议陈省身以同等学力投考南开大学。

1926年(15岁)

4月　在校刊《扶轮》第八期上发表新诗《纸鸢》和《雪》,渴望自主发展。第九期发表《构造式概论》。其他文章涉及"科学与宗教"、"化学"、"植物学"等内容。

7月　从四年制的扶轮中学毕业。自学"解析几何"。

夏　祖母去世。

9月　考入南开大学理学院本科,较正常学历提前两年。第一年不分系,微积分、国文课均不费力,但读化学时实验做得不好,例如吹玻璃管。

1927年(16岁)

姜立夫(1890~1978)从厦门大学讲学回到南开,讲授高等分析。姜立夫于1918年在美国哈佛大学库利奇(J.L. Coolidge, 1873~1954)的指导下以关于非欧空间中线-球面接触变换的研究论文获博士学位,是南开大学数学系的创办人。因姜立夫的影响,对几何学大感兴趣,研读了库利奇的《非欧几何,圆与球的几何》,萨尔蒙(Salmon)的《圆锥曲线,三维解析几何》以及卡斯特尔诺夫(Castelnuovo)的《解析与射影几何》等。尤其着迷于斯特奥德(O. Staude)的两卷本《线作图》。跟段茂澜先生学习德文和法文,达到了能读数学书的程度。

1929年(18岁)

南开大学三年级学生。作为姜立夫的助手,批改一二年级学生的数学作业,每月有10元大洋的收入。

1930年(19岁)

清华大学研究院理科研究所算学部招收硕士研究生。导师有孙光远(孙塘,

1900～1979)。孙光远于1928年从芝加哥大学获博士学位后来清华大学任教授,专长射影微分几何,孙获博士学位后仍然继续自己的研究工作,这种情况在当时中国十分罕见。

7月　南开大学毕业,获理学士学位。

9月　与同班的吴大任(1908～1997)一起考入清华大学研究生院,为孙光远的硕士研究生。吴大任因故未去,清华大学觉得只有陈省身一名研究生太少,遂请陈省身先做一年的助教。

1931年(20岁)

成为清华大学的研究生。清华大学数学系当时有四名教授:系主任熊庆来(1893～1969),以及郑桐荪(1887～1963)、孙光远、杨武之(1896～1973)。除随孙光远做射影微分几何学研究之外,还修读杨武之的"群论"课。杨武之也是1928年芝加哥大学的博士,专长数论。

8月　华罗庚(1910～1985)来清华,任数学系办公室助理员。

9月　清华数学研究所成立。

1932年(21岁)

4月　德国几何学家布拉施克(W. Blaschke, 1885～1962)来华讲学,在北京大学开设"微分几何的拓扑问题"的系列讲座,主要介绍网几何,共讲了6次,陈省身每次都进城听讲,认真做笔记,同时还阅读了大量的有关论文。布氏的演讲深入浅出,使他眼界大开,认识到投影几何只是数学的旁支,已远离数学发展的主流,开始确立把微分几何作为研究方向。

北京大学的江泽涵(1902～1994)教授来清华开设拓扑学课程。陈听他讲莱夫谢茨(S. Lefschetz, 1884～1972)的新著《拓扑学》(1930),开始对代数拓扑学作为现代数学的基础有所认识。

发表第一篇学术论文:《具有一一对应点的平面曲线对》,刊于《清华大学理科报告》。由于现代生物学发现了生物遗传信息载体的脱氧核糖核酸DNA具有双螺旋的曲线对称结构,曲线对的概念正在重新为人们所认识。

1933年(22岁)

经布拉施克介绍,北京大学又邀请汉堡大学年轻的拓扑学与几何学专家施佩纳(Emanuel Sperner, 1905～1980)前来讲学。陈前去听了一个学期的课,对施佩纳关于若尔当曲线定理证明的详尽介绍,留下较深印象。

1934年(23岁)

4～5月　美国哈佛大学教授伯克霍夫(G.D.Birkhoff, 1884～1944)到北京大学

讲学。陈前往听讲。

在清华研究生院获得硕士学位。学位论文是关于射影线几何的研究，次年发表在日本的《东北数学杂志》上。这时已开始认识到整体微分几何的重要性。

因各科考试及毕业论文成绩优良，根据清华大学研究院的章程，可以受资助到国外留学。清华大学的经费来源是美国退回的“庚子赔款”，照常例应去美国，因仰慕布拉施克，申请改往德国汉堡大学，获同意。此时，孙光远已去南京中央大学任教，一切毕业离校事务由数学系代理系主任杨武之帮助处理。

9月　到达德国汉堡大学随布拉施克教授研究几何。

10月　会见布拉施克。布这时的兴趣已开始从网几何转向积分几何。第一次见面时，给陈一堆关于网几何的预印本，陈很快发现其中一篇证明不全，并在一个月内把它补齐。后写成论文《关于网的计算》，次年发表。

与周炜良(1911～1995)首次见面。周炜良在莱比锡大学注册，随范·德·瓦尔登(B.L. Van der Waerden, 1903～1996)研究代数几何，因正在追求住在汉堡的女朋友玛格特·维克多(Margot Victor)，顺便到汉堡大学听阿廷(E. Artin, 1898～1962)讲课，所以当时也住在汉堡。他们是终生的朋友。

11月　学校正式开学。

1935年(24岁)

因布拉施克经常外出讲学，所以主要跟随布的助手凯勒(E. Kähler, 1906～　)学习。凯勒开设一讨论班，讲授他的新著：《微分方程组理论导引》，其中包括著名的嘉当-凯勒定理。一开始几乎所有的人都参加了讨论班，包括布拉施克、阿廷和赫克(E. Hecke, 1887～1947)，但随后人数迅速减少，两个月后只剩陈一人。通过讨论班认识到了嘉当(E. Cartan, 1869～1951)工作的威力和洞察力。

只要有可能，陈省身尽量参加阿廷的课程。听过的课包括复变函数论、代数拓扑、相对论和代数逼近等。还听过赫克的代数数论课。

这一年在日本《东北数学杂志》同一期上发表两篇论文：

《具有对应母线的直纹线汇三元组》。

《直纹线汇的相伴二次复形》。

同时，在德国发表以下论文：

《关于网的计算》。汉堡大学数学讨论会论文集。

10月　到汉堡只一年，就以《关于网的计算》和《2n维空间中n维流形三重网的不变理论》完成了博士论文。后一篇是关于把凯勒的理论用于网几何，次年发表于汉堡大学数学讨论会论文集。

1936年(25岁)

2月　布拉施克教授出访归来，举行并通过博士论文答辩。由于提前获得博

士学位,中华文化基金会同意再资助一年,地点任选,陈省身问计于布拉施克,后者提供两种选择:在汉堡大学随阿廷、赫克等代数学名家研究代数数论,或者到巴黎直接追随嘉当,进一步研究嘉当的几何学理论。出于对几何的热爱和对嘉当的仰慕,陈省身选择去巴黎。

7月10日　周炜良与维克多结婚,陈省身应邀出席婚礼。

9月　乘火车至汉堡港,再乘船转伦敦赴巴黎。布拉施克、张禾瑞、吴大任和吴的妻子陈鹀(1909～)到车站送行。在伦敦停留期间访华罗庚于剑桥大学。以“法国巴黎索邦中国基金会博士后研究员”的身份到巴黎大学从事研究工作。住国际学生宿舍。

11月　嘉当允许陈省身每两星期到家里会面一次,每次约一小时,每次会见后的第二天,嘉当通常会来信继续昨天的讨论。为应付这一定期会见,日以继夜地工作。学习了活动标架、等价方法以及更多的嘉当-凯勒理论。更重要的是学到了嘉当的思想方法。数学功力突飞猛进。

在巴黎还听过蒙泰尔(P. Montel, 1876～1975)的多复变函数的课程,参加阿达马(J-S. Hadamard, 1865～1963)的讨论班。

早期的布尔巴基(Bourbaki)成员正组织每两周一次的朱利亚(Julia)讨论班,当时的议题是“埃利·嘉当先生的工作”。陈省身曾和他们有接触,但没有加入他们的活动。韦伊(A. Weil, 1906～1998)是布尔巴基学派的成员,他和陈省身见过面,但还不相识。

美国普林斯顿大学的维布伦(O. Veblen, 1880～1960)写信给嘉当,谈论投影正规坐标。陈省身用嘉当方法处理投影坐标,开始和维布伦通信。维布伦是美国数学界的领袖人物,普林斯顿几何学派的主要代表。他对陈省身日后到美国发展有重要作用。

在巴黎10个月发表论文三篇,但工作范围远远超过这些论文的内容。

1937年(26岁)

应清华大学聘请,回国担任数学系教授。

7月10日　正值卢沟桥事变,抗日战争爆发。陈省身从法国乘船到纽约,经横贯美国的铁路到温哥华,再搭海船到上海。当时日军已占领上海,改在香港下船,在香港住了一个多月,再赶到长沙。

11月1日　北大、清华、南开三校已离开北平和天津,联合成立了长沙临时大学。数学系在圣经书院上课,讲授“微积分”和“高等几何”。

12月　由吴有训(1897～1977)、杨武之介绍,在长沙和郑士宁(1915～2000)订婚。郑士宁是东吴大学生物学系的理学士。她的父亲郑桐荪先生是中国现代数学的先驱,同为清华数学教授。

1938年(27岁)

1月20日　因长沙战事恶化。长沙临时大学奉命迁昆明，改名为西南联合大学。

2月3日　先至香港，乘船到越南的海防，再换往昆明的火车。同行者有蒋梦麟、饶毓泰、程毓淮，以及杨武之、江泽涵两家。

2月15日　抵达昆明。参加西南联合大学的教学工作。

以后的几年内，讲授过"高等几何"、"微分几何"、"微分方程"、"黎曼几何"、"投影几何"、"网几何"、"拓扑学"。

终年在困苦的战时环境中工作和生活。因有大量的嘉当寄来的复印本论文，可以苦读精思。嘉当一生的论文约有6 000页，陈省身先后所读，约有其中的十之七八。

在西南联大时期，开设"李群"、"圆球几何学"、"外微分方程"等讨论班。

论文《关于投影正规坐标》，由维布伦推荐在美国的《数学纪事》(Annals of Mathematics)发表。这是第一次在美国的数学杂志上发表文章。

暑假期间从昆明经海防到香港，再乘船赴上海探望未婚妻。在上海与周炜良会面。开学时返回。

1939年(28岁)

7月　未婚妻郑士宁来昆明。两人完婚。住在昆明大西门内大富春街。那是陈西屏的住宅。同住的有姜立夫、饶毓泰、孙云铸诸先生。

1940年(29岁)

?月　为平安计，郑士宁回上海待产，父亲郑桐荪同行。8月27日，儿子伯龙诞生。

9月　当选为清华该年度评议会教授评议员。因在上海的中国数学会的负责人顾澄(1882～?)倒向汪伪政权。在大后方的数学家与之划清界线，成立"新中国数学会"。9名理事是：姜立夫(会长)、熊庆来、陈建功(1893～1971)、杨武之、孙光远、苏步青(1902～　)、江泽涵、华罗庚(兼会计)、陈省身(兼文书)。

在《中国数学会学报》上发表《高维道路空间的几何学》。

与严志达(1917～1999)合作的论文《n维空间主运动式》在《意大利数学联合会通报》发表。这是研究积分几何的成果。

和华罗庚、王竹溪(1911～1983)合作开设"李群"讨论班。这在当时是很有远见的世界水平的研究课题。

1941年(30岁)

1月23日　作为教授代表,参加清华大学11人的校务会议。

3月　姜立夫受命筹备中央研究院数学研究所,和陈省身时有磋商。

9月　继续当选为清华年度评议会教授评议员。担任王宪钟(1918～1978)的硕士研究生导师。

继续在西南联合大学执教。开设高等专题课程,如《共形微分几何》、《圆球几何学》、《外微分方程》、《李群》等。学生中包括严志达、王宪钟、吴光磊、钟开莱、王浩(1921～1995)等。物理系的学生杨振宁(1922～　)等也曾来听课。

是年12月发生珍珠港事件,太平洋战争爆发,郑士宁滞留上海,直至1946年4月才和陈省身重新见面。重过独身生活之后,住在唐继尧花园中戏台的一个包厢。

1942年(31岁)

几年来的积分几何研究,汇集成《关于克莱因空间的积分几何》一文,发表在美国的《数学纪事》上。这是广义积分几何的基础性工作。韦伊应邀为此文写评论,他对文章所反映的非凡才能和深刻见解有很好的印象,为此写了一篇长长的评论。还向外尔(H. Weyl, 1885～1955)介绍,维布伦与外尔策划邀请陈来普林斯顿访问工作时,韦伊大力支持。

2月　维布伦正式邀请陈省身访问美国普林斯顿高级研究所,并已得到经济资助(每年1 500美元)。

受聘担任中央研究院数学研究所的兼任研究员(另四人为苏步青、陈建功、江泽涵、华罗庚)。

继续在西南联合大学任教。

开始着迷于高斯-博内公式,认识到应通过外导数形式的结构方程得到最具理论意义的证明。为后来获得高斯-博内公式的内蕴证明打下了基础。

1943(32岁)

在西南联合大学执教的同时,筹备去美国普林斯顿研究所,办理各种手续。

7月15日　由昆明启程去美国。届时太平洋战事正酣,无法经上海探视妻儿去美。

7月16～31日　在印度加尔各答停留。到加尔各答大学,与该校数学教授列维(F.W. Levi)会见,作四次演讲,题目为Theory of Geometric Objects and the Method of Equivalence。又到加尔各答数学会作一次演讲。

8月1日　与霍秉权(1903～1988)一起到卡拉奇。5日搭乘美国军用飞机,经中非洲、南大西洋、巴西,11日到达美国的迈阿密,14日到达新泽西州的普林斯顿。

段学复(1914～　)前来接应。此后在普林斯顿呆了两年半,这是他数学研究生涯中最有成就的时期。

8月15日　致函梅贻琦(1889～1962)校长,汇报在美国的情况。

10月　完成《闭黎曼流形高斯-博内公式的一个简单的内蕴证明》的论文(发表于次年的《数学纪事》(美国)第45卷第4期上)。这是陈省身一生最重要的数学工作。二维紧致流形上的高斯-博内公式是经典微分几何的高峰。霍普夫(H. Hopf, 1894～1971)曾说:"推广此公式到高维紧致流形是几何学中极其重要和困难的问题。"在陈以前已有高维推广的各种证明,但均采用把流形浸入到欧氏空间中去的非内蕴方法。陈首创通过在长度为1的切向量丛上的运算获得证明的内蕴方法。使整个局面豁然开朗。外尔因这一工作向陈省身致贺。

在普林斯顿和韦伊成为亲密朋友。他们有共同的兴趣,考虑相同的问题。特别是一起讨论流形的示性类。

1944年(33岁)

继续在普林斯顿作研究。事前向清华大学梅贻琦校长请假一年。

6月8日　清华第21次聘委会通过,续聘陈省身为数学系教授。

1945年(34岁)

年初的某星期日　发现"复流形上有反映复结构特征的不变量",这一发现后来被命名为"陈省身示性类"。

4月25日　向清华大学理学院吴有训院长、数学系杨武之主任报告在美工作的情况。

7月23日　致函梅贻琦校长,要求请假一年,完成与谢瓦莱(C. Chevalley, 1909～1984)合作之研究。

8月15日　日本宣布无条件投降。第二次世界大战结束。北大、清华、南开重新回到原地。陈省身准备于次年回国。考虑到战乱中的中国数学家迫切需要各自研究领域中的最新资料,陈收集了大量的数学文献的抽印本。

9月　美国数学会在新泽西州纽布隆斯威克举行夏季大会,陈省身应邀作一小时演讲,演讲题目《大范围微分几何若干新观点》,系统阐述了他继承E. 嘉当发展起来的纤维丛的理论方法。后发表在美国数学会通报(Bulletin)1946年第52卷。此演讲引起不同寻常的反响。霍普夫在《数学评论》中写道:"这表明整体微分几何新时代的到来。"

10月　完成论文《埃尔米特流形的示性类》,后发表在《数学纪事》第47卷第1期(1946)上。这是陈省身又一项重要工作。其中提出了现在称之为"陈类"的不变量。为整体微分几何奠定了基础。

接家中母病危消息，乃决定提前启程返国。离开普林斯顿，乘火车经芝加哥到洛杉矶时，接电报母亲已病故，不胜悲痛。

12月　到旧金山等船。途中应邀在一些大学逗留讲学。在印第安那大学度圣诞节。

1946年(35岁)

1月　应阿尔贝特(A.A. Albert, 1905～1972)之邀在芝加哥大学演讲，内容是关于他的推广的高斯-博内定理。从芝加哥乘火车到洛杉矶，在加州理工学院演讲并会见贝尔(E.T. Bell, 1883～1960)和米哈尔(A. D. Michal, 1899～1953)。后继续到伯克利的加利福尼亚大学演讲，会见埃文斯(G.C. Evans, 1887～1973)和卢伊(H. Lewy, 1904～1988)。

3月　战后运输拥挤，在旧金山候船3月方得船票。中旬乘巴特勒将军号船去上海。

4月　月初抵达上海，与分别6年的家人团聚。

春　与周炜良再度见面，周为生活计正在经商，已放弃数学研究多年。陈鼓励周回到数学，给他扎里斯基(O. Zariski, 1899～1986)最近的代数几何研究论文，并推荐他到普林斯顿研究所访问。在陈的支持下，周炜良毅然决定放弃经商，携家前往美国，到普林斯顿研究所重做数学研究，后终生任教于约翰斯·霍普金斯大学。

5月　中央研究院数学研究所筹备处主任姜立夫赴美国普林斯顿研究所访问。临行前致函中央研究院院长朱家骅(1892～1963)，推举陈省身代理数学研究所筹备处的工作。当时该所设在上海岳阳路。陈省身在主持该所筹备工作期间，广泛吸收年轻人参加。先后到来的有路见可、曹锡华、陈国才(1923～1987)、张素诚、吴文俊、周毓麟、叶彦谦、陈杰、陈德璜、林铣、贺锡璋、马良、孙以丰、廖山涛(1920～1997)等。陈省身每周讲12小时的“拓扑学”课程。第一年的资深研究员为陈建功。

夏　普林斯顿大学和哥伦比亚大学等约聘陈为教授。陈因希望为国内数学发展尽力而均予婉拒。

9月20日　姜立夫致函朱家骅提议邀请外尔来华访问。陈省身自然是实际主持者。同日，朱家骅表示同意，并致电外尔，表示邀请。

1947年(36岁)

2月　数学所基本筹备就绪。在美国的姜立夫再次致函朱家骅，建议于7月正式成立数学研究所，并力荐由陈省身为首任所长。朱家骅立即复信，表示仍由姜立夫任所长，陈省身为代理所长。

2月15日　外尔回电陈省身，因中国国内政治形势恶化以及夫人住院动手术

等原因近期不能访华。

7月　数学研究所正式成立。

胡国定(1923～　)从上海交通大学毕业,陈介绍其到清华大学任教,因有人告密胡是学运积极分子,有共产党嫌疑,遂被清华拒绝。陈告知在南开大学的老同学吴大任,吴决定邀请胡来南开数学系任助教。

8月20日　公布中央研究院院士初步候选人名单,数学科共32人。

10月15日　公布正式的院士候选人名单,数学科计8人,陈省身名列其内。

1948年(37岁)

女儿陈璞在上海出生。

年初　数学研究所从上海迁往南京九华山。

3月18日　公布中央研究院院士名单,共81人。其中有5名数学家:陈省身、华罗庚、姜立夫、许宝騄(1910～1970)、苏步青。参加中央研究院成立20周年暨第一次院士大会。

6月　姜立夫自美国返回,坚辞数学所所长职务,表示愿回南开大学,秋季即赴南开上课。

9月　受聘为"北平研究院学术会议"会员。会员共90人。其中数学家还有熊庆来、江泽涵、赵进义。

9月24日　当选为中央研究院第三届评议会评议员。共32位评议员,数学家仅两人,另一位是苏步青。

10月10日　南京召开"十团体联合年会"。战前在上海成立的中国数学会和抗战时期成立的"新中国数学会"负责人胡敦复(1886～1978)、姜立夫等在陈省身处进餐,共同讨论两会的合并事宜。陈省身建议将"新"字去掉即可。新中国数学会就此完成了历史使命。

11月19日　普林斯顿高级研究所所长奥本海默(J.R. Oppenheimer,1904～1967)致电陈省身:"如果我们可做什么事便利你来美,请告知。"此时开始读英文报纸,才知南京局面不能长久,便作全家去美计划。

12月31日　再次接受普林斯顿高级研究所的邀请,携家乘泛美航空公司班机离开上海,经东京、关岛、中途岛、檀香山,于次年1月1日抵旧金山。姜立夫奉命主持数学所迁台湾事宜。

1949年(38岁)

1月　携全家月底抵普林斯顿高级研究所。途经芝加哥逗留,韦伊前来火车站迎接;韦伊回忆道:"陈戴着裘皮帽,活像满洲将军……。"芝加哥逗留期间下榻于温德摩旅店,杨振宁前往探望。在普林斯顿成为"维布伦讨论班"主讲人,讲授联络

论,度过了春季学期。陈的讲义经整理两年后以《微分几何若干论题》为名由普林斯顿高级研究所出油印本,被广泛流传,后收入《陈省身论文选》第四卷。其主要内容是关于把“陈类”从酉群推广到任意李群的陈-韦伊同态定理。

夏　接受芝加哥大学斯通(M. Stone,1903 ~ 1989)的邀请,接替莱恩(E. P. Lane)任该校数学系几何学教授。有趣的是,陈省身在清华时的老师孙光远,1928年在芝加哥大学获几何学博士学位时的导师,正是莱恩教授。陈决定接受邀请有以下主要原因:(1) 需要在美国有一个长期稳定的职位以养家室。(2) 当时芝加哥大学是美国唯一的把主要目标定在“推进知识”研究而不仅是教育的大学。当时正广招人才,雄心勃勃,到那里去可以安心搞研究,大展身手。(3) 那里的数学系里有韦伊等许多朋友。

当时芝加哥大学的物理系也声名卓著,著名物理学家费米(E. Fermi, 1901 ~ 1954)正在那里,杨振宁在系里任教员,李政道(1926 ~ 　　)也在那里。

第一年开设《大范围微分几何》课程,吸引了一批优秀的学生。陈在芝加哥大学11年,培养博士10人。

10月1日　中华人民共和国成立。

1950年(39岁)

应邀在美国坎布里奇举行的第十一届国际数学家大会上作一小时演讲,题目是《纤维丛的微分几何》。

1951年(40岁)

成为印度数学会名誉会员。

5月6日　E. 嘉当在巴黎逝世。陈与C. 谢瓦莱作悼念文章《埃利·嘉当和他的数学工作》(发表在《美国数学会通报》第58卷,217 ~ 250页,1952年),回顾嘉当的生平并系统总结了他的数学成就。

1952年(41岁)

哈佛大学访问教授。

1953年(42岁)

苏黎世工业大学访问教授。

任《杜克数学杂志》编辑委员会美国数学会代表(至1955年)。

6月　指导的第一位博士研究生野水克已(1924 ~ 　)完成博士论文:《齐性空间上的不变仿射联络》。

夏　重访德国汉堡,看望老师布拉施克。

1954年(43岁)

3月　中国留学生廖山涛完成博士论文《关于纤维丛障碍的理论》。廖山涛于1955年回中国,任北京大学教授,1992年当选中国科学院学部委员。

获古根海姆纪念基金1954~1955年度资助。

从芝加哥大学休假,去普林斯顿高级研究所一年,此时杨振宁也在那里。

1955年(44岁)

入选《美国数学会文集》(Proceedings)编辑委员会(至1958年)。

12月　美国数学会在休斯顿举行年会,应邀作一小时演讲：演讲题目《复流形上的拓扑和微分几何》。

1956年(45岁)

夏　参加在墨西哥国立大学举行的代数拓扑国际研讨会,并在会上演讲。

1957年(46岁)

进入美国数学会《会报》(Transactions)与《论文集》(Memoirs)编辑委员会(至1959年)。

访问马萨诸塞理工学院。

1958年(47岁)

应邀在苏格兰爱丁堡举行的第13届国际数学家大会上作30分钟演讲,题目是《微分几何与积分几何》。

1959年(48岁)

半年在瑞士,半年在巴黎。

1960年

1月　在欧洲访问。

6月　应邀参加在瑞士苏黎世工业大学举行的微分几何与拓扑报告会并做演讲,题目是《复分析中的几何问题》。会后应威廉·斯托尔(Wilhem Stoll)之邀,与他一起乘火车到德国杜宾根大学,为杜宾根数学报告会讲课。

6月　离开芝加哥大学受聘伯克利加利福尼亚大学。来到伯克利的主要原因是：(1)芝加哥城因治安不好使得优秀教师纷纷离去;(2)这里数学系的水平是一流的,系主任埃文斯曾数度邀请前往;(3)这里的气候温和,很适合居住。在该校

任职约 20 年,使其成为几何和拓扑的中心,培养博士 31 位。

6 月　美国数学会在密执安州的东兰辛市举行夏季年会,应邀作主题演讲。

8 月 10 日　维布伦逝世。陈省身和吉文思(W. Givens)联合提议设立"维布伦几何学奖"。1961 年正式颁发,奖励在几何或拓扑学领域中的杰出研究成果。

冬　访问日本东京大学。

1961 年(50 岁)

当选为美国全国科学院院士;由于院士必须是美国公民,为此在一个月前加入美国籍。

1962 年(51 岁)

曾被探询是否愿任美国数学会会长,坚辞。于是任美国数学会副会长,为期两年(至 1964 年)。

任美国数学会年会与夏季大会一小时演讲者挑选委员会成员。

国际数学家大会在瑞典斯德哥尔摩举行,被任命为该届大会的菲尔兹奖章委员会委员。

夏　专程赴日内瓦,看望当时正与其子杨振宁相聚小住的杨武之夫妇,同住数日,杨武之赠诗一首。

1963 年(52 岁)

再任美国数学会年会与夏季大会一小时演讲者挑选委员会成员。

当选为美国人文与自然科学院院士。

1964 年(53 岁)

访问普林斯顿高级研究所。

1965 年(54 岁)

参加在日本京都大学举行的 1965 年度美-日微分几何研讨会。演讲题目是《关于欧氏空间一片子流形的微分几何》。

1966 年(55 岁)

洛杉矶加利福尼亚大学访问教授。

任美国数学会维布伦奖评选委员会主席。

6 月　美国数学会在圣地亚哥举行整函数及有关部分的分析的夏季研讨会(Summer Institute),陈在会上演讲。

1967 年(56 岁)

获古根海姆纪念基金 1967 年度资助。

访问法国巴黎高级研究所。

1969 年(58 岁)

夏　访问香港中文大学，作关于高斯-博内定理与示性类的学术演讲。

与当时为香港中文大学数学系学生的丘成桐(1949～　)接触，并推荐他到加州大学(伯克利)攻读博士学位。陈省身成为丘成桐的导师。

香港中文大学名誉法学博士。

芝加哥大学名誉理学博士。

1970 年(59 岁)

应邀在法国尼斯举行的第 16 届国际数学家大会上作一小时演讲，题目为《微分几何的过去和未来》。

进入美国数学会评选委员会(至 1972 年)。

访问巴西里约热内卢纯粹与应用数学研究所。

因论文《欧氏空间中的曲线和曲面》获美国数学协会查文尼特奖。

1971 年(60 岁)

获汉堡大学名誉理学博士。在授予仪式上作《W. 布拉施克的数学工作》的讲演。

春　住院动手术(奥克兰 Kaiser 医院)。

组织华人著名学者在《纽约时报》上刊登广告，抗议日本政府占领钓鱼岛。

当选为巴西科学院通讯院士。

丘成桐在陈省身指导下获博士学位。

1972 年(61 岁)

进入美国数学会学术报告集(Colloquium)编辑委员会(至 1977 年)。

访问英国考文垂市的瓦维克大学。

与克林根贝格(W. Klingenberg，1924～　)一起组织在 Oberwolfach 举行的"整体微分几何大会"。该大会后来每两年举行一次。

9 月　偕夫人郑士宁访问阔别 24 年的祖国，带来美国全国科学院、美国社会科学学会和美国医学会的信，希望与中国科学界建立联系，促成科学家间的交流。

9 月 16 日　中国科学院院长郭沫若(1892～1978)夫妇、副院长竺可桢(1890～1974)和吴有训等一起会见了陈省身夫妇。陈在中国科学院数学研究所作了《纤维

空间和示性类》的演讲。

访问上海，在国际饭店演讲。

1973年(62岁)

访问纽约洛克菲勒大学。

任美国数学会夏季研讨会组织委员会主席。

1974年(63岁)

任美国数学会学术报告集(Colloquium)编辑委员会主席。

应日本文部省之邀赴日作巡回讲演，主要在日本东北大学任客座教授。

参加在东京大学举行的微分几何会议。应桂田芳枝(K. Yoshie, 1911～1980)与铃木治夫之邀在北海道大学演讲，题目是《复流形中的实曲面》。

8月　出席在温哥华举行的第17届国际数学家大会。

再次回中国。有诗一首。

1975年(64岁)

获美国国家科学奖章。

杨振宁弄清纤维丛和规范场的关系，驱车到陈省身家谈论这一令人惊异的事。杨振宁认为纤维丛是数学家想像出来的。陈省身说："不，不。这些不是想像出来的，它们是自然而真实的。"

1976年(65岁)

任美国数学会维布伦奖评选委员会主席。

参加在德国Oberwolfach举行的"整体微分几何大会"。

1978年(67岁)

被伯克利加利福尼亚大学学术委员会选为该校1978年度"教师学术演讲人"，陈的演讲题目是《从三角形到流形》。

北京大学名誉教授；南开大学名誉教授；中国科学院系统科学研究所名誉教授。

德国著名的斯普林格出版社出版了《陈省身论文选》第一卷。

在美国与一些华人学者商讨如何帮助中国把科学技术搞上去。有的学者认为可以让大陆的年青人来美国学习，做助教，学成后回国。陈认为这不是最好的办法，因为这样会使最好的人才都留在美国。他认为关键在于帮助中国在自己的土地上建立培养高级人才的基地。

陈以后几乎每年回国访问讲学。并在与吴大任谈话中,多次留露出余生要为祖国的数学事业作贡献的意愿,这成为以后创办南开数学所的契机。

1979年(68岁)

进入美国数学会俄文与其他外文[数学文献]翻译委员会(至1981年)。

3月　参加在普林斯顿高级研究所举行的爱因斯坦(A. Einstein, 1879~1955)诞生一百周年纪念会,作《广义相对论与微分几何》的演讲。

从伯克利加利福尼亚大学退休,任名誉教授,但仍然在该校执教至1984年。

6月　学校为陈省身的退休举行《整体分析与整体几何国际研讨会》,历时一周,出席者三百余人。到会的中国数学家有吴文俊、廖山涛、谷超豪、胡和生。

1980年(69岁)

4月28日~6月13日　在北京大学开设"微分几何"研究生课程。前后共7周。要求学生做习题,参加考试。讲课内容由陈维桓整理,以《微分几何讲义》的书名出版。

8月18日~9月20日　在陈省身建议和组织下,举行首届"国际微分几何与微分方程会议"(简称"双微"会议)。陈省身任美国代表团团长。

中国科学院研究生院名誉教授。

在北京大学、南开大学和暨南大学演讲,提到,"我们的希望是在21世纪看见中国成为数学大国"。演讲内容经增订以《对中国数学的展望》为题刊登在《自然杂志》1981年第一期中。

与布思比(W. M. Boothby, 1918~　)和王叔平合作撰文《王宪钟的数学工作》。

9月3日　访问中国科学院理论物理研究所。归而赋诗一首:

物理几何是一家　共同携手到天涯
黑洞单极穷奥秘　纤维联络织锦霞
进化方程孤立异　对偶曲率瞬息空
畴算竟有天人用　拈花一笑不言中

1981年(70岁)

1月6~7日　斯隆基金会。

3月4~7日　访问哈佛大学。

3月14日　在哈佛大学参加午餐会。

?月　与当时的南开大学副校长胡国定三次会谈,讨论建立南开数学研究所的具体事宜。

4月2日　写信给胡国定,再次表示愿为母校做一点事。

4月9日　再访苏黎世工业大学。

5月16~20日　访问汉堡大学、柏林大学。

5月23~25日　日内瓦。

7月25日~8月17日　在里约热内卢参加巴西数学研究所开幕,陈有好几个优秀的巴西学生。

11月14~15日　去洛杉矶加利福尼亚大学开会。

美国国家基金会宣布在伯克利建立数学研究所,陈省身任首任所长。

1982年(71岁)

上半年在欧洲访问、讲学。

6月29日　返美。

8月18日　去北京。

8月23日~9月10日　参加在长春举行的第三届国际"双微"会议。

9月3日　在北京大学作"网几何"的报告。

9月17日　返美。

10月19日　去波士顿、纽约。

11月1日　写信胡国定,商讨筹建"数学楼"事宜。

11月17日　写信吴大任、胡国定,提出要把收藏的全部数学书籍约万余册捐赠给南开。

11月20日　获苏黎世工业大学名誉数学博士。

获德国洪堡奖。访问德国波恩马克斯·普朗克数学研究所。

1983年(72岁)

5月3日　写信胡国定,对南开"数学楼"的结构布局提出详细建议。

5月30日　参加罗伦特·施瓦尔茨(Laurent Schwartz, 1915~　)庆祝会。

8月　获美国数学会斯蒂尔奖,以表彰他的"整个数学工作所产生的长期影响"。获奖介绍中称陈是"半个世纪以来微分几何界的领袖。他的工作既深刻又优美,典型例子就是他的关于高斯-博内公式的内蕴证明"。

11月　第三世界科学院创始成员。

设立"陈省身项目",每年20名。由陈省身联系,赴美国留学。

1984年(73岁)

4月16日　访问樊𰿳(1914~　)(圣巴巴拉加利福尼亚大学);访问华罗庚(加利福尼亚理工大学);在洛杉矶加利福尼亚大学演讲。

4月23～27日　在科罗拉多大学作乌拉姆演讲。

任美国数学研究所1984～1985年度微分几何项目委员会主席。

秋　美国数学研究所所长任期届满，任名誉所长。

接受中华人民共和国教育部部长何东昌的邀请，任南开数学研究所所长。之前，胡国定与吴大任一起到中央各部门奔走、呼吁，使有关领导认识到聘请陈省身来华任职的重要意义，终于促成美事。

受聘南京大学名誉教授。

5月　与爱尔特希(P. Erdös, 1913～1996)一起获1983～1984年度沃尔夫奖，分享10万美元奖金，获奖原因是“对整体微分几何的深远的贡献，影响了整个数学”。赴以色列接受由总统贺索颁发的该奖。陈省身后把奖金赠给了南开数学研究所。

8月12日　到北京。

8月25日　邓小平(1904～1997)设午宴招待。

8月27日　游兰州、敦煌。

9月1日　返美。

1985年(74岁)

3月　中国数学会设“陈省身”数学奖，由香港亿利达工业发展集团有限公司提供资金。奖励中青年数学家所取得的成就，每两年颁发一次。

5月19日　纽约大学石溪分校名誉博士。

6月5日　到北京。

6月10日　接受南开大学名誉博士。

6月14日　华罗庚去世。

到黄山，乘车去上海。为嘉兴秀州中学题写“日新楼”楼名。

6月　受聘华东师范大学名誉教授，同时为该校《数学教学》杂志题词：“二十一世纪数学大国”。

9月3日　到汉堡参加布拉施克纪念会(9月6日?)。

9月9日　当选为英国皇家学会外籍会员。

10月9日　到上海。

10月17日　在天津为南开数学研究所揭牌。就任第一任所长。吴大任根据陈省身的思想拟订了“立足南开、面向全国、放眼世界”的办所宗旨。

1985～1986年度为“南开数学所偏微分方程年”，陈省身帮助邀请11名国际一流学者到会。

11月20日　获南京大学名誉教授。到杭州、香港。

12月　参加6日至10日在上海举行的中国数学会50周年年会。6日上午在

复旦大学大礼堂举行的开幕式上作题为《五十年的世界数学》的报告。7 日晚，上海市市长江泽民在国际饭店会见来华参加年会的 15 位外国数学家和部分中国数学家。

发起组织在法国里昂举行的《埃利·嘉当的数学遗产》研究会。

受聘中国科技大学名誉教授，北京师范大学名誉教授，浙江大学名誉教授、名誉博士。

1986 年(75 岁)

5 月 15 日　在南开数学所主持 1986 ~ 1987“几何与拓扑年”的学术活动安排。

5 月 6 日 ~ 18 日　先后访问北京、昆明、成都、重庆、三峡、武汉、唐山。

接受杭州大学名誉教授、复旦大学名誉教授、上海工业大学名誉教授。

伦敦数学会名誉会员，意大利西西里 Paloritani 学院通讯院士。

在北京 101 中学与参加全国中学生数学奥林匹克集训队的学员座谈。

6 月　陪同杨振宁访问南开数学研究所。

7 月 8 日　返美。

8 月 3 ~ 11 日　国际数学家大会在伯克利举行。中国代表权问题获得解决。中国“在数学上是统一了”。陈省身在此过程中起了重要作用。吴文俊在分组会上作 45 分钟报告，陈省身主持会议。

9 月 30 日　去香港、天津，作“微分几何十讲”。

11 月 2 日　邓小平接见，午宴招待。

12 月 1 日　返美。

1987 年(76 岁)

2 月　在休斯顿实验室工作的女婿朱经武和他的同事宣布发现一种可以在高于液氮温度下成为超导体的材料。

4 月 25 日　香港，住刘永龄家。

5 月 6 日　在南开大学举行首届“陈省身数学奖”颁奖仪式，钟家庆和张恭庆获奖。陈省身偕夫人出席，并亲自授奖。

到济南、曲阜、厦门。在厦门大学做学术报告，并题词：“数学前途无限，数学家的前途亦无限。”

6 月 1 日　在清华大学畅游故地，胡国定等陪同。

6 月 9 日　返美。

9 月 9 日　在北京住一星期，参加 9 月 14 日至 18 日举行的第三世界科学院会议。

10 月　赴日本参加在东北大学举行的微分几何研讨会，演讲题目是《迪潘子

流形》。

12月7日　当选为纽约科学院终身名誉院士。

天津大学名誉教授,日本东北大学名誉教授。

1988年(77岁)

当选意大利罗马林琴科学院外籍院士。

8月19日　由苏黎世到北京。

8月20~24日　由陈省身提议,在南开数学研究所召开"二十一世纪中国数学展望"学术讨论会。会议的主题是:"群策群力,使数学率先赶上国际先进水平。"陈省身再次提出:"中国应该成为21世纪数学大国。"到会的李铁映称之为"陈省身猜想"。此次会议的重要结果是"天元基金"的设立。12月,国务院正式批准这项数学专项基金的设立。第一年为100万元。以后增至每年200万元。

访问大连。

11月9日　返美。

1989年(78岁)

法国科学院外籍院士,美国哲学学会会员。

2月3日~3月30日　休斯顿,博赫纳(Salomon Bochner, 1899~1982)纪念演讲。

夏　天津铁路一中(原扶轮中学)设立陈省身奖学金。参加首届颁奖仪式。

10月9日　在北京科学会堂举行第二届"陈省身数学奖"颁奖仪式和《陈省身文选》首发仪式。李邦河与姜伯驹获奖。陈省身出席,并作讲话。

10月10日　江泽民主席在中南海会见并宴请陈省身和夫人郑士宁。

10月16日　参加南开大学"纪念姜立夫先生诞辰100周年"暨"姜立夫铜像揭幕仪式"。陈省身是铜像的两位捐献人之一。

10月25日　金婚及生日大会。

10月30日　广州,姜立夫百年纪念,广东旅行。

11月9日　返美。

斯普林格出版社出版《陈省身论文选》第二至四卷。

1990年(79岁)

1月　中国数学奥林匹克设立"陈省身奖杯"。

4月28~29日　参加在美国圣母大学举行的多复变函数值分布理论研讨会,夫人郑士宁同行。研讨会前一天女婿朱经武正应邀在该校物理系作关于高温超导的报告,陈也前往听讲。

夏　郑绍远与丘成桐组织陈省身79岁祝寿会,许多学生和朋友参加。

1991年(80岁)

1月24日　写信胡国定,提出每年捐南开数学研究所一万美元。多年来实际捐款、捐物的价值远超此数,无法准确统计。

5月　参加由中国自然科学基金会支持、在南开数学研究所召开的"第二次二十一世纪中国数学展望学术讨论会",任会议名誉主席。

5月19日　上午出席全体会议,并作讲话。下午中国数学会举行第三次陈省身数学奖颁奖仪式,陈省身偕夫人出席,并在仪式上讲话。获奖者是肖刚和冯克勤。吴文俊作《陈省身教授学术成就》的学术报告。会议期间南开大学还组织了陈省身教授八十寿辰的庆祝会。

11月　祝寿。

1992年(81岁)

5月31日　参加纪念中国自然科学基金会成立十周年学术报告会,在会上作《二十一世纪的数学》的讲演。

6月　参加南开大学举行第21届"理论物理中的微分几何方法"国际会议。

丘成桐主编的《陈省身——20世纪伟大的几何学家》(英文版)由香港国际书局出版。其中收入许多陈的朋友和学生们的回忆文章。《美国数学会通告》(Notices)中的书评说:"这些文章反映了这位伟大数学家的智慧和他与年轻几何学家交往中倾注的热情。"

1993年(82岁)

卸任南开数学研究所所长,任名誉所长。

5月14日　下午偕夫人出席在南开大学举行的第四次陈省身数学奖颁奖仪式,并在会上讲话。

5月　和丘成桐在受江泽民总书记接见时,一起建议中国争取在本世纪末或下世纪初举办一次国际数学家大会。

6月3日　接受中国科学院数学研究所名誉教授。

6月7日　访问北京师范大学,作《李氏球几何》的报告。题词:"百年树人,数学为先。"

1994年(83岁)

6月8日　当选为中国科学院首批外籍院士。

9月　与杨振宁一起出席在8月31日至9月9日在香港举行的中国国家自然

基金会数学优先资助领域研讨会，两人均在会上讲话。

10 月 31 日　参观刚落成的天津科技馆，给予高度评价。

有诗："人生曾几何？八十一瞬间；光阴微分计，临老不偷闲。"

1995 年(84 岁)

1 月　伯克利加利福尼亚大学数学系 1976 年的博士毕业生乌米尼(R. Uomini)赢得 2 000 多万美元的彩票大奖，为了感谢他所尊敬的陈省身教授对他的教导和帮助，他决定要为数学系设立基金，每年以陈省身访问学者的名义邀请一位著名的数学家前来访问讲学。第一位是英国的 M. 阿蒂亚(M. F. Atiyah, 1929 ~)。

5 月　参加 5 月 18 日至 21 日在北京清华大学举行的中国数学会第七次代表大会暨六十周年年会，在大会上致辞。并参加在开幕式上举行的第五届陈省身数学奖(获奖者洪家兴与马志明)和第二届华罗庚数学奖颁奖仪式。

5 月　偕夫人于 22 日起在贵州作为期一周的讲学和访问。23 日上午在贵州大学学术报告厅为贵州数学界作《数学研究的一些最近进展》的演讲。下午与吴文俊等人访问贵州一中，临别题写"数学是一切学问的基础"。26 日上午来到贵州教育学院会议厅，与贵州数学界各方面的代表以及教育学院数学系师生进行座谈。

8 月 10 日　周炜良长期患病后逝世。陈撰文悼念，回顾周的生平、工作以及和他的交往。

1996 年(85 岁)

3 月　首位陈省身访问学者、英国牛顿数学研究所所长阿蒂亚前来访问五周，并举行报告会。

5 月 14 日　获国务院设立的"中国国际科技合作奖"。

9 月　由郑绍远、李伟光和田刚编辑的《陈省身选集》(英文)出版。

1997 年(86 岁)

2 月 25 日　陈省身在芝加哥大学指导的博士、美国著名几何学家路易斯·奥斯兰德(L. Auslander, 1928 ~ 1997)逝世。陈撰文悼念。

9 月　在台湾《传记文学》上发表文章《论清太宗孝庄皇后》。这是一篇有关清初历史的论文。

1998 年(87 岁)

著名数学家、法国布尔巴基学派领袖、陈省身多年好友安德烈·韦伊逝世。陈撰文回忆与韦伊的交往和他的工作。

3 月 5 ~ 7 日　伯克利加利福尼亚大学数学系举办第三届陈省身访问学者年度

研讨会。陈省身作大会报告《射影几何学》;本届陈省身访问学者希策布鲁赫(F. E. P. Hirzebruch, 1927 ~　)作报告《我为什么喜欢陈类?》

12月7日　第六届陈省身奖颁奖仪式在南开大学举行,获奖者是王建磐和文兰。陈省身因身体欠安未能回国参加颁奖。

1999年(88岁)

9月24日,在复旦大学参加求实基金会科学奖的颁发仪式。并作《什么是几何学》的学术报告。这也是复旦大学杨武之讲座的第一讲。

9月28日,在嘉兴秀州中学出席"陈省身铜像揭幕仪式",以及"陈省身故居"纪念牌的揭幕仪式。

10月4~5日,在复旦大学进行"杨武之讲座"的第二、三讲。

10月6日,到南开大学。

2000年(89岁)

1月9日　天津科技馆为陈省身竖立半身铜像。

1月12日　夫人郑士宁逝世于南开寓所。

1月28日　张奠宙等来南开商讨华东师范大学出版社出版《陈省身文集》事宜,事后有访谈录,发表于2000年6月的上海《科学》杂志,以及2000年8月号《高等数学教学》。

3月6日　第七届陈省身数学奖颁奖仪式在南开大学举行,王诗宬与龙以明获奖。陈省身参加仪式并为获奖者颁奖。

5月　与德国数学家希策布鲁赫合编的《Wolf Prize in Mathematics》(第一卷)由新加坡世界科技出版公司出版。

9月14日　陈省身回国定居欢送会在中国旧金山领事馆举行。中美两国近百名科学家前来送行。

9月27日　由陈璞陪同,从美国回到南开。

10月2日　去嘉兴秀州中学参加建校100周年典礼。

10月9~13日　发起并主持的《陈国才、周炜良纪念会议》(代数几何与代数拓扑国际会议)在南开大学召开。世界著名数学家阿蒂亚,国际数学联盟主席帕利斯(Jr. J. Palis, 1940 ~　),秘书长格里菲思(P. Griffiths, 1938 ~　)等到会。13日,中国国家主席江泽民接见到会的贵宾。吴文俊、张恭庆、马志明、谷超豪、田刚等陪同。

12月11日　受聘任天津科学技术馆名誉馆长。

12月18日　参加纪念华罗庚90诞辰国际数学讨论会,并在会上作《我与华罗庚》的发言。同日受聘清华大学名誉教授。

2001年 (90岁)

年初,当选俄罗斯科学院外籍院士

4月16日　提议的“南开大学天津大学刘徽应用数学中心”获得国家教育部批准成立,并任首届学术委员会主任。

4月27日　出席清华大学90周年校庆学术报告会。演讲题目:《芬斯勒几何》。

5月21~24日　以“求是基金会”顾问身份到泰国曼谷参加会议。

7月12~18日　赴北戴河工作、休息。

8月13~17日　赴承德旅游。

9月20~22日　到上海复旦大学,出席苏步青百岁寿辰国际数学会议。作大会演讲:《支流形的全曲率》。

9月23~29日　应浙江大学邀请讲学,住杭州刘庄,室临湖。多次演讲座谈。游绍兴、嘉兴、乌镇。

10月11日　获柏林工业大学博士。并因几何贡献获汉堡大学授予的布拉施克奖章。由于不能赴德,伯本考(A. Bobenko)教授亲送奖章来天津南开大学。

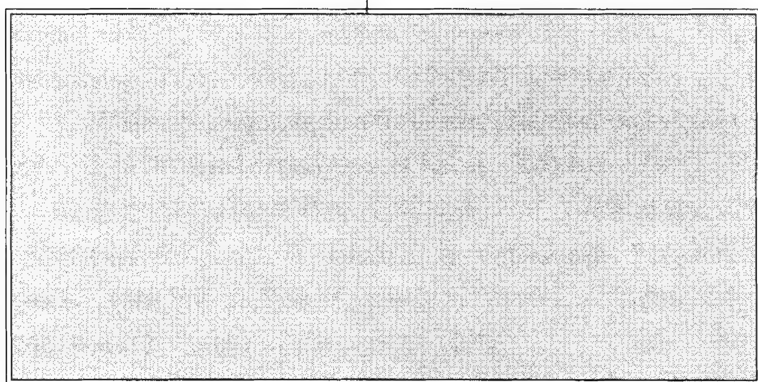
10月12日　开始上“后微积分”(为学过微积分的人加深理解微积分的本质、价值和意义)。南开大学、天津大学及他校学生听讲十分踊跃。

10月20~21日　出席求是青年奖获得者学术报告会。

10月23日　90岁寿宴,出席者百余人。

F L

附　录



陈省身已发表的著作和论文目录

一、专著、教材

1. Topics in Differential Geometry (mimeographed) = 微分几何若干论题(油印本)//Institute for Advanced Study, Princeton (1951), 106p.

2. Differentiable Manifolds (mimeographed) = 微分流形(油印本)//University of Chicago, Chicago(1953), 166p.

3. Complex Manifolds = 复流形//

a. University of Chicago (1956), 195p.

b. University of Recife, Recife, Brazil (1959), 181p.

c. Russian translation, Moscow (1961), 239p.

4. Complex Manifolds without Potential Theory = 无位势理论的复流形//van Nostrand (1967), 92p. 2 nd edition, Springer-Verlag (1979), 152p, ISBN 0387904220; 2 nd printing (1995), 160p, ISBN 0387904220 3540904220.

5. Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold (mimeographed) = 黎曼流形中的极小子流形(油印本)//University of Kansas, Lawrence (1968), 55p.

6. 微分几何讲义(陈省身、陈维桓著)//北京大学出版社(1983),321 页.

7. (with R. Bryant, R. Gardner, H. Goldschmidt, P. Griffiths) Exterior Differential Systems = 外微分系统(陈省身、布赖恩特、加德纳、戈尔德施米特、格里菲思合著)// MSRI Series18, Springer-Verlag (1991), 475p.

8. (with David Bao, Shen Z.) An Introduction to Riemann-Finsler Geometry = 黎曼-芬斯勒几何引论(鲍大维、陈省身、沈忠民合著)//Springer-Verlag (2000), 431p.

二、编　著

1. Studies in Global Geometry and Analysis = 整体几何与分析研究//Mathematical

Association of America (1967), 200p.

2. (Edited by Shiing-Shen Chern and Stephen Smale) Global analysis = 整体分析(陈省身、斯梅尔编)//American Mathematical Society (1970), 3v.

3. (Edited by S. S. Chern and R. Osserman) Differential Geometry: Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society = 微分几何(陈省身、奥斯曼编)//American Mathematical Society (1975), 2v.

4. (Chief editors, S.S. Chern, Wu Wen-tsun) Symposium on Differential Geometry and Differential Equations (1980: Beijing, China) = 1980 年"双微"北京讨论会文集(陈省身、吴文俊主编)//科学出版社(1982 年),3 卷集,ISBN 0677164203.

5. Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations = 非线性偏微分方程研讨班论文集//Springer-Verlag (1984), 373p, ISBN 0387960791.

6. Partial Differential Equations: Proceedings of A Symposium Held in Tianjin = 偏微分方程:天津讨论会会议录//Lecture Notes in Mathematics Series **1306**, Springer-Verlag (1988), 294p, ISBN 038719097X.

7. Global Differential Geometry = 整体微分几何//Mathematical Association of America (1989), 354p, ISBN 0883851296.

8. (Edited by S.S. Chern, C.W Chu, and C.S. Ting) Physics and Mathematics of Anyons: Proceedings of the TCSUH Workshop = 任意子的物理与数学(陈省身、朱经武、丁秦生编)//World Scientific (1991), 322p, ISBN 981020650X 9810207220X.

9. (Edited by David Bao, Shiing-Shen Chern, Zhongmin Shen) Finsler Geometry: Joint Summer Research Conference on Finsler Geometry = 芬斯勒几何(鲍大维、陈省身、沈忠民编)//American Mathematical Society (1996), 310p, ISBN 082180507X.

10. (Edited by Thomas E. Cecil, Shiing-Shen Chern) Tight and Taut Submanifolds: Papers in Memory of Nicolaas H.Kuiper = 紧密与套紧子流形:N.H. 凯珀纪念论文集(赛西尔、陈省身编)//Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press (1997), 349p, ISBN 0521620473.

11. (Edited by S. S. Chern, F. Hirzebruch) Wolf Prize in Mathematics (Volume 1)=数学沃尔夫奖(第一卷)(陈省身、希策布鲁赫编)//World Scientific(2000), 761p, ISBN 9810239459.

三、文集、选集

1. 陈省身文选——传记、通俗演讲及其它(张洪光编)//北京:科学出版社(1989),371 页,ISBN 7-03-001413-8.

2. 陈省身文选(项武义、莫宗坚、康明昌编)//台北:联经出版社(1993),525

页,ISBN 957-08-0195-6.

3. Shiing-Shen Chern Selected Papers = 陈省身论文选//Springer-Verlag (1978), 508p, ISBN 0387903399.

4. Shiing-Shen Chern Selected Papers = 陈省身论文选//Springer-Verlag (1989), Vols. Ⅱ, 444p; Vols. Ⅲ, 504p; Vols. Ⅳ, 462p.

5. Chern—A Great Geometer of the Twentieth Century (Edited by S. T. Yau) = 陈省身——20世纪伟大的几何学家(丘成桐编)//International Press (1992), 319p, ISBN 962-7670-02-2.

6. A Mathematician and His Mathematical Work—Selected Papers of S. S. Chern (Edited by S. Y. Cheng, P. Li, G. Tian) = 陈省身论文选(郑绍远、李伟光、田刚合编)//World Scientific (1995), 707p, ISBN 9810223854.

四、论 文

1932年

1. Pairs of plane curves with points in one-to-one correspondence = 具有一一对应点的平面曲线对//清华大学理科报告,**1**(1932),145~153.

1935年

2. Triads of rectilinear congrueneces with generators in correspondence = 具有对应母线的直纹线汇三元组//*Tohoku Math. J.* **40**(1935) 179~188.

3. Associate quadratic complexes of a rectilinear congruence = 直纹线汇的相伴二次复形//*Tohoku Math. J.* **40**(1935) 293~316.

4. Abzahlungen für Gewebe = 网的计算//*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **11** (1935) 163~170.

1936年

5. Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im R_{2r} = $2r$维空间中r维流形的三重网不变理论//*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **11**(1936) 333~358.

1937年

6. Sur la géométrie d'une équation différentielle du troisième ordre = 关于三阶微分方程的几何学//*C. R. Acad. Sci. Paris* **204**(1937) 1227~1229.

7. Sur la possibilité de plonge un espace à connexion projective donné dans un espace projectif = 论把带有给定射影联络的空间浸入射影空间的可能性//*Bull. Sci. Math*. **61**(1937) 234～243.

1938 年

8. On projective normal coordinates = 关于射影正规坐标//*Ann. of Math*. **39** (1938) 165～171.

9. 关于两个仿射联络//云南大学学报,**1**(1938), 1～18.

1939 年

10. Sur la géométrie d'un système d'équations différentielles du second ordre = 关于二阶微分方程组的几何学//*Bull. Sci. Math*. **63**(1939) 206～212.

1940 年

11. The geometry of higher path-space = 高维道路空间的几何学//中国数学会学报,**2**(1940), 247～276.

12. Sur les invariants intégraux en géométrie = 关于几何中的不变积分//清华大学理科报告,**4**(1940), 85～95.

13. 微分方程 $y''' = F(x, y, y', y'')$ 的几何学//清华大学理科报告,**4**(1940), 97～111.

14. Sur une généralisation d'une formule de Crofton = 关于克罗夫顿公式的一个推广//*C.R. Acad. Sci. Paris* **210**(1940) 757～758.

15. (with C. T. Yen) Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni = n 维空间主运动式(与严志达合作)//*Boll. Un. Mat. Ital*. **2**(1940) 434～437.

16. 克罗夫顿(Crofton)公式的推广//武汉大学理科杂志,**7**(1940), 1～16.

1941 年

17. Sur les invariants de contact en géométrie projective différentielle = 关于射影微分几何的切触不变量//*Acta Pontif. Acad. Sci*. **5**(1941) 123～140.

18. 中国算学之过去与现在//科学,25 卷 5～6 期,1941 年.

1942 年

19. On integral geometry in Klein spaces = 关于克莱因空间的积分几何//*Ann. of Math*. **43**(1942) 178～189.

20. On the invariants of contact of curves in a projective space of n dimensions and their geometrical interpretation = 关于 n 维射影空间曲线的切触不变量和它们的几何解释//中央研究院院记录,**1**(1942), 11 ~ 15.

21. The geometry of isotropic surfaces = 迷向曲面几何//*Ann. of Math*. **43**(1942) 545 ~ 559.

22. On a Weyl geometry defined from an $(n-1)$-parameter family of hypersurfaces in a space of n dimensions = 关于由 n 维空间的超曲面 $n-1$ 参数族定义的外尔几何//中央研究院院记录,**1**(1942), 7 ~ 10.

1943 年

23. On the Euclidean connections in a Finsler space = 关于芬斯勒空间中的欧几里得联络//*Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. **29**(1943) 33 ~ 37.

24. A generalization of the projective geometry of linear spaces = 线性空间射影几何的一个推广//*Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. **29**(1943) 38 ~ 43.

1944 年

25. Laplace transforms of a class of higher dimensional varieties in a projective space of n dimensions = n 维射影空间中一类高维簇的拉普拉斯变换//*Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. **30**(1944) 95 ~ 97.

26. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds = 闭黎曼流形高斯-博内公式的一个简单的内蕴证明//*Ann. of Math*. **45** (1944) 747 ~ 752.

27. Integral formula for the characteristic classes of sphere bundles = 球丛示性类的积分公式//*Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. **30**(1944) 269 ~ 273.

28. On a theorem of algebra and its geometrical application = 关于一个代数定理及其几何应用//*J. Indian Math. Soc*. **8**(1944) 29 ~ 36.

1945 年

29. On Grassmann and differential rings and their relations to the theory of multiple integrals = 论格拉斯曼,微分环及其与多重积分的关系// *Sankhya* **7**(1945) 2 ~ 8.

30. Some new characterizations of the Euclidean sphere = 欧几里得球面若干新特性//*Duke Math. J*. **12**(1945) 279 ~ 290.

31. On the curvatura integra in a Riemannian manifold = 论黎曼流形的曲率积分//*Ann. of Math*. **46**(1945) 674 ~ 684.

32. On Riemannian manifolds of four dimensions = 关于四维黎曼流形//*Bull*.

Amer. Math. Soc. **51**(1945) 964 ~ 971.

1946 年

33. Some new viewpoints in the differential geometry in the large = 大范围微分几何的若干新观点//*Bull. Amer. Math. Soc.* **52**(1946) 1 ~ 30.

34. Characteristic classes of Hermitian manifolds = 埃尔米特流形的示性类//*Ann. of Math.* **47**(1946) 85 ~ 121.

1947 年

35. (with H.C. Wang) Differential geometry in symplectic space = 辛空间微分几何(与王宪钟合作)//清华大学理科报告,**4**(1947), 453 ~ 477.

36. Sur une classe remarquable de variétés dans l'espace projectif à *n* dimensions = 关于 *n* 维射影空间中一类值得注意的流形//清华大学理科报告,**4**(1947), 328 ~ 336.

37. On the characteristic classes of Riemannian manifolds = 关于黎曼流形的示性类//*Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **33**(1947) 78 ~ 82.

38. Note of affinely connected manifolds = 仿射连通流形的注记//*Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947) 820 ~ 823; correction ibid **54**(1948) 985 ~ 986.

39. On the characteristic ring of a differentiable manifold = 关于微分流形的示性环//中央研究院院记录,**2**(1947), 1 ~ 5.

40. 什么是拓扑学//科学,29 卷 3 期,1947 年.

1948 年

41. On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle = 关于球面丛示性环的乘法//*Ann. of Math.* **49**(1948) 362 ~ 372.

42. Note on projective differential line geometry = 射影微分线几何的注记//中央研究院院记录,**2**(1948), 137 ~ 139.

43. (with Y.L. Jou) On the orientability of differentiable manifolds = 关于可微流形的可定向性(与周毓麟合作)//清华大学理科报告,**5**(1948), 13 ~ 17.

44. Local equivalence and Euclidean connections in Finslerian spaces = 芬斯勒空间中的局部等价和欧几里得联络//清华大学理科报告,**5**(1948), 95 ~ 121.

45. 最近五年来数学研究若干进展//科学世界,7 卷 1 期,1948 年.

1949 年

46. (with Y.F. Sun) The imbedding theorem for fibre bundles = 关于纤维丛的嵌

入定理(与孙以丰合作)//*Trans. Amer. Math. Soc.* **67**(1949) 286 ~ 303.

47. (with Sze-tsen Hu) Parallelisability of principal fibre bundles = 主纤维丛的可平行性(与胡世桢合作)//*Trans. Amer. Math. Soc.* **67**(1949) 304 ~ 309.

1950 年

48. (with E.H. Spanier) The homology structure of sphere bundles = 球丛的同调结构(与斯潘涅合作)//*Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **36**(1950) 248 ~ 255.

49. Differential geometry of fiber bundles = 纤维丛的微分几何//*Proc. Int. Congr. Math.* (1950) Ⅱ 397 ~ 411.

1951 年

50. (with E. Spanier) A theorem on orientable surfaces in four-dimensional space = 关于四维空间可定向曲面的一个定理(与斯潘涅合作)//*Comm. Math. Helv.* **25** (1951) 205 ~ 209.

1952 年

51. On the kinematic formula in the Euclidean space of n dimensions = n 维欧几里得空间中的运动公式//*Amer. J. Math.* **74**(1952)227 ~ 236.

52. (with C. Chevalley) Elie Cartan and his mathematical work = 艾利·嘉当和他的数学工作(与谢瓦莱合作)//*Bull. Amer. Math. Soc.* **58**(1952) 217 ~ 250.

53. (with N. H. Kuiper) Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space = 关于紧致黎曼流形等距嵌入欧几里得空间的若干定理(与凯珀合作)//*Ann of Math.* **56**(1952) 422 ~ 430.

1953 年

54. On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties = 关于复球面丛和代数簇的示性类//*Amer. J. of Math.* **75**(1953) 565 ~ 597.

55. Some formulas in the theory of surfaces = 曲面理论中若干公式//*Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* **10**(1953) 30 ~ 40.

56. Relations between Riemannian and Hermitian geometries = 黎曼几何与埃尔米特几何之间的若干关系//*Duke Math. J.* **20**(1953) 575 ~ 587.

1954 年

57. Pseudo-groupes continus infinis = 连续的无限伪群//*Colloque de Geom. Diff. Strasbourg* (1954) 119 ~ 136.

58. (with P. Hartman and A. Wintner) On isothermic coordinates//关于等温坐标(与哈特曼、温特合作)//*Comm. Math. Helv.* **28**(1954) 301~309.

1955 年

59. La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions = 多维欧几里得空间的子流形的几何//*l'Ens. Math.* **40**(1955) 26~46.

60. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface = 曲面上等温参数存在性的一个初等证明//*Proc. Amer. Math. Soc.* **6**(1955) 771~782.

61. On special W-surfaces = 关于特殊的 W-曲面//*Proc. Amer. Math. Soc.* **6**(1955) 783~786.

62. On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold = 关于黎曼流形的曲率与示性类//*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20**(1955) 117~126.

1956 年

63. Topology and differential geometry of complex manifolds = 复流形的拓扑与微分几何//*Bull. Amer. Math. Soc.* **62**(1956) 102~117.

1957 年

64. On a generalization of Kähler geometry = 关于凯勒几何的一个推广//*Lefschetz jubilee volume*. Princeton Univ. Press (1957) 103~121.

65. (with R. Lashof) On the total curvature of immersed manifolds = 关于浸入流形的全曲率(与拉肖夫合作)//*Amer. J. of Math.* **79**(1957) 306~318.

66. (with F. Hirzebruch and J-P. Serre) On the index of a fibered manifold = 关于纤维化流形的指标(与希策布鲁赫、塞尔合作)//*Proc. Amer. Math. Soc.* **8**(1957) 587~596.

67. A proof of the uniqueness of Minkowski's problem of convex surfaces = 凸曲面闵科夫斯基问题唯一性的一个证明//*Amer. J. of Math.* **79**(1957) 949~950.

1958 年

68. Geometry of submanifolds in complex projective space = 复射影空间中子流形的几何学//*Symposium International de Topologia Algebraica* (1958) 87~96.

69. (with R. K. Lashof) On the total curvature of immersed manifolds, Ⅱ = 关于浸入流形的全曲率(Ⅱ)(与拉肖夫合作)//*Michigan Math. J.* **5**(1958) 5~12.

70. Differential geometry and integral geometry = 微分几何与积分几何//*Proc. Int. Congr. Math. Edinburgh* (1958) 441~449.

1959 年

71. Integral formulas for hypersurfaces in Euclidean space and their applications to uniqueness theorems = 欧几里得空间中超曲面的积分公式及其对唯一性定理的应用// *J. of Math. and Mech.* **8**(1959) 947 ~ 956.

1960 年

72. (with J. Hano and C. C. Hsiung) A uniqueness theorem on closed convex hypersurfaces in Euclidean space = 欧几里得空间中闭凸超曲面上的唯一性定理(与埴野顺一、熊全治合作)// *J. of Math. and Mech.* **9**(1960) 85 ~ 88.

73. Complex analytic mappings of Riemann surfaces I = 黎曼曲面的复解析映射(Ⅰ)// *Amer. J. of Math.* **82**(1960) 323 ~ 337.

74. The integrated form of the first main theorem for complex analytic mappings in several commplex variables = 多复变函数中复解析映射第一主定理的积分形式// *Ann. of Math.* **71**(1960) 536 ~ 551.

75. Geometrical structures on manifolds = 流形上的几何结构// *Amer. Math. Soc. Pub.* (1960) 1 ~ 31.

76. La géométrie des hyper surfaces dans l'espace euclidean = 欧几里得空间中超曲面的几何学// *Seminaire Bourbaki* **193**(1959 ~ 1960).

77. Sur les métrriques Riemanniens compatibles avec une reduction du groupe structural = 关于结构群的约化及相容黎曼度量// *Séminaire Ehresmann*. January 1960.

1961 年

78. Holomorphic mappings of complex manifolds = 复流形的全纯映射// *l' Ens. Math.* **7**(1961) 179 ~ 187.

1962 年

79. Geometry of quadratic differential form = 二次微分形式的几何学// *J. of SIAM* **10** (1962) 751 ~ 755.

1963 年

80*. (with C. C. Hsiung) On the isometry of compact submanifolds in Euclidean space = 论欧几里得空间中紧子流形的等距(与熊全治合作)// *Math. Annalen* **149** (1963)278 ~ 285.

81. Pseudo-Riemannian geometry and the Gauss-Bonnet formula = 伪黎曼几何及高斯-博内公式//*Academia Brasileira de Ciencias* **35**(1963) 17 ~ 26.

1965 年

82. Minimal surfaces in an Euclidean space of n dimensions = n 维欧几里得空间中的极小曲面//*Differential and Combinatorial Topology*. Princeton Univ. Press (1965) 187 ~ 198.

83. (with R. Bott) Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections = 埃尔米特向量丛和它们全纯截面零点的等分布(与博特合作)//*Acta. Math.* **114**(1965) 71 ~ 112.

84. On the curvatures of a piece of hypersurface in Euclidean space = 关于欧几里得空间中一片超曲面的曲率//*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **29**(1965) 77 ~ 91.

85. On the differential geometry of a piece of submanifold in Euclidean space = 关于欧几里得空间中一片子流形的微分几何学//*Proc. of U. S.-Japan Seminar in Diff. Geom.* (1965) 17 ~ 21.

1966 年

86. Geometry of G-structures = G-结构的几何学//*Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966) 167 ~ 219.

87. On the kinematic formula in integral geometry = 论积分几何中的运动公式//*J. of Math. and Mech.* **16**(1966) 101 ~ 118.

88. Geometrical structures on manifolds and submanifolds = 流形和子流形上的几何结构//*Some Recent Advances in Basic Sciences*. Yeshiva Univ. Press (1966) 127 ~ 135.

1967 年

89. (with R. Osserman) Complete minimal surfaces in Euclidean n-space = 欧几里得 n 空间中完备极小曲面(与奥斯曼合作)//*J. de l' Analyse Math.* **19**(1967) 15 ~ 34.

90. Einstein hypersurfaces in a Kahlerian manifold of constant holomorphic curvature = 常全纯曲率凯勒流形中的爱因斯坦超曲面//*J. Diff. Geom.* **1**(1967) 21 ~ 31.

1968 年

91. On holomorphic mappings of Hermitian manifolds of the same dimension = 关于同维埃尔米特流形的全纯映射//*Proc. Symp. Pure Math.* **11**. Entire Functions and Related Parts of Analysis (1968) 157 ~ 170.

1969 年

92. Simple proofs of two theorems on minimal surfaces = 极小曲面上两个定理的简单证明//*L' Ens. Math*. **15**(1969) 53 ~ 61.

1970 年

93. (with H. Levine and L. Nirenberg) Intrinsic norms on a complex manifold = 复流形上的内蕴范数(与莱文、尼伦伯格合作)//*Global analysis*. Princeton Univ. Press (1970) 119 ~ 139.

94. (with M. do Carmo and S, Kobayashi) Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length = 球面上具有定长第二基本式的极小子流形(与陀卡摩、小林昭七合作)//*Functional Analysis and Related Fields*. Springer-Verlag (1970) 59 ~ 75.

95. (with R. Bott) Some formulas related to complex transgression = 若干与复超度有关的公式(与博特合作)//*Essays on Topology and Related Topics*. Springer-Verlag (1970) 48 ~ 57.

96. Holmorphic curves and minimal surfaces = 全纯曲线与极小曲面//*Carolina Conference Proceedings* (1970) 28p.

97. On mimimal spheres in the four-sphere = 关于四维球面中的极小球面//程毓淮寿辰论文集,中国台湾,(1970), 137 ~ 150.

98. Differential geometry: Its past and its future = 微分几何:它的过去与未来//*Actes Congrès Intern. Math*. **1**(1970) 41 ~ 53.

99. On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature = 常曲率空间中二维球面的极小浸入//*Problems in Analysis*. Princeton Univ. Press (1970) 27 ~ 40.

1971 年

100. Brief survey of minimal submanifolds = 极小子流形概观//*Differentialgeometrie im Grossen*. W. Klingenberg (ed.) **4**(1971) 43 ~ 60.

101. (with J. Simons) Some cohomology classes in principal fibre bundles and their application to Riemannian geometry = 主纤维丛中若干上同调类及其对黎曼几何的应用(与西蒙斯合作)//*Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. **68**(1971) 791 ~ 794.

1972 年

102. Holomorphic curves in the plane = 平面中的全纯曲线//*Diff. Geom.*, *in*

honor of K. Yano (1972) 73 ~94.

103. Geometry of characteristic classes = 示性类的几何学//*Proc. 13 th Biennial Sem. Canadian Math. Congress* (1972) 1 ~ 40. Also pub. in Russian translation.

1973 年

104. Meromorphic vector fields and characteristic numbers = 亚纯向量场与示性数//*Scripta Math*. **29**(1973) 242 ~ 251.

105. The mathematical works of Wilhelm Blaschke = 威廉·布拉施克的数学工作//*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **39**(1973) 1 ~ 9.

1974 年

106. (with J. Simons) Characteristic forms and geometrical invariants = 特征形式与几何不变量(与西蒙斯合作)//*Ann. of Math*. **99**(1974) 48 ~ 69.

107. (with M. Cowen, A. Vitter) Frenet frames along holomorphic curves = 沿全纯曲线的弗雷内标架(与考文、维特合作)//*Proc. of Conf. on Value Distribution Theory*, Tulane Univ. (1974) 191 ~ 203.

108. (with J. Moser) Real hypersurfaces in complex manifolds = 复流形中的实超曲面(与莫泽合作)//*Acta. Math*. **133**(1974) 219 ~ 271.

1975 年

109. (with S. I. Goldberg) On the volume decreasing property of a class of real hamonic mappings = 关于一类实调和映射的体积递减性质(与戈尔德伯格合作)//*Amer. J. of Math*. **97**(1975) 133 ~ 147.

110. On the projective structure of a real hypersurface in C_{n+1} = 关于 C_{n+1}中实超曲面的射影结构//*Math. Scand*. **36**(1975) 74 ~ 82.

1976 年

111. (with J. White) Duality properties of characteristic forms = 示性式的对偶性质(与怀特合作)//*Inv. Math*. **35**(1976) 285 ~ 297.

1977 年

112. Girde bundles = 圆丛//*Geomety and topology*. Ⅲ Latin Amer. School of Math. Lecture Notes in Math. **597**. Springer-Verlag (1977) 114 ~ 131.

113. (with P. A. Griffiths) Lineariazaion of webs of codimension one and maximum rank = 余维数 1 的网的线性化与最大秩(与格里菲思合作)//*Proc. Int. Symp. on*

Algebraic Geometry, *Kyoto* (1977) 85 ~ 91.

1978 年

114. On projective connections and projective relativity = 射影联络与射影相对论//*Science of Matter*. Dedicated to Ta-you Wu (1978) 225 ~ 232.

115. (with P.A. Griffiths) Abel's theorem and web = 阿贝尔定理与网(与格里菲思合作)//*Jber. d. Dt. Math. Verein* **80**(1978) 13 ~ 110.

116. (with P.A. Griffiths) An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank = 关于网秩的一个不等式与最大秩的网(与格里菲思合作)//*Annali Sc. Norm. Super.-Pisa*, *Serie* IV. **5**(1978) 539 ~ 557.

117. Affine minimal hypersurfaces = 仿射极小超曲面//*Minimal Submanifolds and geodesics*. Kaigai Publications, Ltd. (1978) 1 ~ 14.

1979 年

118. Herglotz's work on geometry = 赫格洛茨的几何工作//*Ges. Schriften Gustav Herglotz*, Göttingen (1979) xx ~ xxi.

119. (with C.L. Terng) An analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry = 仿射几何中贝克隆德定理的类比(与滕楚莲合作)//*Rocky Mountain J. Math.* **10** (1979) 105 ~ 124.

120. From triangles to manifolds = 从三角形到流形//*Amer. Math. Monthly* **86** (1979) 339 ~ 349.

121. (with C.K. Peng) Lie groups and KdV equations = 李群与 KdV 方程(与彭家贵合作)//*Manuscripta Math.* **28**(1979) 207 ~ 217.

1980 年

122. General relativity and differential geometry = 广义相对论与微分几何//*Some Strangeness in the proportion*: *A Centennial Symp. to Celebrate the Achievements of Albert Einstein*, Harry Woolf(ed.), Addison-Wesley Publ. (1980) 271 ~ 287.

123. (with W.M. Boothby and S.P. Wang) The mathematical work of H.C. Wang = 王宪钟的数学工作(与布思比、王叔平合作)// *Bull. Inst. of Math.* **8**(1980) xiii ~ xxiv.

124. Geometry and physics = 几何与物理//*Math. Medley*, *Singapore* **8**(1980) 1 ~ 6.

125. (with R. Bryant and P.A. Griffiths) Exterior differential systems = 外微分系统(与布赖恩特、格里菲思合作)//*1980 年"双微"北京讨论会文集*,科学出版社,

(1980)219 ~ 338.

1981 年

126. Geometrical interpretation of the sinh-Gordon equation = 双曲正弦-戈登方程的几何解释//*Annales Polonici Mathematici* **39**(1981) 63 ~ 69.

127. (with P. A. Griffiths) Corrections and addenda to our paper: "Abel's theorem and webs." = 对我们的论文"阿贝尔定理与网"的改正和补充(与格里菲思合作)//*Jber. d. Dt. Math-Verein* **83**(1981) 78 ~ 83.

128. (with R. Osserman) Remarks on the Riemannian metric of a minimal submanifold = 关于极小子流形的黎曼度量的评论(与奥斯曼合作)//*Geometry Symposium Utrecht* 1980, Lecture Notes in Math. **894**, Springer-Verlag (1981) 49 ~ 90.

129. (with J. Wolfson) A simple proof of Frobenius theorem = 弗罗贝尼乌斯定理的一个简单证明(与沃尔夫森合作)// *Manifolds and Lie Groups*, *Papers in Honor of Y. Matsushima*, Birkhauser (1981) 67 ~ 69.

130. (with K. Tenenblat) Foliations on a surface of constant curvature and modified Korteweg-de Vries equations = 常曲率曲面上的叶状结构与修正的 KdV 方程(与特南布莱特合作)//*J. Diff. Geom*. **16**(1981) 347 ~ 349.

131. (with C.K.Peng)On the Bäcklund transformations of KdV equations and modified KdV equations = 关于 KdV 方程和修正的 KdV 方程的贝克隆德变换(与彭家贵合作)//中国科技大学学报,**11**(1981),1 ~ 6.

1982 年

132. Web geometry = 网几何//*Proc. Symp. in Pure Math*. **39**(1983) 3 ~ 10.

133. Projective geometry, contact transformations, and CR-structures = 射影几何、切触变换与 CR-结构//*Archiv der Math*. **38**(1982) 1 ~ 5.

1983 年

134. (with J. Wolfson) Minimal surfaces by moving frames = 由活动标架得到的极小曲面(与沃尔夫森合作)//*Amer. J. Math*. **105**(1983) 59 ~ 83.

135. On surfaces of constant mean curvature in a three-dimensional space of constant curvature = 关于三维常曲率空间中的常平均曲率曲面//*Geometric Dynamics*, Springer Lecture Notes **1007**(1983)104 ~ 108。

1984 年

136. Deformation of surfaces preserving principal curvatures = 主曲率不变的曲面形

变//*Differential Geometry and Complex Analysis*, Volume in Memory of H. Rauch. Springer-Verlag (1984) 155 ~ 163.

1985 年

137. (with T. Hamilton) On Riemannian metrics adapted to three-dimensionnal contact manifolds = 关于适于三维切触流形的黎曼度量(与哈密顿合作)// *Arbertstagung Bonn*, Springer (1984).

138. (with J. Wolfson) Harmonic maps of S^2 into a complex Grassmann manifold = S^2 到复格拉斯曼的调和映射(与沃尔夫森合作)//*Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. **82**(1985) 2217 ~ 2219.

139. Moving frames = 活动标架//*Soc. Math. de France*, Astrérisque (1985) 67 ~ 77.

140. Wilhelm Blaschke and web geometry = 威廉·布拉施克与网几何//*Wilhelm Blaschke—Gesammelte Werke*. Bd 5, Thales Verlag (1985) 25 ~ 27.

141. The mathemtical works of Wilhelm Blaschke — an update = 威廉·布拉施克的数学工作——最新进展//ibid. 21 ~ 23.

1986 年

142. (with K. Tenenblat) Pseudospherical surfaces and evolution equations = 伪球面与发展方程(与特南布莱特合作)//*Studies in Applied Math*. MIT **74**(1986) 55 ~ 83.

143. On a conformal invariant of three-dimensional manifolds = 关于三维流形的保角不变量//*Aspects of Mathematics and Its Applicationns*, Elsevier Scientce Publishers B. V. (1986) 245 ~ 252.

144. (with P. A. Griffiths) Pfaffian systems in involution = 对合中的普法夫系统(与格里菲思合作)//*1982 年“双微”长春讨论会文集*,科学出版社,(1986) 233 ~ 256.

1987 年

145. (with J. Wolfson) Harmonic maps of the two-sphere into a complex Grassmann manifold Ⅱ = S^2 到复格拉斯曼的调和映射(Ⅱ)(与沃尔夫森合作)//*Ann. of Math*. **125**(1987) 301 ~ 335.

146. (with T. Cecil) Tautness and Lie Sphere geometry = 套紧性与李球面几何学(与赛西尔合作)//*Math. Annalen, Volume Dedicated to F. Hirzebruch* **278**(1987) 381 ~ 399.

1988 年

147. Vector bundles with a connection = 具有联络的向量丛//*Studies in Global Differential Geometry*. MAA. **27**(1988) 1 ~ 26.

1989 年

148. (with T. Cecil) Dupin submanifolds in Lie sphere geometry = 李球面几何中的迪潘子流形(与赛西尔合作)//*Differential Geometry and Topology*, Springer Lecture Notes **1369** 1 ~ 48。

1990 年

149. Historical remarks on Gauss-Bonnet = 关于高斯-博内定理的历史评注// *Analysis*, *et cetera*, *Volume in Honor of Jurgen Moser*, Academic Press (1990) 209 ~ 217.

150. What is geometry? = 什么是几何学? //*Amer. Math. Monthly* **97**(1990) 678 ~ 686.

1991 年

151. An introduction to Dupin submanifolds = 迪潘子流形引论//*Differential Geometry*, *A Symposium in Honor of M. do Carmo*, Longman (1991) 95 ~ 102.

152. Families of hypersurfaces under contact transformations in R^n = R^n 中切触变换下的超曲面族//*International Symosium in Memory of Hua Loo Keng*, Springer (1991) 49 ~ 56.

153. Surface theory with Darboux and Bianchi = 达布与比安基的曲面理论// *Miscellanea Mathematica*, *Volume Dedicated to H. Gotze*, Springer (1991) 59 ~ 69.

154. Transgression in associated bundles = 伴随丛中的超度//*Internat. J. Math.* **2**(1991) 383 ~ 393.

155. Characteristic classes and characteristic forms = 示性类与示性式//*Paul Halmos Celebrating 50 Years of Math.*, Springer (1991) 169 ~ 177.

1992 年

156. On Finsler geometry = 关于芬斯勒几何//*Comptes Rendus Sci.*, Paris 314 (1992) 757 ~ 761.

157. Yang-Mills equations and Yang-Baxter equations = 杨-米尔斯方程与杨-巴克斯特方程//*中国物理学杂志*,台湾物理学会,**30**(1992), 949 ~ 953.

1993 年

158. (with David Bao) On a notable connection in Finsler Geometry = 关于芬斯勒几何中一个值得注意的联络(与鲍大维合作)//*Houston J. Math.* **19** (1993) 135 ~ 180.

1994 年

159. Characteristic classes as a geometric object = 作为几何对象的示性类//*Global Analysis in Modern Mathematics* (Palais Festival Volume), Publish or Perish (1994) 221 ~ 226.

160. Sophus Lie and Differential Geometry = 索菲斯·李与微分几何//*The Sophus Lie Memeorial Conference*, *Oslo 1992 Proceedings* (1994) 129 ~ 137.

1995 ~ 2000 年

161. (with S. Y. Ji) Projective geometry and Riemann's mapping problem = 射影几何与黎曼映射问题(与嵇善瑜合作)//*Mathematische Annalen* **302**(1995) 581 ~ 600.

162. Les hypersurfaces dans l'espace euclidien = 欧几里德空间中的超曲面 // *Séminaire Bourbaki*, *Soc. Math. France*, Paris **5**(1995).

163. (with David Bao) A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces = 关于芬斯勒空间中高斯-博内定理的一个注记(与鲍大维合作)//*Ann. of Math.* **143** (1996) 233 ~ 252.

164. Remarks on Hilbert's 23rd problem = 关于希尔伯特第 23 问题的注记// *Math. Intelligence* **18**(1996) 7 ~ 8.

165. Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic restriction = 芬斯勒几何就是没有 2 次型限制的黎曼几何 // *Notices Amer. Math. Soc.* **43**(1996) 959 ~ 963.

166. (with W. Wilson, etc.) Wei-Liang Chow (1911 ~ 1995) = 周炜良(1911 ~ 1995)(与威尔森等合作) // *Notices Amer. Math. Soc.* **43**(1996) 1117 ~ 1124.

167. (with D. Bao and Z. Shen) Rigidity issues on Finsler surfaces = 芬斯勒曲面的刚性问题(与鲍大伟和沈忠民合作)//*Collection of papers in honour of Academician Radu Miron on his 70th birthday. Rev. Roumaire Math. Pures Appl.* **42** (1997) 707 ~ 735.

168. (with T. Kailath, etc.) Louis Auslander (1928 ~ 1997) = 路易斯·奥斯兰德(1928 ~ 1997)(与凯拉斯等合作) // *Notices Amer. Math. Soc.* **45**(1998) 390 ~ 395.

169. (with W. H. Chen and K. Lam) Lectures on differential geometry = 微分几何演

讲(与陈维桓等合作) // *Series on University Mathematics* **1**(1999), World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ.

170. (with A. Borel, etc.) André Weil (1906 ~ 1998) = 安德烈·韦伊(1906 ~ 1998)(与博雷尔等合作) // *Notices Amer. Math. Soc.* **46**(1999) 440 ~ 447.

171. Back to Riemann = 回到黎曼 // *Mathematics: Frontiers and Perspectives, Amer. Math. Soc.*, Providence, RI (2000)33 ~ 34.

人名索引

A

C

D

H

J

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

V

W

Z